SUR UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION DE VOLTERRA*

PAR

SENDER SOLOMON

§ 1. Soit E un espace de Banach. Soient X un espace topologique et μ une mesure positive définie sur un σ-anneau I de parties de X.**) Nous supposons que tot compact est μ-mesurable. Soit $P : x \to P_x$ une application de X dans I telle que :

1.1 L'adhérence de P_x est compacte et sommable.

1.2 $\lim\limits_{y \to x} \mu(P_x \Delta P_y) = 0$ (Δ étant la différence symétrique).

Soit $C = C(X : E)$ l'espace des fonctions continues $u : X \to E$. Soient $u_0 \in C$ et f une fonction continue de $X \times X \times E$ dans E. On considère l'opérateur $A : C \to C$.

1.3 $(Au)(x) = u_0(x) + \int\limits_{P_x} f(x, y, u(y))dy$ (l'intégrale de Bochner; $dy = d\mu(y)$)

Remarque 1. Un opérateur similaire a été consideré par A. Haimovici. [3, 4]. Un de ses résultats est le suivant :

Soient $X = R^n$, $E = R$ et f bornée ; alors il y a un point fixe de l'opérateur A (v. [3]).

Remarque 2. Une fonction continue $u : K \to E$ (K un compact sommable de X) est Bochner sommable sur K. Voici une démonstration directe très simple qui sera utile plus tard.

La fonction continue u est uniformément continue pour la structure uniforme du compact K. Donc, pour tout nombre positif ε, il existe un entourage V, fermé dans $K \times K$, tel que

$$|u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad (x, y) \in V.$$

*) Les résultats principaux ont été publiés dans les C.R. Acad. Sci. Paris, T. 267, pp. 264–266, 1968.

**) La terminologie est celle de Bourbaki [2] et celle de Zaanen [7].

K étant compact on trouve un ensemble fini $\{x : x_i ; 1 \leqq i \leqq p\} \subset K$ tel que

$$K = \bigcup_i V(x_i) \text{ où } V(x_i) = \{x ; (x_i, x) \in V\}.$$

V étant fermé dans $K \times K$, $V(x_i)$ est fermé dans K donc compact et sommable. Les ensembles

$$A_1 = V(x_1),\ A_2 = V(x_2) - V(x_1),\ \ldots,\ A_p = V(x_p) - \bigcup_{i=1}^{p-1} V(x_i)$$

sont sommables et (A_i) est une partition de l'ensemble K. Soit la fonction étagée h de X dans E :

$$h(x) = \sum_i u(x_i)\chi_{A_i}(x).$$

Si $x \notin K$ alors $h(x) = 0$. Si $x \in K$, il existe i tel que $x \in A_i$ et $x \notin A_k$ pour $k \neq i$. Donc

$$|u(x) - h(x)| = |u(x) - u(x_i)| < \varepsilon,$$

car $x \in V(x_i)$. Alors il existe une suite de fonctions étagées uniformément convergente vers la fonction u, prolongée par zéro en dehors de K. La sommabilité de la fonction u sur K est démontrée.

Remarque 3. L'espace C muni de la topologie de la convergence compacte est un espace vectoriel topologique localement convexe défini par la famille des seminormes

$$|u_K| = \sup_{x \in K} |u(x)|,\ K \text{ étant un compact de } X.$$

Dans le §2 on suppose que l'espace C est muni de cette structure.

§ 2. Lemme I. *Soient X un espace topologique, Y un espace quasicompact, Z un espace uniforme et g une application continue de $X \times Y$ dans Z. Alors l'ensemble des applications de la forme $x \to g(x, y)$ pour $y \in Y$ est équicontinu.*

Démonstration. Pour tout entourage U de Z et pour tout couple $(x, y) \in X \times Y$ il existe un voisinage $V_{x,y}$ de x dans X et un voisinage $W_{x,y}$ de y dans Y tels que

(1) $$(g(\bar{x}, \bar{y}), g(x, y)) \in U \text{ pour } \bar{x} \in V_{x,y} \text{ et } \bar{y} \in W_{x,y}$$

L'ensemble de parties $\{W_{x,y} ; y \in Y\}$ contient un recouvrement fini de Y

$$\{W_{x,y_i} ; 1 \leqq i \leqq p\}.$$

$V_x = \bigcap_i V_{x,y_i}$ est un voisinage de x dans X. Soient $y \in Y$ et

(2) $$x \in V_x$$

Il existe un indice k tel que

(3) $$y \in W_{x,y_k}$$

La relation (2) implique

(4) $$\bar{x} \in V_{x,y_k}$$

D'après (1), (3) et (4) on a

$$(g(\bar{x}, y), g(x, y_k)) \in U \text{ et}$$
$$(g(x, y), g(x, y_k)) \in U.$$

En supposant que l'entourage U est symétrique on a

$$(g(\bar{x}, y), g(x, y)) \in U \text{ pour } \bar{x} \in V_x \text{ et } y \in Y.$$

Lemme II. *Soient X et Y des espaces compacts, Z un espace topologique séparé et g une application continue de $X \times Y$ dans Z. Alors l'ensemble des applications de X dans $g(X \times Y)$ de la forme $x \to g(x, y)$ pour $y \in Y$, est uniformément équicontinu.*

Démonstration. Les espaces X, Y et $g(X \times Y)$ sont, d'une manière unique uniformisables étant compacts et la conclusion est cohérente. L'application g de $X \times Y$ dans $g(X \times Y)$ est continue sur un compact donc uniformément continue et on applique la Proposition 2 de [2], ch. X, §2.

Théorème I. *Supposons les conditions :*

1) $\sup_{x \in X} |u_0(x)| = \alpha < \infty$;

2) $|f(x, y, z)| \leqq a(y)$ *où a est une fonction sommable de X dans R ;*

3) *La dimension de l'espace E est finie,*

Alors il existe un élément fixe de l'opérateur A.

Démonstration. Nous utiliserons le théorème de point fixe de Schauder-Thychonoff sous la forme donnée par Hukuhara (v. [5]). Soient $\beta = \int_X a(y)dy$ et $\gamma = \alpha + \beta$. Nous considérons la partie M de l'espace localement convexe C :

$$M = \{u ; \sup |u(x) - u_0(x)| \leqq \beta\}.$$

M est fermé et convexe. Montrons l'équicontinuité de $A(M)$. Soient un point x_0 de X et ε un nombre positif. L'ensemble des applications de la forme $x \to f(x, y, z)$ pour $y \in P_{x_0}$, $z \in E$, $|z| \leqq \gamma$ est équicontinu d'après le lemme I. Donc il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que

1) $$|f(x, y, u(y)) - f(x_0, y, u(y))| \leqq \frac{\varepsilon}{\mu(P_{x_0})} \text{ pour } x \in V,\ u \in M \text{ et } y \in P_{x_0}$$

D'autre part

$$|(Au)x_0 - (Au)x| \leqq |u_0(x_0) - u_0(x)| + \left|\int_{P_{x_0}} f(x_0, y, u(y))dy - \int_{P_{x_0}} f(x, y, u(y))dy\right| +$$

$$2) \qquad + \left|\int_{P_{x_0}} f(x, y, u(y))dy - \int_{P_x} f(x, y, u(y))dy\right| \leqq |u_0(x_0) - u_0(x)| +$$

$$+ \int_{P_{x_0}} |f(x_0, y, u(y)) - f(x, y, u(y))|\, dy + \int_{P_x \Delta P_{x_0}} |f(x, y, u(y))|\, dy.$$

D'après la relation (1) et l'hypothèse (2) l'ensemble des fonctions $A(M)$ est équicontinu et $|(Au)x| \leqq \gamma$. Par suite $A(M)$ est relativement compact dans C (v. [6] ou [2] ch. X, § 2 Cons. 1, Th. 2). De plus $A(M) \subset M$. Enfin montrons que l'application A de M dans M est continue. Il suffit de prouver que l'application A de M dans $A(M)$ est continue et nous utiliserons la topologie de la convergence simple de l'ensemble équicontinu $A(M)$ (v. [6] ou [2] ch. X, § 2, Cons., Th. 1).

Soient x_0 un point de X, ε un nombre positif et S la boule de centre zéro et de rayon γ de l'espace E. L'application de $P_{x_0} \times S$ dans E de la forme $(y, z) \to f(x_0, y, z)$ est continue et d'après le lemme II il existe un nombre positif η tel que

$$|f(x_0, y, u(y)) - f(x_0, y, u(y))| \leqq \frac{\varepsilon}{\mu(P_{x_0})}$$

$$\text{pour } u, v \in M, \ |u - v|_{P_{x_0}} < \eta \text{ et } y \in P_{x_0},$$

d'où il résulte la cotinuité de l'opérateur A et l'existence du point fixe.

Soit S la boule de centre z_0 et de rayon r dans l'espace de Banach E.

Théorème II. *Si*

1) *L'ensemble $f(X \times X \times S)$ est relativement compact,*

2) $u_0 = z_0 = C$-*te*,

3) $\mu(P_x) \leqq \min(r/\alpha, 1)$ où $\alpha = \sup_{X \times X \times S} |f(x, y, z)|$,

alors il existe un point fixe de l'opérateur A dans C.

Démonstration. Soient $K_1 = f(X \times X \times S)$ et $K = S \cap \{\overline{\text{co}}(K_1) + z_0\}$. Nous utiliserons le même théorème de Schauder-Tychonoff à la partie M de $C(X; E)$

$$M = \{u;\ u(X) \subset K\}.$$

M est un ensemble fermé et convexe. $A(M)$ est un ensemble équicontinu de fonctions (v. la démonstration du Th. I). Puis

$$|u(x) - z_0| \leqq \int_{P_x} |f(x, y, u(y))|\, dy \leqq \alpha\mu(P_x) \leqq r.$$

D'après la remarque 2 du § I on trouve une suite des partitions finies $(A_i)_n$ de P_x, $P_x = \bigcup_i A_i$, et une suite d'ensembles finis $\{y_i\}_n \subset X$ tels que

$$u(x) - z_0 = \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy = \lim_n \Sigma_i f(x, y_i, u(y_i))\, \mu(A_i \cap P_x) =$$

$$= \lim_n \mu(P_x) \Sigma_i f(x, y_i, u(y_i)) \frac{\mu(A_i \cap P_x)}{\mu(P_x)} \in \overline{\text{co}}(K_1).$$

C'est à dire $A(M) \subset M$. De plus $A(M)$ est relativement compact dans C. Il reste à prouver la continuité de l'opérateur $A : M \to A(M)$.

Lemme. *Soit g une fonction continue de $X \times E$ dans E. Alors l'opérateur $\tilde{g} : C \to C$ de la forme $(\tilde{g}u)(x) = g(x, u(x))$ est continu.*

(Il suffit de considérer X = compact et puis la démonstration est analogue à celle connue pour le cas X = intervalle compact de R.)

Par conséquent, étant donnés un nombre positif ε et un point $x_0 \in X$, il existe un nombre positif η tel que

$$|f(x_0, y, v(y)) - f(x_0, y, u(y))| < \frac{\varepsilon}{\mu(P_{x_0})},$$

$$\text{pour } |v - u|_{P_{x_0}} < \eta \text{ et } y \in P_{x_0}$$

d'où il suit

$$|Av - Au|_{x_0} = |(Av)x_0 - (Au)x_0| < \varepsilon \text{ pour } |v - u|_{P_{x_0}} < \eta.$$

Le théorème est démontré.

Remarque. Supposons que $f(x, y, z) = g(x, y) + h(y, z)$ (h et g étant des fonctions continues) ou que l'ensemble des fonctions de X dans E de la forme $x \to f(x, y, z)$ pour $(y, z) \in X \times E$ est équicontinu. Alors la conclusion du Th. II reste valable dans les conditions suivantes:

1) $f(\{x\} \times P_x \times S)$ est relativement compact pour tout $x \in Y$;

2) $u_0 = z_0 = C$-*te*;

3) $\sup_{X \times X \times S} |f(x, y, z)| = \alpha < \infty$;

4) $\mu(P_x) \leqq r/\alpha$.

(Il faut prendre dans la démonstration $M = \{u;\ u \in C,\ u(X) \subset S_i\}$. Puis les dernières conditions 3) et 4) peuvent être remplacées par les suivantes, plus générales:

$$|f(x, y, z)| \leqq b(x, y) \leqq c(y)$$

où c est une fonction sommable et

$$\int_{P_x} b(x, y)dy \leqq r.$$

§ 3. Soit B l'espace de Banach des fonctions continues et bornées de X dans E avec la norme :

$$|u| = \sup |u(x)|.$$

Théorème III. *Admettons les conditions suivantes :*

1) $f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z)| \leq L\,|\bar{z} - z|$;

2) $|f(x, y, 0)| \leq a(y)$ *ou* a *est une fonction sommable de* X *dans* R ;

3) $u_0 \in B$;

4) *il existe un nombre positif* $\theta < 1$ *tel que* $\mu(P_x) \leqq \theta/L$ *pour tout* x.

Alors il existe un point fixe et un seul de l'opérateur A *dans l'espace* B.

Démonstration. Au est une fonction continue pour tout $u \in B$; on utilise la formule (2) du § 2, la formule (1) restant valable pour la fonction u fixée ; puis nous avons

$$\int_{P_x \Delta P_{x_0}} |f(x, y, u(y))|\,dy \leqq \int_{P_x \Delta P_{x_0}} |f(x, y, u(y)) - f(x, y, 0)|\,dy + \int_{P_x \Delta P_{x_0}} |f(x, y, 0)|\,dy \leqq$$

$$\leqq L\,|u|\mu(P_x \Delta P_{x_0}) + \int_{P_x \Delta P_{x_0}} a(y)dy.$$

Au est une fonction borné. En effet

$$|(Au)x| \leqq |u_0(x)| + \int_{P_x} |f(x, y, u(y)) - f(x, y, 0)|dy + \int_{P_x} |f(x, y, 0)|\,dy \leqq$$

$$\leqq |u_0| + L\,|u|\theta/L + \int_X a(y)dy.$$

A est un opérateur de contraction :

$$|(Au)x - (Av)x| \leqq \int_{P_x} |f(x, y, u(y)) - f(x, y, v(y))|\,dy \leqq$$

$$\leqq L \int_{P_x} |u(y) - v(y)|dy \leqq \theta |u - v|.$$

D'après le théorème du point fixe de Banach la démonstration s'achève.

Remarque 1. Les conditions 1) et 4) du Th. II peuvent être remplacées par les suivantes, plus faibles :

$$\overline{(1)} \qquad |f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z)| \leqq L(y)\,|\bar{z} - z| \; ; \; \lim_{x \to x_0} \int_{P_x \Delta P_{x_0}} L(y)\,dy = 0 ;$$

$$\overline{(4)} \qquad \int_{P_x} L(y)dy \leqq \theta < 1 \text{ pour tout } x \in X.$$

Remarque 2. On considère l'opérateur $A_1 : C \to C$

$$(A_1 u)x = u_0(x) + \int_{S \cap P_x} f(x, y, u(y))dy.$$

où S est un ensemble mesurable. Le résultat du Th. II et celui de la remarque précédente se maintiennent lorsque $\mu(S) < 1/L$ resp. $\int_S L(y)dy < 1$

§ 4. Dans ce § nous supposerons que l'espace X est séparé. On considère l'équation :

$$4.1 \qquad \varphi(P) = \nu(P) + \int_P f(y, \varphi(P_y))dy,$$

où φ et ν sont des mesures vectorielles $\mathfrak{K} \to E$, $\mathfrak{K}$ étant l'anneau des parties sommables, relativements compactes de X.

4.2. Proposition. *Dans les conditions du Th. I ou Th. II,* u_0 *étant la fonction de la forme :* $x \to \nu(P_x)$, *l'équation 4.1 a une solution telle que la fonction :* $x \to \varphi(P)_x$ *est continue et bornée.*

En effet, prenant $P = P_x$ dans l'équation 4.1 on a

$$\varphi(P_x) = \nu(P_x) + \int_{P_x} f(y, \varphi(P_y))dy$$

qui, avec nos notations, s'écrit

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(y, u(y))dy.$$

Cette équation a une solution continue, bornée $u : X \to E$. La fonction d'ensemble $\bar{\varphi}$:

$$\varphi(P) = \nu(P) + \int_P f(y, u(y))dy$$

est une mesure vectorielle définie sur K.

Or $\varphi(P_x) = u(x)$ et donc

$$\varphi(P) = \nu(P) + \int_P f(y, \varphi(P_y))dy.$$

La proposition est démontrée.

4.3. Proposition. *Dans les conditions du Th. III l'équation* 4.1 *a une solution et une seule telle que la fonction* $u : x \to \varphi(P_x)$ *soit continue et bornée.* (La démonstration est analogue à celle précendente.)

Supposons maintenant que pour tout ensemble ouvert Ω de X il existe un élément Q de K tel que $Q \subset \Omega$ et $\mu(Q) > 0$. On considère la définition suivante:

Définition. *On dit que la mesure (vectorielle)* φ *est dérivable au point* $x \in X$ *et sa dérivée est* $\varphi'(x)$ *si, quel que soit le nombre positif* ε, *il existe un voisinage* V *de* x *tel que*

$$\left| \frac{\varphi(P)}{\mu(P)} - \varphi(x) \right| < \varepsilon,$$

pour $P \in K$, $P \subset V$, $\mu(P) > 0$.

Remarque. Pour toute fonction continue g de X dans E on a:

$$\left(\int_P g(y)\, dy \right)'(x) = g(x).$$

φ et ν étant des mesures $K \to E$ on considère l'équation:

4.4 $\qquad \varphi'(x) = f(x, \varphi(P_x))$ presque partout

avec la condition initiale

4.5 $\qquad \varphi(P) = \nu(P)$ pour tout $P \in K$, $\mu(P) = 0$.

A. Haimovici a étudié cette équation et a démontré l'existence de la solution dans les conditions indiquées au § 1, remarque 1 (v. [3])

4.6. Proposition. *Supposant* $\nu'(x) = 0$ *presque partout, les solutions trouvées dans* 4.2 *et* 4.3 *pour l'équation* 4.1 *sont des solutions du problème* 4.5 + 4.6

§ 5. Dans ce § nous allons analyser la condition 4) du Th. III; les autres conditions se maintiennent.

Considérons les équations:

5.1 $$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, u(y))dy;$$

5.2 $$\omega(x) = 1 + t\int_{P_x} \omega(y)dy \quad \omega \in C(X; R),\ t \in K.$$

Définition. *Nous dirons qu'une solution de l'équation* 5.1 *est normale lorsqu'elle s'obtient par la méthode des approximations successives dans l'espace localement convexe* $C(X; E)$ *(la première approximation étant* u_0*).*

Définition. $\Gamma(X; P)$ *est la classe des équations* 5.1 *qui s'obtient en fixant l'espace* X *et l'application* $P : X \to I$

Théorème IV. *Pour que toute équation de la classe* $\Gamma(X; P)$ *admette la solution normale il faut et il suffit que l'équation* 5.2 *„correspondante" ait la solution normale pour tout nombre positif* t.

Démonstration. La nécessité est banale. Nous montrons la suffisance en plusieures étapes.

Soit $B_0 = B_0(X; E)$ l'espace de Banach. des applications bornées de X dans E avec la norme

$$|u|_0 = \sup |u(x)|.$$

Soit ω une fonction strictement positive, localement bornée sur X. Enfin, soit $B_\omega = B_\omega(X; E)$ l'espace des fonctions continues de X dans E telles que $u/\omega \in B$. Alors B_ω est un espace normé avec la norme analogue à celle de Bielecki (v. [1])

$$|u| = \left| \frac{u}{\omega} \right|_0.$$

5.3. Lemme. *B_ω est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite fondamentale de B_ω. C'est-à-dire

$$\lim \left| \frac{u_{n+p} - u_n}{\omega} \right|_0 = 0.$$

B_0 étant complet, il existe $v \in B_0$ tel que

1) $$\lim_n \left| \frac{u_n}{\omega} - v \right|_0 = 0.$$

Soit $u = \omega \cdot v$, donc $u/\omega \in B_0$. Montrons que u est une fonction continue. Soient $x_0 \in X$ et ε un nombre positif. Il existe un voisinage de x_0, V, tel que

2) $$\omega(x) \leqq \gamma \quad \text{pour } x \in V.$$

D'après 1) il existe n_0 tel que

$$|u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon\omega(x)}{\gamma} \quad \text{pour tout } x \in X \text{ et } n \geqq n_0$$

où d'après (2)

3) $$|u_n(x) - u(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \in V \text{ et } n > n_0,$$

d'où il résulte facilement la continuité de la fonction u au point x. D'après (1) on a

$$\lim |u_n - u| = 0.$$

La proposition est démontrée.

Remarque. D'après (3) la topologie de B est plus forte que la topologie de la convergence compacte.

5.4 Proposition. *Soit ω une solution positive et continue de l'équation 5.2 pour un nombre $t > L$, $L = L(f)$ étant la constante de Lipschitz de la fonction f. Alors l'équation 5.1 a une solution et une seule dans $B_\omega(X; E)$.*

La démonstration est analogue à celle de [1] et du Th. III. Il faut seulement remarquer l'inégalité

$$\int_{P_x \Delta P_{x_0}} \omega(y)dy \leqq \left| \int_{P_x} \omega(y) - \int_{P_{x_0}} \omega(y)dy \right| + 2\int_{P_{x_0} - P_x} \omega(y)dy =$$

$$= \frac{|\omega(x_0) - \omega(x)|}{t} + 2\int_{P_{x_0} - P_x} \omega(y)dy.$$

La solution normale de l'équation 5.2 étant continue et positive le Th. IV est démontré.

Nous allons maintenant chercher la solution normale de l'équation 5.2. On considère la suite μ_n de fonctions numériques:

$$\mu_1(x) = \mu(P_x), \quad \mu_{n+1}(x) = \int_{P_x} \mu_n(y)dy. \quad \text{(v. [4])}$$

Pour que l'équation 5.2 ait la solution normale il faut et il suffit que la série

5.5 $$\omega = \sum_n t^n \mu_n$$

soit une série des fonctions continues qui converge uniformément sur les compacts vers ω, ω étant une solution continue de l'équation 5.2.

Définition. *Nous dirons que l'application $P: X \to I$ est localement bornée si pour tout $x \in x'$ il existe un voisinage V_x de x et un compact K_x tels que*

$$P_{x'} \subset K_x \quad \textit{pour} \quad x' \in V_x.$$

Théorème V. *Soit l'application P localement bornée. Alors afin que l'équation 5.2 ait la solution normale il faut et il suffit que la série 5.5 soit bornée sur compacts.*

Démonstration. La nécessité est banale; montrons la suffisance. Les fonctions μ_n sont continues. En effet pour $n = 1$ on a

$$|\mu_1(x) - \mu_1(x_0)| = |\mu(P_x) - \mu(P_{x_0})| \leqq \mu(P_x \Delta P_{x_0}).$$

Puis, en supposant μ_n continue, on a

$$|\mu_{n+1}(x) - \mu_{n+1}(x_0)| \leqq \int_{P_x \Delta P_{x_0}} \mu_n(y)dy \leqq A_{x_0}\mu(P_x \Delta P_{x_0}),$$

$$\text{si } x \in V_{x_0} \text{ et } A_{x_0} = \sup_{y \in K_{x_0}} \mu_n(y).$$

D'après le théorème de Beppo Levi, ω est une solution positive de l'équation 5.2. Il est de même une fonction continue car

$$|\omega(x) - \omega(x_0)| \leqq t\int_{P_x \Delta P_{x_0}} \omega(y)dy \leqq t\,\psi_{x_0}\,\mu(P_x \Delta P_{x_0})$$

$$\text{si } x \in V_{x_0} \quad \text{et} \quad \psi_{x_0} = \sup_{y \in K_{x_0}} \omega(y).$$

Enfin, après le théorème de Dini (v. [2], ch. X, § 4), la série 5.5 converge uniformément sur les compacts.

Remarque. Soit P une application constante: $P_x = G$. Alors on obtient l'équation de Fredholm

5.6 $$u(x) = u_0(x) + \int_G f(x, y, u(y))dy.$$

Ecrivons l'équation „correspondante", c'est-à-dire

5.7 $$\omega(x) = 1 + t\int_G \omega(y)dy.$$

La solution de l'équation 5.7 est une constante $\omega(x) = \dfrac{1}{1 - t\mu(G)}$.

Pour que cette solution soit normale il faut et il suffit que

$$\mu(G) < \frac{1}{t}.$$

Nous avons trouvé ainsi une classe d'équations $\Gamma(X; G)$ dans laquelle les conditions du Th. III sont nécessaires pour l'existence de la solution normale pour la classe entière.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bielecki A. — *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tychonoff dans la théorie des équations différentielles ordinaires*. Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci., cl. III, 1956, 5, p. 261.
2. Bourbaki N. — *Topologie générale*, ch. I, II, X, Paris, 1961.
3. Haimovici A. — *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble*. Rev. Roumaine de Math. pures et appl. T. IX, 1964, 3, p. 207.
4. Haimovici A. — *Sur le problème de Cauchy pour des équations dont les inconnues sont des fonctions d'ensembles*. An. şt. Univ. Iaşi, s. I a, T. XII, p. 287.
5. Hukuhara M. — *Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel*. Japanese J. of Math., XX, 1950, p. 1.
6. Myers S. B. — *Equicontinuous sets of mappings*. Annals of Math., T. 47, 3, 1946, p. 496.
7. Zaanen A. — *An introduction to the theory of integration*. Amsterdam, 1965.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A ECUAŢIEI VOLTERRA

Rezumat

Fie ecuaţia integrală Volterra clasică

$$u(x) = u_0(x) + \int_a^x f(x, y, u(y))dy.$$

u fiind o funcţie definită pe un interval $[\alpha, \beta]$ şi cu valori în R. Să înlocuim $[\alpha, \beta]$ cu un spaţiu topologic X înzestrat cu o măsură boreliană pozitivă μ; să înlocuim R cu un spaţiu Banach; în fine domeniul de integrare $[a, x]$ să fie înlocuit printr-o parte măsurabilă a lui X ce depinde de x, P_x, iar integrala să o considerăm în sens Bochner. Aplicaţia $x \to P_x$ satisface condiţiile 1.1 şi 1.2.

În felul acesta se realizează tipul de ecuaţii integrale studiate în lucrare. Se dau teoreme de existenţă şi teoreme de existenţă şi unicitate care conduc la teoreme analoge pentru ecuaţii diferenţiale şi integrale în funcţii de mulţime considerate în [3], [4].

ESPACES LINÉAIRES A SEMI-NORMES HILBERTIENNES

PAR

T. PRECUPANU

Une catégorie importante d'espaces linéaires topologiques localement convexes (espaces à semi-normes) est fournie par les espaces linéaires topologiques H-localement-convexes (espaces à semi-normes hilbertiennes) [11]. Ces espaces constituent une généralisation des espaces préhilbertiens comme les espaces localement-convexes représentent une généralisation des espaces normés; par conséquent, beacoup de leurs propriétés peuvent être obtenues des propriétés connues pour les espaces localement-convexes, où le rôle des espaces normés est pris par les espaces préhilbertiens (les théorèmes 2 et 3).

Dans le § 1, nous définirons les espaces H-localement-convexes et les espaces à semi-normes hilbertiennes en donnant en même temps quelques exemples de cette espèce d'espaces et dans le § 2 nous présenterons des théorèmes d'immersion dans des produits directs, des limites inductives et des limites projectives d'espaces de Hilbert ou d'espaces préhilbertiens. Le dernier paragrahe, § 3, contient certaines propriétés de l'orthogonalité introduite pour les espaces à semi-normes hilbertiennes, les résultats principaux étant l'extension du théorème de décomposition par l'orthogonalité des éléments d'un espace à l'aide d'un sous-espace linéaire fermé, théorème connu pour les espaces de Hilbert (le théorème 4) et des caractérisations des espaces hilbertiens et préhilbertiens (le théorème 5).

§ 1. Soit X un espace linéaire sur le corps C des nombres complexes.

Définition 1. *On dit qu'une application* $(x, y) \to \langle x, y \rangle$ *d'un espace linéaire produit* $X \times X$ *dans* C *est un semi-produit scalaire sur* X [10], *si elle possède les propriétés suivantes:*