6. Godement R. — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. Paris, Hermann, 1957.
7. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Theory of vector-valued forms*. I. Proc. Kön. Akad. Wet. Amsterdam, 59, 1956, p. 338—359.
8. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Some new cohomology invariants for complex manifolds*. Proc. Kön. Akad. Wet. Amsterdam, 59, 1956, p. 540—566.
9. Frölicher A., Nijenhuis A. — *Invariance of vector form operations under mappings*. Comm. Math. Helv., 34, 1960, p. 227—248.
10. Hangan T. — *Asupra cohomologiei spațiilor cu curbură constantă*. An. Univ. București, (Mat.—Mec.), 1964, p. 111—120.
11. Kähler E. — *Der innere Differentialkalkül*. Rend. di Mat. e appl. XXI, 1962, p. 425—523.
12. Kodaira K., Spencer D. C. — *Multifoliate structures*. Ann. of Math., 74, 1961, p. 52—100.
13. Libermann P. — *Sur certaines résolutions de faisceaux*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 1735—1737.
14. Nijenhuis A., Richardson R. W. — *Cohomology and deformations in graded Lie algebras*. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 72, 1965, p. 1—29.
15. Spencer D. C. — *De Rham theorems and Neumann decompositions associated with partial differential equations*. „Structures feuilleutées" Coll. C. N. R. S., Grenoble, 1963, p. 1—20.
16. Vaisman I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global*. Comm. Math. Helv., 41, 1966-67, p. 73—87.
17. Vaisman I. — *Remarques sur la théorie des formes-jet*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 264 A, 1967, p. 351—354.
18. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs și conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. șt. Univ. Iași, T. XIII, 1967.
19. Wong Y. C. — *Linear connections and quasiconnections on a differentiable manifold*. Tôhoku Math. J., vol. 14, 1962, p. 48—63.

PSEUDOCOMPLEXE DE COLANȚURI ȘI APLICAȚIILE LOR GEOMETRICE

Rezumat

Prin pseudocomplex de colanțuri se înțelege un grup graduat dat de formula (1), împreună cu homomorfismele (2). Acestuia i se asociază prin (4), (5) grupul jeturilor sale.

În primul paragraf al lucrării se cercetează probleme algebrice privind pseudocomplexele și jeturile lor, arătîndu-se că jeturile formează un complex de colanțuri și dîndu-se rezultate privitoare la grupurile de cohomologie ale subcomplexelor sale.

În cel de-al doilea paragraf, se aplică teoria algebrică precedentă la formele diferențiale scalare ale unei varietăți diferențiabile paracompacte, găsindu-se rezoluții fine ale unor fascicule legate de structuri geometrice ale varietății. Pentru a le obține se dă de asemenea o expunere a calculului tensorial exterior și a teoriei derivărilor, care are ca element nou prezentarea acestora din urmă ca o parte a calculului tensorial exterior într-un spațiu cu conexiune liniară.

În ultimul paragraf se fac aplicații analoge pentru pseudocomplexe definite cu formele vectoriale ale varietății V_p. Remarcăm aci definirea și calculul unor grupuri de cohomologie asociate unei conexiuni liniare pe varietate.

LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES COMPLEXES DE CÔNES QUADRATIQUES DANS L'ESPACE PROJECTIF A TROIS DIMENSIONS

PAR

D. RIMER

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" octobre 1966

1. Le repère canonique. L'étude différentielle des variétés de cônes quadratiques à un ou deux paramètres a été l'objet des Notes [5, 6, 7, 8]. Nous abordons maintenant l'étude des variétés à trois paramètres dans l'espace projectif P_3. Ces variétés ont été, en 1961, l'objet des recherches de Gh. Gheorghiev et I. Popa [2], comme un cas d'exception dans l'étude des variétés de cônes. Nous utiliserons ici la méthode suivie dans nos travaux antérieurs, cités ci-dessus.

Nous introduisons un espace auxiliaire, l'espace projectif à neuf dimensions, S_9, dont les points sont les images des quadriques de P_3, auquel nous attribuons pour groupe fondamental la représentation du groupe projectif de P_3 comme groupe de transformations sur les quadriques. En rapportant les espaces P_3 et S_9 aux repères $\{A_\alpha, U\}$, respectivement $\{A^{\alpha\beta}, E\}$ $(\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3;\ A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha})$, les équations des groupes fondamentaux en P_3 et S_9, sont [5]:

$$x^{\alpha'} = t^{\alpha'}_{\beta} x^{\beta}, \tag{1.1}$$

$$a_{\alpha\beta} = t^{\lambda'}_{\alpha} t^{\mu'}_{\beta} a_{\lambda'\mu'}\ ;\ A^{\alpha\beta} = t^{\alpha}_{\lambda'} t^{\beta}_{\mu'} A^{\lambda'\mu'}. \tag{1.1'}$$

Les équations de mouvement des repères en P_3 et S_9 sont [5]:

$$dA_\alpha = \omega^\beta_\alpha A_\beta, \tag{1.2}$$

$$dA^{\lambda\mu} = -\omega^\lambda_\alpha A^{\alpha\mu} - \omega^\mu_\beta A^{\beta\lambda}, \tag{1.2'}$$

les pfaffiens ω^β_α satisfaisant aux équations de structure:

(*) $$d\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\lambda, \omega_\lambda^\beta].$$

En attachant à chaque point d'un domaine à trois dimensions de P_3, un cône quadratique ayant le sommet en ce point, on obtient une variété à trois dimensions V, c'est-à-dire un complexe de cônes quadratiques.

Afin de déterminer le repère canonique de la variété, nous utilisons la méthode du repère mobile de Cartan appliquée à la variété V et à son image de S_9, la variété à trois dimensions $\bar{V}$ ($\bar{V}$ est située sur une hypersurface ayant la dimension 8 et le degré 4 de S_9).

Les repères d'ordre zéro seront choisis par des considérations géométriques: A_0 — au sommet du cône local C, A_0A_1, A_0A_2 et A_0U sur trois génératrices du cône C et A_0A_3 sur la droite d'intersection des plans tangents au cône C le long de A_0A_1 et A_0A_2. L'équation du cône C, rapporté à ces repères, est:

(1.3) $$C \equiv x^1x^2 - (x^3)^2 = 0.$$

A ces repères correspondent, en S_9, les repères d'ordre zéro qui maintiennent fixe le point

(1.3') $$\bar{C} = A^{12} - A^{33},$$

l'image du cône C (1.3). De la condition de fixité du point $\bar{C}$, il résulte huit pfaffiens principaux d'ordre zéro

(1.4) $$\omega_0^1,\ \omega_0^2,\ \omega_0^3,\ \omega_1^2,\ \omega_2^1,\ 2\omega_1^3 - \omega_3^2,\ 2\omega_2^3 - \omega_3^1,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3.$$

En supposant $[\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3] \neq 0$, nous exprimons, en fonction de $\omega_0^k (k = 1, 2, 3)$, les autres cinq pfaffiens principaux d'ordre zéro par les relations

(1.5) $$\omega_1^2 = \alpha_i\omega_0^i,\ \omega_2^1 = \beta_i\omega_0^i,\ 2\omega_1^3 - \omega_3^2 = \gamma_i\omega_0^i,$$
$$2\omega_2^3 - \omega_3^1 = \varepsilon_i\omega_0^i,\ \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_3^3 = \eta_i\omega_0^i,\ (i = 1, 2, 3).$$

On introduit ainsi 15 coefficients, fonctions des paramètres principaux (u_1, u_2, u_3) de la variété et des sept paramètres secondaires. Par différentiation extérieure des relations (1.5) on obtient un système de Pfaff à 15 équations. Les sept paramètres secondaires peuvent être fixés en donnant aux coefficients les valeurs suivantes: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = \gamma_2 = 0$, $\varepsilon_3 = 1$, $\eta_1 = 8$. Ainsi, le repère canonique est déterminé: il est un repère du premier ordre. Voici les sept pfaffiens principaux du premier ordre:

(1.6) $$\omega_1^0,\ \omega_2^0,\ \omega_3^0,\ \omega_1^3,\ \omega_2^3,\ \omega_0^0 - \omega_1^1,\ \omega_0^0 - \omega_2^2.$$

Mentionnons deux cas d'exception, analogues à ceux de [8]: après avoir donné la valeur zéro à cinq coefficients, si les autres dix coefficients ou au moins neuf coefficients sont nuls, le repère ne peut être fixé.

En considérant seulement le cas générique, nous avons supposé deux coefficients non nuls.

Nous notons maintenant les huit coefficients qui n'ont pas reçu des valeurs — les invariants du premier ordre:

(1.7) $$\alpha_3 = \tau_1,\ \beta_3 = \tau_2,\ \gamma_1 = \tau_3,\ \gamma_3 = \tau_4,\ \varepsilon_1 = \tau_5,\ \varepsilon_2 = \tau_6,$$
$$\eta_2 = 8\tau_7,\quad \eta_3 = 8\tau_8$$

et nous exprimons les pfaffiens (1.6) en fonction de $\omega_0^k (k = 1, 2, 3)$. Sont introduites ainsi 21 fonctions, les invariants du II-e ordre, de manière qu'il y a en tout 29 invariants.

A l'aide des équations de structure (*) nous établissons les conditions d'intégrabilité. Deux conditions qui sont finies

$$\tau_9 - \tau_1(\tau_{19} - \tau_{21}) + \tau_3\tau_{19} = 0,$$
$$\tau_{13} + \tau_2(\tau_{19} - \tau_{21}) + \tau_6\tau_{21} - \tau_5\tau_{22} = 0$$

montrent que le nombre des invariants indépendants est au plus 27; nous faisons la renotation des invariants: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{27}$.

Nous donnons maintenant, avec la nouvelle notation, les formules de Frenet des variétés $\bar{V}$ et V, de S_9 et de P_3 et les conditions d'intégrabilité. Voici deux des formules de la variété $\bar{V}$ de S_9:

(1.8) $$\begin{cases} dA^{12} = -\omega_0^2A^{01} - \omega_0^1A^{02} - \tau_1\omega_0^3A^{11} + 2[(\tau_{22} + \tau_{25} - 1)\omega_0^1 + \\ \quad + (\tau_{23} + \tau_{26} - \tau_7)\omega_0^2 + (\tau_{24} + \tau_{27} - \tau_8)\omega_0^3]A^{12} + \\ \quad + [(\tau_3 - 2\tau_{16})\omega_0^1 - 2\tau_{17}\omega_0^2 + (\tau_4 - 2\tau_{18})\omega_0^3]A^{13} - \\ \quad - \tau_2\omega_0^3A^{22} + [(\tau_5 - 2\tau_{19})\omega_0^1 + (\tau_6 - 2\tau_{20})\omega_0^2 + \\ \quad + (1 - 2\tau_{21})\omega_0^3]A^{23}, \\ dA^{33} = -2\{\omega_0^3A^{03} + (\tau_{16}\omega_0^1 + \tau_{17}\omega_0^2 + \tau_{18}\omega_0^3)A^{13} + (\tau_{19}\omega_0^1 + \\ \quad + \tau_{20}\omega_0^2 + \tau_{21}\omega_0^3)A^{23} + [(\tau_{22} + \tau_{25} + 3)\omega_0^1 + (\tau_{23} + \tau_{26} + \\ \quad + 3\tau_7)\omega_0^2 + (\tau_{24} + \tau_{27} + 3\tau_8)\omega_0^3]A^{33}\}, \end{cases}$$

les quatre formules de la variété V de P_3:

$$
(1.9)\quad \begin{cases}
dA_0 = [(3\tau_{22} + 3\tau_{25} + 1)\,\omega_0^1 + (3\tau_{23} + 3\tau_{26} + \tau_7)\,\omega_0^2 + (3\tau_{24} + \\
\quad + 3\tau_{27} + \tau_8)\,\omega_0^3]\,A_0 + \omega_0^1 A_1 + \omega_0^2 A_2 + \omega_0^3 A_3, \\
dA_1 = [(\tau_1\tau_{17} - \tau_3\tau_{17} - \tau_1\tau_{19})\,\omega_0^1 + \tau_9\,\omega_0^2 + \tau_{10}\,\omega_0^3]\,A_0 + [(-5\tau_{22} + \\
\quad + 3\tau_{25} + 1)\,\omega_0^1 + (\tau_7 - 5\tau_{23} + 3\tau_{26})\,\omega_0^2 + (\tau_8 - 5\tau_{24} + \\
\quad 3\tau_{27})\,\omega_0^3]\,A_1 + \tau_1\,\omega_0^3 A_2 + (\tau_{16}\,\omega_0^1 + \tau_{17}\,\omega_0^2 + \tau_{18}\,\omega_0^3)\,A_3, \\
dA_2 = [\tau_{11}\,\omega_0^1 + (-\tau_2\tau_{17} + \tau_2\tau_{19} + \tau_5\tau_{20} - \tau_6\tau_{19})\,\omega_0^2 + \\
\quad \tau_{12}\,\omega_0^3]\,A_0 + \tau_2\,\omega_0^3 A_1 + [(3\tau_{22} - 5\tau_{25} + 1)\,\omega_0^1 + (3\tau_{23} - 5\tau_{26} + \\
\quad \tau_7)\,\omega_0^2 + (\tau_8 + 3\tau_{24} - 5\tau_{27})\,\omega_0^3]\,A_2 + (\tau_{19}\,\omega_0^1 + \tau_{20}\,\omega_0^2 + \tau_{21}\,\omega_0^3)\,A_3, \\
dA_3 = (\tau_{13}\,\omega_0^1 + \tau_{14}\,\omega_0^2 + \tau_{15}\,\omega_0^3)\,A_0 + [(2\tau_{19} - \tau_5)\,\omega_0^1 + 2\tau_{20} - \tau_6)\,\omega_0^2 + \\
\quad + (2\tau_{21} - 1)\,\omega_0^3]\,A_1 + [(2\tau_{16} - \tau_3)\,\omega_0^1 + 2\tau_{17}\,\omega_0^2 + (2\tau_{18} - \tau_4)\,\omega_0^3]\,A_2 + \\
\quad [(-\tau_{22} - \tau_{25} - 3)\,\omega_0^1 + (-\tau_{23} - \tau_{26} - 3\tau_7)\,\omega_0^2 + (-\tau_{24} - \\
\quad - \tau_{27} - 3\tau_8)\,\omega_0^3]\,A_3
\end{cases}
$$

et quelques-unes des 37 conditions d'intégrabilité:

$$
\begin{cases}
d\omega_0^1 = -8\tau_{23}[\omega_0^1, \omega_0^2] + (\tau_2 + \tau_5 - 2\tau_{19} - 8\tau_{24})[\omega_0^1, \omega_0^3] + \\
\quad (\tau_6 - 2\tau_{20})[\omega_0^2, \omega_0^3], \\
d\omega_0^2 = 8\tau_{25}[\omega_0^1, \omega_0^2] + (\tau_1 + \tau_3 - 2\tau_{16})[\omega_0^1, \omega_0^3] - (2\tau_{17} + \\
\quad + 8\tau_{27})[\omega_0^2, \omega_0^3], \\
d\omega_0^3 = (\tau_{17} - \tau_{19})[\omega_0^1, \omega_0^2] + (\tau_{18} + 4\tau_{22} + 4\tau_{25} + 4)[\omega_0^1, \omega_0^3] + \\
\quad + (4\tau_7 + \tau_{21} + 4\tau_{23} + 4\tau_{26})[\omega_0^2, \omega_0^3], \\
\tau_{1,1} + \tau_1(\tau_{18} + 6\tau_{22} + 6\tau_{25} + 2) + \tau_4\tau_{16} - \tau_3\tau_{18} = 0, \\
\tau_{1,2} + \tau_1(2\tau_7 + \tau_{21} + 6\tau_{23} + 6\tau_{26}) + \tau_{10} + \tau_4\tau_{17} = 0, \\
\tau_{2,1} + \tau_2(\tau_{18} - 4\tau_{22} + 12\tau_{25} + 4) - \tau_{19} - \tau_5\tau_{21} = 0, \\
\tau_{2,2} + \tau_2(4\tau_7 + \tau_{21} - 4\tau_{23} + 12\tau_{26}) + \tau_{20} - \tau_6\tau_{21} = 0, \\
\tau_{17,1} - \tau_{16,2} + \tau_{16}(-12\tau_{23} + 4\tau_{26} + 4\tau_7) + \tau_{17}(4\tau_{22} + 4\tau_{25} - \\
\quad -4) + \tau_{18}(\tau_{17} - \tau_{19}) = 0,
\end{cases}
$$

$$
(1.10)\quad \begin{cases}
5\tau_{22,2} - 3\tau_{25,2} - 5\tau_{23,1} + 3\tau_{26,1} + \tau_{7,1} - 8\tau_{23}(-5\tau_{22} + \\
\quad + 3\tau_{25} + 1) + 8\tau_{25}(-5\tau_{23} + 3\tau_{26} + \tau_7) + (\tau_{17} - \\
\quad - \tau_{19})(-5\tau_{24} + 3\tau_{27} + \tau_8) + \tau_9 - \tau_{16}(2\tau_{20} - \tau_6) + \\
\quad \tau_{17}(2\tau_{19} - \tau_5) = 0, \\
5\tau_{23,3} - 3\tau_{26,3} - \tau_{7,3} - 5\tau_{24,2} + \tau_{27,2} + \tau_{8,2} + (-5\tau_{22} + \\
\quad 3\tau_{25} + 1)(\tau_6 - 2\tau_{20}) + (5\tau_{23} - 3\tau_{26} - \tau_7)(2\tau_{17} + \\
\quad + 8\tau_{27}) + (\tau_{18} + 4\tau_{22} + 4\tau_{25} + 4)(4\tau_7 + \tau_{21} + 4\tau_{23} + \\
\quad 4\tau_{26}) + \tau_7(1 - 2\tau_{21}) + \tau_{18}(2\tau_{20} - \tau_6) = 0.
\end{cases}
$$

On a ainsi, les théorèmes fondamentaux pour les variétés $\bar{V}$ et V. En voici le dernier:

Étant données trois formes de Pfaff ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3, *à trois variables,* u_1, u_2, u_3, *et 27 fonctions régulières* $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{27}$ *des mêmes variables qui satisfont aux conditions* (1.10), *il y a dans l'espace projectif* P_3 *un complexe* V *de cônes quadratiques, défini à une transformation projective près, dont les formes invariantes et les invariants sont justement les pfaffiens et les fonctions données.*

2. *Interprétations géométriques.* Si x, y, z sont les coordonnées non homogènes relatives d'un point A' situé dans le voisinage du premier ordre différentiel du point A_0, alors de la relation $A' \approx A_0 + dA_0 = A_0 + \omega_0^\alpha A_\alpha$, il résulte

$$x \approx \omega_0^1,\ y \approx \omega_0^2,\ z \approx \omega_0^3,$$

c'est-à-dire $\omega_0^k (k = 1, 2, 3)$ sont les parties principales des coordonnées x, y, z d'un point A' voisin à A_0.

Soient les courbes $\Gamma_k (k = 1, 2, 3)$ passant par A_0 et par un point voisin A' situé sur l'arête $A_0 A_k$. Les équations de ces courbes sont

$$(2.1)\qquad (\Gamma_k): \omega^i = \omega^j = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq k \neq i).$$

De la relation (1.9_1) il résulte que les arêtes $A_0 A_k$ sont tangentes aux courbes Γ_k.

Soit encore la variété linéaire Φ, à trois dimensions, tangente à la variété $\bar{V}$ de S_9 au point $\bar{C}$. Son image en P_3 est une famille linéaire Φ de quadriques, que nous nommons „tangente" à la variété V au cône C. Avec les formules (1.8) nous calculons $d\bar{C}$, et à son aide, nous écrivons l'équation de Φ:

$$\Phi \equiv \lambda_0 [x^1 x^2 - (x^3)^2] + \lambda_1 [8 (x^3)^2 - \tau_3 x^1 x^3 - \tau_5 x^2 x^3 + x^2 x^0] + \lambda_2 [8\tau_7 (x^3)^2 - \tau_6 x^2 x^3 + x^1 x^0] + \lambda_3 [\tau_1 (x^1)^2 + \tau_2 (x^2)^2 + 8\tau_8 (x^3)^2 - \tau_4 x^1 x^3 - x^2 x^3 - 2x^3 x^0] = 0 \tag{2.2}$$

ou, symboliquement :

$$\Phi \equiv \lambda_0 C + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i Q_i = 0. \tag{2.2'}$$

Considérons encore trois faisceaux de quadriques

$$F_i \equiv \lambda_0 C + \lambda_i Q_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.3}$$

qui correspondent aux tangentes des courbes $\overline{T}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ de S_9 dont les équations sont

$$(\overline{T}_i) \equiv \omega_0^j = \omega_0^k = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3;\ i \neq j \neq k \neq i). \tag{2.4}$$

Le réseau Φ et les faisceaux F_i fourniront des interprétations pour les sommets et les arêtes du repère.

Le sommet A_1 est l'un des points d'intersection de $A_0 A_1$ avec les quadriques du faisceau F_2 (2.3) et A_2 est l'un des points d'intersection de $A_0 A_2$ avec les quadriques du faisceau F_1. Les plans tangents en A_1 aux quadriques du faisceau F_2 forment le faisceau

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_2 x^0 = 0,$$

dont l'axe est $A_1 A_3$. L'arête $A_1 A_3$ coupe $A_0 A_3$ en A_3.

Observons encore que toutes les quadriques de la famille (2.2) passent par A_0, que $A_0 A_1$ et $A_0 A_2$ sont situés sur les quadriques du faisceau F_1 respectivement F_2 et sont tangentes en A_0 aux quadriques du faisceau F_3, que $A_0 A_3$ est tangente en A_0 aux quadriques des faisceaux F_1 et F_2.

D'autres interprétations dérivent en considérant le point adjoint de Voss, le parallélisme Myller et la déviation du parallélisme Myller, avec les significations attribuées à ces notions pour l'espace projectif en [2]:

Quelques points adjoints de Voss offrent des interprétations pour cinq invariants (voir tableau (2,5)).

Quelques déviations du parallélisme Myller donnent des interprétations pour d'autres cinq invariants (voir tableau (2,6)).

Signalons encore les faits suivants : les arêtes $A_0 A_1$ et $A_0 A_2$ sont parallèles au sens de Myller par rapport à $A_0 A_3$ à un déplacement de A_0 le long de la courbe Γ_1 ou Γ_2. Vu que les plans $A_0 A_1 A_3$ et $A_0 A_2 A_3$ sont tangents au cône C, il résulte d'ici que Γ_1 et Γ_2 sont des lignes asymptotiques sur la variété V.

En considérant $A_0 A_2$ comme la normale projective à la variété V ($A_0 A_1 A_3$ étant un plan tangent à V), il suit [2] que τ_{16} et τ_{19} sont la courbure géodésique, respectivement la torsion géodésique des courbes

(2.5)

Le point adjoint de Voss	de l'arête	par rapport à l'arête	à un déplacement de A_0 le long de la courbe
A_1	$A_0 A_1$	$A_0 A_3$	Γ_2
A_2	$A_0 A_2$	$A_0 A_3$	Γ_1
$P_1 \equiv A_1 - \tau_{18} A_0$	$A_0 A_1$	$A_0 A_2$	Γ_3
$P_2 = A_2 - \tau_{21} A_0$	$A_0 A_2$	$A_0 A_1$	Γ_3
$P_3 = A_3 - 2\tau_{17} A_0$	$A_0 A_3$	$A_0 A_1$	Γ_2
$P_4 = A_3 + (\tau_5 - 2\tau_{19}) A_0$	$A_0 A_3$	$A_0 A_2$	Γ_1

(2.6)

A un déplacement de A_0 le long de la courbe	La déviation du parallélisme Myller			
	de l'arête	par rapport à l'arête		
		$A_0 A_1$	$A_0 A_2$	$A_0 A_3$
Γ_1	$A_0 A_1$	—	τ_{16}	0
	$A_0 A_2$	$-\tau_{19}$	—	0
	$A_0 A_3$	$2\tau_{16} - \tau_3$	$\tau_5 - 2\tau_{19}$	—
Γ_2	$A_0 A_1$	—	τ_{17}	0
	$A_0 A_2$	τ_{20}	—	0
	$A_0 A_3$	$2\tau_{17}$	$\tau_6 - 2\tau_{20}$	—
Γ_3	$A_0 A_1$	—	τ_{18}	τ_1
	$A_0 A_2$	τ_{21}	—	τ_2
	$A_0 A_3$	$2\tau_{18} - \tau_4$	$1 - 2\tau_{21}$	—

Γ_1 ; si $\tau_{16} = 0$ respectivement $\tau_{19} = 0$, Γ_1 sont des lignes géodésiques, respectivement des lignes de courbure de deuxième espèce sur V. En considérant $A_0 A_1$ comme normale projective ($A_0 A_2 A_3$ étant un plan tangent à V) on obtient des résultats analogues pour τ_{20}, τ_{17} et les courbes Γ_2.

De la même manière, en notant par $\varkappa_{pij}$ la courbure de parallélisme de la direction $A_0 A_i$ par rapport à $A_0 A_j$, il résulte de (2.6) :

$$\tau_{17} = \varkappa_{p12};\ -\tau_{19} = \varkappa_{p21};\ \tau_2 = \varkappa_{p23};$$

$$\tau_6 - 2\tau_{20} = \varkappa_{p32};\ \tau_1 = \varkappa_{p13};\ 2\tau_{16} - \tau_3 = \varkappa_{p31}.$$

Les équations des droites caractéristiques des plans $x^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ à un déplacement de A_0 le long d'une courbe quelconque Γ étant:

$$
(2.7)\quad \begin{cases}
i = 1: \omega_0^1 x^0 + \tau_2 \omega_0^3 x^2 + [(2\tau_{19} - \tau_5)\,\omega_0^1 + (2\tau_{20} - \tau_6)\,\omega_0^2 + \\
\qquad + (2\tau_{21} - 1)\,\omega_0^3]\,x^3 = 0, \\
i = 2: \omega_0^2 x^0 + \tau_1 \omega_0^3 x^1 + [(2\tau_{16} - \tau_3)\,\omega_0^1 + 2\tau_{17}\,\omega_0^2 + (2\tau_{18} - \\
\qquad - \tau_4)\,\omega_0^3]\,x^3 = 0, \\
i = 3: \omega_0^3 x^0 + (\tau_{16}\,\omega_0^1 + \tau_{17}\,\omega_0^2 + \tau_{18}\,\omega_0^3)\,x^1 + (\tau_{19}\,\omega_0^1 + \\
\qquad \tau_{20}\,\omega_0^2 + \tau_{21}\,\omega_0^3)\,x^3 = 0,
\end{cases}
$$

les droites caractéristiques résultent immédiatement de ces plans à un déplacement de A_0 le long d'une des courbes Γ_k $(k = 1, 2, 3)$.

En particulier, $A_0 A_2$ et $A_0 A_1$ sont les droites caractéristiques des plans $x^1 = 0$, respectivement $x^2 = 0$, lorsque A_0 se déplace sur Γ_2 respectivement Γ_1.

Quelques autres observations relatives aux faisceaux $F_i(2, 3)$ et à la famille Φ (2.2):

Les points doubles des involutions déterminées par les quadriques du faisceau F_3 sur les arêtes $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, $A_1 A_3$:

$$
(2.8)\quad \begin{aligned}
&P_{5,6}(\sqrt{\tau_2},\ \pm\sqrt{\tau_1},\ 0, 0), \\
&P_7(0,\ 1,\ 2\tau_2,\ 0), \\
&P_8(\tau_4,\ 0,\ 2\tau_1,\ 0)
\end{aligned}
$$

offrent d'autres interprétations à trois invariants.

Soit le réseau de quadriques

$$
(2.9)\qquad R \equiv \lambda_0 C + \lambda_1 Q_1 + \lambda_3 Q_3 = 0,
$$

extrait de la famille Φ (2.2). Nous le coupons avec le plan $x^1 = 0$ et nous déterminons, dans le réseau de coniques obtenues, le faisceau de coniques dégénérées. Le lieu géométrique des points doubles des coniques de ce faisceau est la conique

$$
(2.10)\qquad 2\tau_2 (x^2)^2 - 2\tau_5 (x^3)^2 - x^2 x^3 + 2x^3 x^0 = 0.
$$

La polaire de A_3 par rapport à cette conique coupe $A_0 A_3$ au point

$$
(2.11)\qquad P_9(0,\ 0,\ 1,\ 2\tau_5)
$$

ce qui donne une autre interprétation à τ_5.

3. Autres considérations géométriques. Afin d'obtenir de nouvelles interprétations, nous associons à la variété V, les variétés non

holonomes linéaires V_{3i}^2 $(i = 1, 2, 3)$, ayant pour éléments de base le point A_0 et les plans $x^i = 0$ qui contiennent A_0. Les équations de ces variétés sont

$$
(3.1)\qquad \omega_0^i = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 3).
$$

Soient les variétés V_{31}^2, un point $A'(\bar{x}^0, \bar{x}^2, \bar{x}^3)$ voisin à A_0, situé dans le plan tangent $x^1 = 0$, la droite $(D) \equiv A_0 A'$ et la droite caractéristique (Δ) (2.7) du plan $x^1 = 0$ dans le déplacement déterminé par (Δ). Les deux droites, (D) et (Δ) passent par A_0. La polarité Pantazi-Bompiani [2, 4] induit dans le faisceau de droites ayant le centre A_0 et situées dans le plan $x^1 = 0$, une projectivité. Nous établissons les équations de cette projectivité et ses droites unies (qui sont aussi les tangentes asymptotiques de V_{31}^2) au cas de l'homographie générale, de l'homographie parabolique et de l'involution. Nous faisons les mêmes considérations en ce qui concerne les variétés V_{32}^2 et V_{33}^2. Nous obtenons aussi les conditions d'holonomie des variétés V_{3i}^2. Les résultats qui apportent de nouvelles interprétations pour quelques-uns des invariants sont compris dans le tableau suivant:

(3.2)

La variété non holonome	La condition d'holonomie	Les équations de la projectivité	Les droites unies de la projectivité		
			L'homographie générale	L'homographie parabolique	L'homographie involutive
V_{31}^2	$\tau_2 + \tau_6 - 2\tau_{10} = 0$	$\eta u_2 = \tau_2 \bar{x}^3$ $\eta u_3 = (2\tau_{20} - \tau_6)\,\bar{x}^2 + (2\tau_{21} - 1)\,\bar{x}^3$	$x^1 = x^3 = 0$ $(\tau_2 - \tau_6 + 2\tau_{20})x^2 + (2\tau_{21} - 1)\,x^3 = x^1 = 0$	$x^1 = x^3 = 0$	$x^1 = x^3 = 0$ $2\tau_2 x^2 + (2\tau_{21} - 1)\,x^3 = x^1 = 0$
V_{32}^2	$\tau_1 + \tau_3 - 2\tau_{16} = 0$	$\eta u_1 = \tau_1 \bar{x}^3$ $\eta u_3 = (2\tau_{16} - \tau_3)\,\bar{x}^1 + (2\tau_{18} - \tau_4)\,\bar{x}^3$	$x^2 = x^3 = 0$ $(\tau_1 - \tau_3 + 2\tau_{16})x^1 + (+2\tau_{18} - \tau_4)x^3 = x^2 = 0$	$x^2 = x^3 = 0$	$x^2 = x^3 = 0$ $2\tau_1 x^1 + (2\tau_{18} - \tau_4)\,x^3 = x^2 = 0$
V_{33}^2	$\tau_{17} - \tau_{19} = 0$	$\eta u_1 = \tau_{16} \bar{x}^1 + \tau_{17} \bar{x}^2$ $\eta u_2 = \tau_{19} \bar{x}^1 + \tau_{20} \bar{x}^2$	$\tau_{16}(x^1)^2 + (\tau_{17} + \tau_{19})\,x^1 x^2 + \tau_{20}(x^2)^2 = 0$	$\sqrt{\tau_{16}}\,x^1 + \sqrt{\tau_{20}}\,x^2 = x^3 = 0$	$\tau_{16} x^1 + (\tau_{17} \pm \sqrt{\tau_{17}^2 - \tau_{16}\tau_{20}})x^2 = x^3 = 0$

On retrouve la condition connue [4] que si les conditions d'holonomie sont satisfaites, l'homographie devient involutive. En ce cas nous considérons aussi les surfaces $\Sigma_i (i = 1, 2, 3)$ tangentes aux variétés V^2_{3i}; alors les droites unies de l'involution sont aussi les tangentes asymptotiques des surfaces Σ_i, tandis que les équations des lignes asymptotiques des surfaces Σ_i sont:

$$
\begin{aligned}
&i = 1 : \omega^1_0 = \omega^3_0 = 0 ;\ 2\tau_2 \omega^2_0 + (2\tau_{21} - 1)\,\omega^3_0 = \omega^1_0 = 0,\\
(3.3)\qquad &i = 2 : \omega^2_0 = \omega^3_0 = 0 ;\ 2\tau_1 \omega^1_0 + (2\tau_{18} - \tau_4)\,\omega^3_0 = \omega^2_0 = 0,\\
&i = 3 : \omega^3_0 = \tau_{16}\,\omega^1_0 + (\tau_{17} \pm \sqrt{\tau^2_{17} - \tau_{16}\tau_{20}})\,\omega^2_0 = 0 .
\end{aligned}
$$

Nous considérons aussi les variétés non holonomes linéaires V^1_3 ayant pour éléments de base les droites $A_0 A_1$ et $A_0 A_2$ — les tangentes asymptotiques des variétés non holonomes linéaires V^2_{32}. Lorsque A_0 décrit une courbe arbitraire, $A_0 A_1$ et $A_0 A_2$ engendrent deux surfaces réglées. Les conditions que ces surfaces soient développables donnent les relations focales de ces deux variétés V^1_3:

$$
\begin{aligned}
&A_0 A_1 : \omega^2_0 x^0 + \omega^2_1 x^1 = 0, \quad \omega^3_0 x^0 + \omega^3_1 x^1 = 0,\\
(3.4)\qquad &A_0 A_2 : \omega^1_0 x^0 + \omega^1_2 x^2 = 0, \quad \omega^3_0 x^0 + \omega^3_2 x^2 = 0 .
\end{aligned}
$$

Compte tenu des formules (1.9) et en éliminant x^0, x^1, x^2 de (3.4), nous obtenons les équations des courbes focales des deux variétés V^1_3. Les tangentes en A_0 aux courbes focales forment les cônes de Malus associés au point A_0 par les variétés V^1_3 considérées:

$$
\begin{aligned}
&M_1 \equiv \tau_{17} (x^2)^2 + \tau_{16} x^1 x^2 + \tau_{18} x^2 x^3 - \tau_1 (x^3)^2 = 0,\\
(3.5)\qquad &M_2 \equiv \tau_{19} (x^1)^2 + \tau_{20} x^1 x^2 + \tau_{21} x^1 x^3 - \tau_2 (x^3)^2 = 0 .
\end{aligned}
$$

Ces cônes sont tangents aux plans tangents $x^2 = 0$, respectivement $x^1 = 0$, le long des tangentes asymptotiques $A_0 A_1$, $A_0 A_2$ respectivement. De même ils sont tangents au cône C le long de $A_0 A_1$, $A_0 A_2$ respectivement. Il suit que, par les cônes de Malus, on associe au complexe V de cônes quadratiques, d'autres deux complexes de cônes quadratiques, ainsi qu'à chaque point du domaine considéré de P_3 sont attachés trois cônes du deuxième ordre: C, M_1, M_2, ayant les sommets en ce point, les cônes M_1 et M_2 étant tangents au cône C suivant deux droites: $A_0 A_1$ respectivement $A_0 A_2$.

La configuration formée par ce triplet de cônes quadratiques mérite une étude spéciale.

BIBLIOGRAPHIE

1. Gheorghiev Gh. et Popa I. — *Géométrie projective différentielle des variétés de cônes* (I, II). C. R. Acad. Sci. Pari , T. 251 (1960), pp. 1208—1210; 1268—1269.
2. Георгиев Г. и Попа И. — *Проективно-дифференциальная геотерия многообразий конусов.* Известия на мат. институт Бълг. Акад. на науките, Т. V (1961), стр. 83—99.
3. Георгиев Г. — *Дифференциальная геометрия многообразий конусов в трехмерном пространстве.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. VIII (1962), p. 353—367.
4. Mihăilescu Tiberiu — *Geometrie diferenţială proiectivă.* Bucureşti, 1958.
5. Rimer D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques, dans l'espace projectif à trois dimensions.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, t. XII (1966), p. 377—403.
6. Rimer D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace équiaffine à trois dimensions.* Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. Roumanie, t. 9 (57) (1965), p. 211—225.
7. Rimer D. — *Varietăţi uniparametrice de conuri pătratice in* E_3 Analele Universităţii din Timişoara, t. (1967), sub tipar.
8. Rimer D. — *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif et équiaffine à trois dimensions.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I, XIII (1967), pp.
9. Ţiţeica Gh. — *Geometrie diferenţială proiectivă a reţelelor.* Ed. Acad. R. S. România Bucureşti 1956.

GEOMETRIA DIFERENŢIALĂ A COMPLEXELOR DE CONURI PĂTRATICE ÎN SPAŢIUL PROIECTIV CU TREI DIMENSIUNI

Rezumat

Se consideră o varietate tridimensională V de conuri pătratice în P_3 şi imaginea sa $\bar{V}$ dintr-un spaţiu proiectiv cu 9 dimensiuni S_9. Se determină reperul canonic al varietăţii V şi al imaginii sale $\bar{V}$ cu ajutorul metodei reperului mobil a lui Cartan, se dau formulele lui Frenet (1. 9), (1.8) şi se enunţă teorema fundamentală. Se dau apoi interpretări geometrice elementelor reperului şi unor invarianţi, folosind reţeaua (2.2) tangentă la V în P_3, fasciculele (2.3) extrase din această reţea, punctul adjunct a lui Voss (2.5), abaterea de la paralelismul Myller (2.6) ş.a.

De asemenea se asociază varietăţii V, varietăţile neolonome liniare V^2_3 şi V^1_3 avînd drept elemente de bază punctul A_0 şi planele $x^i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, respectiv dreptele $A_0 A_1$ şi $A_0 A_2$, se cercetează proiectivitatea indusă prin polaritatea Pantazi-Bompiani (3.2), şi se găsesc curbele focale ale varietăţilor V^1_3 precum şi conurile Malus asociate punctului A_0 (3.5).