BIBLIOGRAPHIE

1. Bielecki A. — *Une remarque sur la méthode de Banach-Cacciopoli-Tychonoff dans la théorie des équations différentielles ordinaires.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sci., cl. III, 1956, 5, p. 261.
2. Bourbaki N. — *Topologie générale*, ch. I, II, X, Paris, 1961.
3. Haimovici A. — *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble.* Rev Roumaine de Math. pures et appl. T. IX, 1964, 3, p. 207.
4. Haimovici A. — *Sur le problème de Cauchy pour des équations dont les inconnues sont des fonctions d'ensembles.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I a, T. XII, p. 287.
5. Hukuhara M. — *Sur l'existence des points invariants d'une transformation dans l'espace fonctionnel.* Japanese J. of Math., XX, 1950, p. 1
6. Myers S. B. — *Equicontinuous sets of mappings.* Annals of Math., T. 47, 3, 1946, p. 496
7. Zaanen A. — *An introduction to the theory of integration.* Amsterdam, 1965.

ASUPRA UNEI GENERALIZĂRI A ECUAŢIEI VOLTERRA

Rezumat

Fie ecuaţia integrală Volterra clasică

$$u(x) = u_0(x) + \int_a^x f(x, y, u(y))dy,$$

u fiind o funcţie definită pe un interval $[\alpha, \beta]$ şi cu valori în R. Să înlocuim $[\alpha, \beta]$ cu un spaţiu topologic X înzestrat cu o măsură boreliană pozitivă μ; să înlocuim R cu un spaţiu Banach; în fine domeniul de integrare $[a, x]$ să fie înlocuit printr-o parte măsurabilă a lui X ce depinde de x, P_x, iar integrala să o considerăm în sens Bochner. Aplicaţia $x \to P_x$ satisface condiţiile 1.1 şi 1.2.

În felul acesta se realizează tipul de ecuaţii integrale studiate în lucrare. Se dau teoreme de existenţă şi teoreme de existenţă şi unicitate care conduc la teoreme analoge pentru ecuaţii diferenţiale şi integrale în funcţii de mulţime considerate în [3], [4].

ESPACES LINÉAIRES À SEMI-NORMES HILBERTIENNES

PAR

T. PRECUPANU

Une catégorie importante d'espaces linéaires topologiques localement convexes (espaces à semi-normes) est fournie par les espaces linéaires topologiques H-localement-convexes (espaces à semi-normes hilbertiennes) [11]. Ces espaces constituent une généralisation des espaces préhilbertiens comme les espaces localement-convexes représentent une généralisation des espaces normés; par conséquent, beacoup de leurs propriétés peuvent être obtenues des propriétés connues pour les espaces localement-convexes, où le rôle des espaces normés est pris par les espaces préhilbertiens (les théorèmes 2 et 3).

Dans le § 1, nous définirons les espaces H-localement-convexes et les espaces à semi-normes hilbertiennes en donnant en même temps quelques exemples de cette espèce d'espaces et dans le § 2 nous présenterons des théorèmes d'immersion dans des produits directs, des limites inductives et des limites projectives d'espaces de Hilbert ou d'espaces préhilbertiens. Le dernier paragrafe, § 3, contient certaines propriétés de l'orthogonalité introduite pour les espaces à semi-normes hilbertiennes, les résultats principaux étant l'extension du théorème de décomposition par l'orthogonalité des éléments d'un espace à l'aide d'un sous-espace linéaire fermé, théorème connu pour les espaces de Hilbert (le théorème 4) et des caractérisations des espaces hilbertiens et préhilbertiens (le théorème 5).

§ 1. Soit X un espace linéaire sur le corps C des nombres complexes.

Définition 1. *On dit qu'une application $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ d'un espace linéaire produit $X \times X$ dans C est un semi-produit scalaire sur X [10], si elle possède les propriétés suivantes:*

(S.1) $$< x, x > \geqslant 0,$$

(S.2) $$< \lambda x + \mu y, z > = \lambda < x, z > + \mu < y, z >,$$

(S.3) $$< x, y > = \overline{< y, x >}$$

quels que soient $x, y, z \in X$ *et* $\lambda, \mu \in C$.

On peut établir sans aucune difficulté l'inégalité de Cauchy-Buniakovski

(S.4) $$| < x, y > |^2 \leqslant < x, x > \cdot < y, y >$$

pour tous $x, y \in X$.

Désignons par

(1) $$p(x) = < x, x >^{1/2}.$$

Alors p sera une semi-norme sur X ; cette semi-norme sera une norme, si et seulement si le semi-produit scalaire est justement un produit scalaire c'est-à-dire dans (S.1) nous aurons l'inégalité stricte pour chaque $x \neq \theta$ (où θ est l'élément „zéro" de X).

Définition 2. *Nous dirons qu'une semi-norme p est hilbertienne si elle provient d'un semi-produit scalaire par* (1).

En généralisant le théorème de Jordan-von Neumann [8] de caractérisation des semi-normes qui proviennent des produits scalaires, nous obtiendrons la

Proposition 1. *Une semi-norme p est hilbertienne si et seulement si pour chaque couple d'éléments $x, y \in X$ on a*

(2) $$p^2(x + y) + p^2(x - y) = 2[p^2(x) + p^2(y)].$$

Si (2) *a lieu, le semi-produit scalaire dont provient la seminorme p est uniquement déterminé par*

(3) $$< x, y > = \frac{1}{4}[p^2(x + y) - p^2(x - y) + i(p^2(x + iy) - p^2(x - iy))].$$

Définition 3. *On dit qu'un espace linéaire X est un espace à semi-normes hilbertiennes (ou à semi-produits scalaires) s'il est muni d'une famille $P = \{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ de semi-normes hilbertiennes (ou d'une famille $Q = \{< . . >_\alpha;\ \alpha \in A\}$ de semi-produits scalaires).*

Sur un espace à semi-normes hilbertiennes on peut définir donc une topologie linéaire localement convexe qui est séparée si et seulement si la famille P des semi-normes hilbertiennes est suffisante, c'est-à-dire, pour chaque $x \neq \theta$, il existe $\alpha \in A$ tel que $p_\alpha(x) \neq 0$, ou si, au moins pour un semi-produit scalaire on a l'inégalité stricte dans (S.1).

Définition 4. *On dit qu'un espace linéaire topologique est H-localement-convexe si la topologie peut etre définie à l'aide d'une famille de semi-normes hilbertiennes.*

Une caractérisation des espaces H-localement-convexes est donnée dans [11] à l'aide de la notion d'ensemble H-convexe.

Définition 5. *On dit qu'un ensemble M de X est H-convexe si pour chaque $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $x \in \alpha M$, $y \in \beta M$, il existe $\alpha_1 > 0$ et $\beta_1 > 0$ avec les propriétés :*

(H.1) $$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \leqslant 2(\alpha^2 + \beta^2),$$

(H.2) $$x + y \in \alpha_1 M,$$

(H.3) $$x - y \in \beta_1 M.$$

On démontre qu'une semi-norme est hilbertienne si et seulement si la boule déterminée par cette semi-norme est un ensemble H-convexe. Donc la place des ensembles convexes dans les espaces localement convexes est prise par les ensembles H-convexes parmi des espaces H-localement-convexes. Ce fait découle évidemment aussi de [11], théorème B.

Théorème 1. *Un espace linéaire topologique est H-localement-convexe si et seulement si la topologie peut être définie à l'aide d'un système fondamental de voisinages équilibrés et H-convexes de l'origine.*

Corollaire 1. *L'enveloppe équilibrée H-convexe d'un ensemble borné dans un espace H-localement-convexe est bornée.*

Démonstration. Soit B un ensemble borné dans l'espace H-localement convexe X. Il existe, alors, un système fondamental $\mathcal{V}$ de voisinages équilibrés et H-convexes de l'origine. Pour chaque $V \in \mathcal{V}$ il existe λ tel que $B \subset \lambda V$ et donc $\mathcal{H}(B) \subset \lambda V$ parce que λV est équilibré et H-convexe (nous avons désigné par $\mathcal{H}(B)$ l'enveloppe équilibrée et H-convexe de l'ensemble B). Par conséquent $\mathcal{H}(B)$ est aussi borné.

Remarque. En général pour un ensemble arbitraire nous ne pouvons pas définir la notion d'enveloppe équilibrée H-convexe parce qu'une intersection d'ensembles équilibrés H-convexes n'est pas toujours un ensemble équilibré H-convexe. Mais, si on a une famille dirigée par inclusion d'ensembles équilibrés H-convexes, alors leur intersection est aussi équilibrée et H-convexe. Chez nous, la famille $\{\lambda V;\ B \subset \lambda V,\ \lambda > 0,\ V \in \mathcal{V}\}$ peut être supposée dirigée par inclusion et par conséquent $\mathcal{H}(B) = \bigcap \lambda V$ est équilibrée et H-convexe.

De là, on a immédiatement le

Corollaire 2. *La famille des ensembles bornés pour une topologie H-localement convexe possède un système fondamental d'ensembles bornés, équilibrés et H-convexes.*

Proposition 2. *Pour chaque famille $P = \{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ de semi-normes hilbertiennes il existe une famille $P' = \{p'_\beta;\ \beta \in B\}$ équivalente à P et dirigée de semi-normes hilbertiennes.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'ensemble B de toutes les parties finies d'indices de A et de définir

(4) $$p'_\beta(x) = [\sum_{\alpha \in \beta} p_\alpha^2(x)]^{1/2}$$

pour chaque $\beta \in B$. Ces semi-normes sont hilbertiennes parce qu'elles proviennent des semi-produits scalaires $< x, y >'_\beta = \sum_{\alpha \in \beta} < x, y >_\alpha$, où nous avons désigné par $< \ldots >_\alpha$ le semi-produit scalaire qui détermine la semi-norme p_α. On remarque que la famille de semi-normes P' est équivalente à la famille initiale et, de plus, elle est dirigée [6].

Cette affirmation sera utile parce qu'elle permet de supposer quelquefois, sans diminuer la généralité, que la famille de semi-normes hilbertiennes est dirigée.

Proposition 3. a) *Chaque sous-espace linéaire topologique d'un espace H-localement-convexe est H-localement-convexe.*

b) *Si Y est un sous-espace linéaire de l'espace X, H-localement-convexe, alors l'espace topologique quotient X/Y est H-localement-convexe.*

c) *Chaque produit direct ou somme directe d'espaces H-localement-convexes est aussi un espace H-localement-convexe.*

d) *Chaque limite projective ou inductive d'espaces H-localement-convexe est un espace H-localement convexe.*

Démonstration. a) Il suffit d'observer que la restriction d'une semi-norme hilbertienne à un sous-espace linéaire est une semi-norme hilbertienne sur cet espace linéaire.

b) Si p est semi-norme hilbertienne sur X, alors la seminorme quotient $\hat{p}(\hat{x}) = \inf_{x \in \hat{x}} p(x)$, où nous avons désigné par $\hat{x}$ un élément de l'espace quotient $X|Y$; cette semi-norme est aussi hilbertienne parce que :

$$\hat{p}^2(\hat{x} + \hat{y}) + \hat{p}^2(\hat{x} - \hat{y}) \leq p^2(x + y) + p^2(x - y) = 2[p^2(x) + p^2(y)],$$

quels que soient $x + y \in \hat{x} + \hat{y}$ et $x - y \in \hat{x} - \hat{y}$, donc pour chaque $x \in \hat{x}$ et $y \in \hat{y}$.

Par conséquent :

$$\hat{p}^2(\hat{x} + \hat{y}) + \hat{p}^2(\hat{x} - \hat{y}) \leq 2[\hat{p}^2(\hat{x}) + \hat{p}^2(\hat{y})],$$

pour chaque $\hat{x}, \hat{y} \in X/Y$ et en remplaçant $\hat{x}, \hat{y}$ par $\hat{x} + \hat{y}$, et respectivement $\hat{x} - \hat{y}$, on obtient (2).

c) Si X_i $(i \in I)$ est une famille d'espaces H-localement-convexes pour lesquels les topologies sont définies à l'aide des familles à semi-normes hilbertiennes $P_i = \{p_{\alpha_i};\ \alpha_i \in A_i\}$, alors les semi-normes p'_α et p''_β qui définissent la topologie produit, respectivement la topologie somme directe, données par

(5) $\quad p'_\alpha(x) = p_{\alpha_i}(x_i)$, où $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$ et $\alpha \in \bigcup_{i \in I} A_i$, $\alpha = \alpha_i$,

(5') $\quad p''_\beta(x) = \left[\sum_{i \in I} p^2_{\alpha_i}(x_i)\right]^{1/2}$, où $x = \sum_{i \in I} x_i \in \sum_{i \in I} X_i$ et $\beta \in \prod_{i \in I} A_i$, $\beta = (\alpha_i)_{i \in I}$

sont aussi des semi-normes hilbertiennes quels que soient α et β, parce qu'elles proviennent de semi-produits scalaires.

d) Cette affirmation découle immédiatement de la définition de la limite projective, respectivement de la définition de la limite inductive [9] en appliquant b) et c).

Remarque. Ci-dessus, on a défini la topologie somme directe (par conséquent limite inductive) par les semi-normes de type (5').

De ces propriétés de permanence des topologies H-localement convexes, il résulte des propriétés analogues pour les espaces à semi-normes hilbertiennes parce que dans la démonstration on travaille effectivement avec des familles à semi-normes et non avec des topologies localement-convexes déterminées par elles.

Corollaire. *La topologie bornologique associée à une topologie H-localement convexe est H-localement convexe.*

Démonstration. Du corollaire 2 du théorème 1 et de d) il résulte que la topologie bornologique associée à une topologie H-localement-convexe est aussi H-localement-convexe parce que la famille des ensembles bornés possède un système fondamental d'ensembles bornés, équilibrés et H-convexes ; donc les semi-normes de Minkowski correspondantes seront hilbertiennes (rappelons que la topologie bornologique associée à une topologie localement-convexe est limite inductive des topologies déterminées par les semi-normes de Minkowski pour un système fondamental d'ensembles bornés, équilibrés et convexes pour cette topologie [3]).

Exemples d'espaces H-localement convexes. 1. $X = \prod_{i \in I} X_i$, où X_i sont des espaces préhilbertiens par rapport à la topologie produit, est un espace H-localement-convexe. Il suffit d'observer que la famille de semi-normes $P = \{p_i;\ i \in I\}$, où $p_i(x) = \|x_i\|$, pour $x = (x_i)_{i \in I}$, $\mathrm{pr}_i(x) = x_i$, et $\|\cdot\|_i$ étant la norme de l'espace X_i, est hilbertienne. En particulier, l'espace C^I, où I est un ensemble arbitraire, considéré comme un espace topologique par rapport à la topologie de la convergence ponctuelle, est H-localement-convexe.

2. $L^2_{\mathrm{loc}}(R)$ est un espace H-localement-convexe par rapport à la topologie usuelle donnée par la famille de semi-normes hilbertiennes $P = \{p_n;\ n \in N\}$ où $p_n(x) = \left[\int_{-n}^{n} |x(t)|^2\, dt\right]^{1/2}$; les semi-produits scalaires correspondants seront $< x, y >_n = \int_{-n}^{n} x(t)\overline{y(t)}\, dt$.

§ 2. Soit X un espace H-localement-convexe et $P = \{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ une famille dirigée et suffisante de semi-normes hilbertiennes qui définissent sa topologie. Si nous désignerons le noyau de la semi-norme p_α par $N_\alpha = \{x;\ p_\alpha(x) = 0\}$ alors l'espace quotient $X_\alpha = X|N_\alpha$ sera préhilbertien, c'est-à-dire sa norme sera définie par un produit scalaire. La completion Y_α de l'espace normé X_α sera un espace de Hilbert. Avec ces précisions, le théorème général d'immersion des espaces localement-convexes dans des produits directs ou dans des limites projectives d'espaces de Banach [9] devient :

Théorème 2. a) *Un espace H-localement-convexe est isomorphe à un sous-espace linéaire X d'un produit direct d'espaces de Hilbert. L'espace X est complet si et seulement si $\overline{X}$ est fermé.*

b) *Un espace H-localement-convexe X est isomorphe à un sous-espace linéaire dense d'une limite projective d'espaces de Hilbert. Si X est complet, alors il coïncide avec une limite projective d'espaces de Hilbert.*

Rappelons que dans a), l'immersion est faite par l'application $\varphi : X \to \prod_{\alpha \in A} \hat{Y}_\alpha$ définie par $\varphi(x) = (\hat{y}_\alpha)$, où $\hat{y}_\alpha$ est la classe correspondante de l'élément x dans X_α, considérée comme un sous-espace de la complétion $\hat{Y}_\alpha$.

La topologie de X est la moins fine topologie pour laquelle les applications $\varphi_\alpha : X \to \hat{Y}_\alpha$, définies par $\varphi_\alpha(x) = \hat{y}_\alpha$ pour chaque $\alpha \in A$, sont continues. Les applications linéaires qui définissent la limite projective seront $\hat{\varphi}_{\beta\alpha} : \hat{Y}_\alpha \to \hat{Y}_\beta$ obtenues par le prolongement des applications d'immersion $\varphi_{\beta\alpha} : X_\alpha \to X_\beta$ pour chaque $\alpha > \beta$. En renonçant, aux complétions des espaces X_α, nous observons que l'application $\varphi : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ représente une immersion dans un produit d'espaces préhilbertiens. Pour préciser les conditions dans lesquelles un espace H-localement-convexe est lui-même un produit direct ou une limite projective d'espaces préhilbertiens, nous appliquerons les résultats de W. Jones [7] établis pur les espaces localement-convexes.

Définition 6. *On dit, après Jones, qu'une suite généralisée $\{x_\delta ; \delta \in \Delta\}$ d'éléments de X est O-Cauchy si pour chaque semi-norme p_α, il existe $\delta_\alpha \in \Delta$ tel que $p_\alpha(x_{\delta'} - x_{\delta''}) = 0$ pour chaque δ', $\delta'' > \delta_\alpha$. On dit qu'un espace localement-convexe est O-complet si chaque suite généralisée O-Cauchy est convergente.*

La notion de suite généralisée O-Cauchy et la notion d'espace O-complet sont invariantes à l'échange de la famille de semi-normes par une famille équivalente et donc elles dépendent seulement de la topologie localement-convexe déterminée par cette famille de semi-normes.

Définition 7. *On dit que la famille de semi-normes $P = \{p_\alpha ; \alpha \in A\}$ est indépendante si pour chaque partie finie d'indices $F \subset A$ et $\alpha \in F$, à chaque $x \in X$ correspond un élément $x_F \in X$ telle que $p_\alpha(x - x_F) = 0$, $p_\beta(x_F) = 0$, pour tous $\beta \in F$.*

Théorème 3. a) *Un espace H-localement-convexe X est une limite projective d'espaces préhilbertiens si et seulement s' il est O-complet.*

b) *Un espace H-localement-convexe X est un produit direct d'espaces préhilbertiens si et seulement s'il est O-complet et sa topologie peut être définie par une famille indépendente de semi-normes hilbertiennes.*

c) *Un espace H-localement-convexe est une limite inductive d'espaces préhilbertiens si et seulement si il est bornologique.*

Démonstration. Pour a) et b) nous appliquons les résultats de [7], en remarquant que les espaces quotient X sont préhilbertiens et ils forment une famille dirigée par rapport à l'ordre naturel de l'ensemble des indices A, déterminée par l'ordre de la famille de semi-normes P ($\alpha < \beta$ si $p_\alpha(x) \leq p_\beta(x)$, pour chaque $x \in X$) et pour c) on tient compte de la caractérisation des topologies bornologiques [3], proposition 3 et son corollaire.

§ **3.** Sur un espace linéaire X muni d'une famille Q de semi-produits scalaires on peut développer une théorie de l'orthogonalité en généralisant quelques résultats établis pour les espaces de Hilbert.

Définition 8. *On dit que les éléments x, $y \in X$ sont orthogonaux par rapport à une famille $Q = \{<\ldots>_\alpha ; \alpha \in A\}$ de semi-produits scalaires si $<x, y>_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in A$* (on notera $x \perp y$).

On peut définir, par analogie, la notion d'orthogonalité pour deux ensembles et la notion de complément orthogonal pour un ensemble ; si les ensembles A et B sont orthogonaux, nous noterons $A \perp B$ mais le complément orthogonal de l'ensemble A sera noté par $A^\perp$.

Proposition 4. a) *Si $x \perp y_i$, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, alors $x \perp \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$ pour tous les scalaires $a_i \in C$.*

b) *Si $x \perp y_\delta$ pour $\delta \in \Delta$ et $\{y_\delta ; \delta \in \Delta\}$ est une suite généralisée d'éléments de X qui converge et $\lim_\delta y_\delta = y$, alors $y \perp x$.*

c) *Le complément orthogonal d'un ensemble est un sous-espace linéaire fermé et il coïncide avec le complément orthogonal de l'enveloppe linéaire fermée de cet ensemble.*

d) *Si $\{x_i ; i \in I\}$ est une famille sommable d'éléments orthogonaux deux à deux et $x = \sum_{i \in I} x_i$, alors la famille est de carré absolument sommable et $p_\alpha^2(x) = \sum_{i \in I} p_\alpha^2(x_i)$ pour chaque $\alpha \in A$. Si X est complet, alors la réciproque est valable.*

Démonstration. La propriété a) résulte de la linéarité des semi-produits scalaires (S. 2), mais pour b) on emploie la caractérisation de la convergence dans la tolpologie H-localement-convexe en utilisant (S. 3) et (S. 4).

L'affirmation c) résulte immédiatement de a) et b). Pour établir d) on observe que pour chaque famille finie $F \subset I$, si nous noterons $S_F = \sum_{i \in F} x_i$ on a $p_\alpha^2(S_F) = \sum_{i \in F} p_\alpha^2(x_i)$ quel que soit $\alpha \in A$. Si la famille $\{x_i ; i \in I\}$ est sommable et $x = \sum_{i \in I} x_i$, c'est-à-dire $\lim_{F \in \mathcal{F}} S_F = x$, où $\mathcal{F}$ est la famille des parties finies de I, organisée comme un ensemble dirigé par rapport à la relation d'inclusion, alors la famille numérique $\{p_\alpha^2(x_i) ; i \in I\}$ est évidemment sommable, donc la famille considérée est absolument sommable et en passant vers la limite nous obtiendrons l'égalité demandée. La dernière partie de l'affirmation est immédiate parce que la suite généralisée $\{S_F ; F \in \mathcal{F}\}$ est Cauchy si et seulement si la famille $\{p_\alpha^2(x_i) ; i \in I\}$ est sommable pour chaque $\alpha \in A$.

Pour chaque couple (x, Y), où $x \subset X$ et $Y \subset X$ si on note

$$d_\alpha (x ; Y) = \inf_{y \in Y} p_\alpha (x - y) \tag{6}$$

on observe que $d_\alpha = 0$ pour tous $\alpha \in A$ si et seulement si x est dans l'adhérence de Y.

Définition 9. *On dit que l'ensemble Y de X a la propriété H relativement à la famille de semi-normes hilbertiennes s'il existe une suite généralisée $\{y_\delta ; \delta \in \Delta\}$ d'éléments de Y telle que*

$$\lim_\delta p_\alpha (y_\delta) = d_\alpha (0 ; Y) \tag{7}$$

pour tous $\alpha \in A$.

En général, on observe que pour chaque $\alpha \in A$ il existe une suite $\{y_{\alpha, n} ; n \in N\}$ d'éléments de Y telle que $\lim\limits_{n \to \infty} p_\alpha (y_{\alpha, n}) = d_\alpha (0, Y)$. L'ensemble Y aura la propriété H si et seulement si $\lim\limits_{(\beta, n)} p_\alpha (y_{\beta, n}) = d_\alpha (0, Y)$ par rapport à l'ordre naturel du produit $A \times N$ (on considère la famille P de semi-normes hilbertiennes dirigée et par conséquent l'ensemble A a le même caractère).

Théorème 4. *Soit X un espace linéaire à une famille suffisante de semi-normes hilbertiennes complet dans la topologie H-localement-convexe correspondante, mais X_1 un sous-espace linéaire fermé. Si pour un élément $x \in X$ la variété linéaire $x + X_1$ a la propriété H, alors il existe une décomposition unique de façon que $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in X_1$ et $x_2 \in X_1^\perp$.*

Démonstration. Parce que les semi-normes sont hilbertiennes, l'inégalité de Beppo-Levi $p_\alpha (y_1 - y_2) \leqslant \sqrt{p_\alpha^2 (y_1 - x) - d_\alpha^2} + \sqrt{p_\alpha^2 (y_2 - x) - d_\alpha^2}$ est valable pour chaque $\alpha \in A$ et tous $y_1, y_2 \in X_1$. En appliquant cette inégalité pour chaque $\alpha \in A$ aux éléments de la suite $\{x_\delta ; \delta \in \Delta\}$ donnée par analogie à (7) on a

$$p_\alpha (x_{\delta'} - x_{\delta''}) \leqslant \sqrt{p_\alpha^2 (x_{\delta'} - x) - d_\alpha^2} + \sqrt{p_\alpha^2 (x_{\delta''} - x) - d_\alpha^2}, \tag{8}$$

d'où il résulte que cette suite est fondamentale, donc il existe $x_1 \in X_1$ tel que

$$\lim_\delta x_\delta = x_1 . \tag{9}$$

Si on note $x_2 = x - x_1$ nous montrons que $x_2 \in X_1^\perp$, c'est-à-dire $< x_2, y >_\alpha = 0$ pour tous $\alpha \in A$ et $y \in X_1$. En effet, pour tous $\lambda \in C$, on a $p_\alpha [x - (x_1 - \lambda y)] \geqslant d_\alpha$ parce que $x_1 - \lambda y \in X_1$, donc $p_\alpha^2 (x_2 + \lambda y) \geqslant d_\alpha^2$. Des propri-

étés des produits scalaires il résulte $p_\alpha^2 (x_2) + \bar\lambda < x_2, y >_\alpha + \lambda < y, x_2 >_\alpha + |\lambda|^2 p_\alpha^2 (y) \geqslant d_\alpha^2$. On peut supposer que $p_\alpha (y) \neq 0$ parce que dans la situation contraire à (S. 4) il résulte immédiatement $< x_2, y >_\alpha = 0$. En posant $\lambda = -\frac{1}{p_\alpha^2 (y)} < x_2, y >_\alpha$ dans l'inégalité antérieure et en observant que de (7) et (9) nous avons $d_\alpha = p_\alpha (x_2)$, il résulte $- |< x_2, y >_\alpha| \geqslant 0$, donc $< x_2, y >_\alpha = 0$. L'unicité résulte par l'utilisation du fait que la famille de semi-normes est suffisante.

Corollaire. *Soient X un espace linéaire à semi-normes hilbertiennes, séparé et complet, et Y un sous-espace linéaire fermé de X ; Y et $Y^\perp$ forment une décomposition orthogonale pour l'espace X si et seulement si la variété linéaire $x + Y$ à la propriété H pour chaque $x \in X$.*

Définition 10. *On dit qu'une famille $P = \{p_\alpha ; \alpha \in A\}$ de semi-normes hilbertiennes est équivalente à une norme hilbertienne $\|\cdot\|$ si pour tout $\alpha \in A$ il existe $K_\alpha > 0$, tel que $p_\alpha (x) = K_\alpha \|x\|$.*

On remarque immédiatement que la famille P est équivalente à une norme hilbertienne si et seulement si pour tous $\alpha, \beta \in A$ il existe $K_{\alpha\beta} > 0$ tel que $p_\alpha (x) = K_{\alpha\beta} p_\beta (x)$ quel que soit $x \in X$. En ce cas, nous dirons que l'espace linéaire X est équivalent à un espace préhilbertien ; si de plus l'espace linéaire X est complet, il se réduit à une structure d'un espace de Hilbert.

En ce qui suit, nous préciserons certains cas spéciaux quand un espace à semi-normes hilbertiennes est équivalent à un espace hilbertien ou pré-hilbertien.

Théorème 5. *Si X est un espace séparé à semi-normes hilbertiennes les affirmations suivantes sont équivalentes :*

H_1. *l'espace linéaire X est équivalent à un espace pré-hilbertien,*

H_2. *s'il existe $\alpha \in A$ tel que $< x, y >_\alpha = 0$, il résulte $x \perp y$.*

H_3. *pour tous $x, y \in X$ $(y \neq 0)$ il existe un seul λ tel que $x + \lambda y \perp y$.*

H_4. *$< x, y >_\alpha p_\beta^2 (x) = < x, y >_\beta p_\alpha^2 (x)$ quels que soient $x, y \in X$ et $\alpha, \beta \in A$.*

Si X est complet les affirmations précédentes sont aussi équivalentes à :

H_5. *Chaque sous-espace linéaire fermé détermine avec son complément orthogonal une décomposition orthogonale pour tout espace.*

H_6. *Chaque variété linéaire de X à une dimension a la propriété H.*

Démonstration. Les affirmations $H_1 \to H_2 \to H_3$ et $H_1 \to H_5 \to H_6$ (si X est complet) sont évidentes et de H_3 il résulte H_4 parce qu'on observe que $< p_\alpha^2 (y) x - < x, y >_\alpha y, y >_\alpha = 0$, donc $< p_\alpha^2 (y) x - < x, y >_\alpha y, y >_\beta = 0$. En appliquant le théorème 4, on peut montrer que $H_6 \to H_3$. En conséquence, pour établir le théorème ci-dessus il suffit de vérifier que H_4 entraîne l'existence d'une constante $K_{\alpha\beta} > 0$ telle que $p_\alpha (x) = K_{\alpha\beta} p_\beta (x)$ pour tous $x \in X$. En remplaçant x, y par $x + y$ et respectivement $x - y$, il résulte de H_4 les relations

$$< x+y, x-y >_\alpha p_\beta^2(x+y) = < x+y, x-y >_\beta p_\alpha^2(x+y),$$

$$< x+y, x-y >_\alpha p_\beta^2(x-y) = < x+y, x-y >_\beta p_\alpha^2(x-y),$$

donc

$$(10) \qquad < x+y, x-y >_\alpha [p_\beta^2(x+y) + p_\beta^2(x-y)] = \\ = < x+y, x-y >_\beta [p_\alpha^2(x+y) + p_\alpha^2(x-y)].$$

On peut supposer, sans diminuer la généralité, que les produits scalaires sont réels et donc les relations (2) et (3) donnent $< x, y > = \frac{1}{2}[4p^2(x) - p^2(x+y) - p^2(x-y)]$ et en combinant avec (10) on obtient

$$(11) \quad p_\alpha^2(x)[p_\beta^2(x+y) + p_\beta^2(x-y)] = p_\beta^2(x)[p_\alpha^2(x+y) + p_\alpha^2(x-y)]$$

quels que soient $x, y \in X$ et donc a lieu aussi la relation

$$(11') \quad p_\alpha^2(y)[p_\beta^2(x+y) + p_\beta^2(x-y)] = p_\beta^2(y)[p_\alpha^2(x+y) + p_\alpha^2(x-y)].$$

Soit $y_0 \in X$ tel que $p_\alpha^2(y_0) + p_\beta^2(y_0) \neq 0$, d'où $p_i^2(x+y_0) + p_i^2(x-y_0) \neq 0$ pour $i = \alpha, \beta$. En divisant les relations (11) et (11') on a

$$p_\alpha(x) = \frac{p_\alpha(y_0)}{p_\beta(y_0)} p_\beta(x)$$

quel que soit $x \in X$, ce qui entraîne H_1.

Si X est complet, les affirmations H_2—H_6 représentent des caractérisations des espaces de Hilbert et donc on voit que dans l'étude de l'orthogonalité dans ces espaces les cas H_2—H_6 deviennent triviaux. Par exemple, si X est complet et chaque sous-espace linéaire dense en X contient une base orthogonale, alors X est équivalent à un espace de Hilbert parce qu'on a H_3. Mais, quelquefois, il existe des sous-espaces linéaires denses en X qui contiennent des bases orthogonales sans que l'espace X soit équivalent à un espace de Hilbert. En conclusion, on remarque que la propriété H d'approximation a un rôle important pour la détermination des ces sous-espaces de X et, en général, dans la théorie des bases orthogonales pour les espaces à semi-normes hilbertiennes.

BIBLIOGRAPHIE

1. De Wilde M. — *Espaces de fonctions à valeurs dans un espace linéaire à semi-normes.* Mémoires de la Soc. Roy. des Sci. de Liège, 1966.
2. De Wilde M. — *Limite inductive d'espaces linéaires semi-normés.* Bull. Soc. Roy. Sci. de Liège, 7—8 (1963), p. 476—484.
3. Edwards R. E. — *Functional Analysis.* New York, 1965

4. Ghika Al. — *Sume proiective de spaţii vectoriale topologice.* Comunicările Acad. R. P. R 9_2 (1959), p. 1109—1112.
5. Ghika Al. — *Subspaţii vectoriale ortogonale în produse de spaţii hilbertiene.* Comunicările Acad. R.P.R., 9_2 (1959), p. 763—766.
6. Grothendieck A. — *Espaces vectoriels topologiques.* Cours. Sao Paolo, 1958.
7. Jones W. — *Direct products of linear spaces.* Canad. Journ. of Math., 19, 4 (1967), p. 769—773.
8. Jordan P., von Neumann J. — *On inner products in linear metric spaces.* Ann. of Math., 36, 2 (1935), p. 719—723.
9. Köthe G. — *Topologische lineare Räume.* I., § 19. Springer-Verlag, 1960
10. Pietsch A. — *Nukleare lokalconvexe Räume.* Akademie-Verlag, Berlin 1965.
11. Precupanu T. — *Sur les produits scalaires dans des espaces vector topologiques.* Rev. Roum. de Math. Pures et Appl., 13, 1 (1968), p. 85—90.

SPAŢII LINIARE CU SEMINORME HILBERTIENE

Rezumat

Se consideră un spaţiu liniar X peste corpul numerelor complexe C înzestrat cu o familie $P = \{p_\alpha;\ \alpha \in A\}$ de seminorme date de semi-produse scalare (def. 1) prin (1). În § 1 se dau proprietăţi generale ale acestor spaţii precizînd unele rezultate din [8] şi [11] (pentru a avea proprietăţile de permanenţă date prin prop. 3 se înzestrează suma directă, respectiv limita inductivă, prin seminorme de tipul (5')), iar în § 2 se expun teoremele de scufundare şi coincidenţă relativ la produse şi limite proiective de spaţii Hilbert sau pre-Hilbert aplicînd teoremele generale de la spaţiile local convexe din [9] şi respectiv [7]. Ultima parte, § 3, tratează proprietăţi ale spaţiilor cu seminorme hilbertiene (prop. 4) în raport cu un anumit tip de ortogonalitate (def. 8) iar în anumite condiţii se dă o teoremă de descompunere ortogonală a elementelor în raport cu un subspaţiu liniar închis (teorema 4). Unele caracterizări ale spaţiilor cu semi-norme hilbertiene care se reduc la o structură de spaţiu Hilbert sau pre-Hilbert sînt stabilite în teorema 5.