OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS PARTIELLEMENT PSEUDOLOCAUX ET PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUES

PAR

T. JUCAN

Dans cet article nous généralisons les résultats obtenus par Egorov dans [2]. On a étudié le cas des opérateurs partiellement hypoelliptiques dans des conditions du type H.E. donnés par Hörmander dans [5].

Notations. Dans ce qui suit on va employer les notations suivantes:

Par $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ on a noté des points de R^n. On va séparer x et ξ en deux groupes $x = (x', x'')$ et $\xi = (\xi', \xi'')$ où $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ et $x'' = (x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$; $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ et $\xi'' = (\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$, donc $R^n = R^p \times R^{n-p}$.

On note

$$(x, \xi) = x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3 + \ldots + x_n \xi_n \; ; \; \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) ;$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \; ; \; \partial_j = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \; ; D^\alpha = D_1^{\alpha_1}, \ldots, D_n^{\alpha_n} \; ; \; \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial_n^{\alpha_n}$$

$\mathcal{E}(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables définies dans un ouvert Ω et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{E}(\Omega)$ à support compact.

Par S on désigne l'espace des fonctions indéfiniment dérivables telles que $\sup_x |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| < +\infty$ pour tout α et β. $\mathcal{E}'(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega)$ et S' sont leurs duals.

Pour t et s réels on note:

$$\| u \|_{s,t}^2 = \int (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi''|^2)^t |\tilde{u}(\xi)|^2 \, d\xi .$$

Soit $H^{s,t}$ l'espace obtenu en complétant S dans cette norme.
Nous notons par $H^{\infty,t} = \bigcap_s H^{s,t}$ et $H^{\infty,-\infty} = \bigcup_t H^{\infty,t}$.

Le fait que $u \in H^{\infty,-\infty}$ veut dire que pour tous les s réels il y a un $t(s)$ de sorte que $u \in H^{s,t(s)}$.

Définition 1. Si Ω est ouvert on va noter par $H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$ les distributions $u \in S'$ pour lesquelles on a $\varphi u \in H^{\infty,-\infty}$ pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Définition 2. (voir [3]). Soit Ω un ouvert dans $R^n = R^p \times R^{n-p}$ et $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$; nous dirons que u est régulière en x' si pour tout couple d'ouverts $V \subset R^p$, $W \subset R^{n-p}$, $V \times W \subset \Omega$ et tout $\varphi \in \mathfrak{D}(W)$ et tout $\psi \in \mathfrak{D}(V)$ la distribution u définie par $u\,\varphi\,(\psi) = u\,(\varphi\,\psi)$ est régulière, ce qui est équivalent à $u \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$.

Nous considérons l'opérateur pseudo-différentiel

$$Au\,(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x,\xi)}\, a\,(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, d\,\xi.$$

Définition 3. L'opérateur $A : S' \to S'$ s'appelle pseudo-local relativement à x' si pour tout ouvert borné Ω on a

$$\{u \in S', u \equiv 0 \text{ dans } \Omega\} \Rightarrow Au \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Définition 4. L'opérateur $A : S' \to S'$ s'appelle partiellement hypoelliptique relativement à (x') s'il satisfait à la relation

$$\{u \in S',\ Au \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega)\} \Rightarrow u \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Pour ce qui suit on suppose que le symbole $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions suivantes (H.E.) :

1) $a\,(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times R^n)$,

2) Dans l'ouvert $\Omega \times R^n$ il y a des fonctions $M_j\,(x, \xi)$ telles que pour tous α et β on a

$$|\partial^\alpha D^\beta a\,(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,x}\, a\,(x, \xi)\, |\xi|^{-d|\alpha|}\, M^{\beta-\alpha}\,(x, \xi) \text{ pour } |\xi| > A_x,$$

$$1 \leqslant M_j\,(x, \xi) < C_x\,(1 + |\xi|)^{1-d},\ j = 1, \ldots, n,\ 0 < d < 1 \text{ et}$$

$$M^{\beta-\alpha}\,(x, \xi) = M_{\beta_1}, \ldots, M_{\beta_n} M^{-1}_{\alpha_1}, \ldots, M^{-1}_{\alpha_n},$$

où C_x, $C_{\alpha,\beta,x}$, A_x sont bornés quand x appartient à un compact $K \subset \Omega$.

3) Pour chaque compact $K \subset \Omega$ il y a les constantes non-négatives $m\,(K)$, $C_1\,(K)$ et $C_2\,(K) > 0$ de sorte qu'on a

$$C_2\,(K)\,|\xi|^{-m(K)} \leqslant a\,(x, \xi) \leqslant C_1\,(K)\,|\xi|^{m(K)}.$$

1. Pseudolocalité partielle de l'opérateur A

Lemme 1. Si l'opérateur A satisfait aux conditions 1) et 2) et $u(x)$ et $v\,(x) \in \mathfrak{D}(\Omega)$, la distance entre leurs supports étant $\rho > 0$, alors

$$(1.1) \qquad (Au, v) \leqslant C_{N,t}\, ||u||_{s,t}\, ||v||_{s,\,\frac{Nd}{2}-t}.$$

Démonstration. Dans les conditions du lemme il existe la relation

$$(1.2) \qquad \iiint \tilde{J}(\xi - \tau)\tilde{a}(\eta - \xi, \tau)\, \tilde{u}\,(\xi)\, \tilde{v}\,(\eta)\, d\,\xi\, d\,\eta\, d\,\tau = 0,$$

où la fonction $J\,(x) \in C_0^\infty\,(|x| < \rho)$ et $J\,(x) = 1$ pour $|x| < \frac{\rho}{2}$.

La fonction $J\,(x)$ satisfait aux relations (voir [6])

$$(1.3) \qquad (2\pi)^{-n} \int \tilde{J}\,(\xi - \tau)\, d\,\tau = 1 \text{ et } (2\pi)^{-n} \int \tilde{J}\,(\xi - \tau)\,(\tau - \xi)^\alpha\, d\tau =$$

$$= D^\alpha J\,(0) = 0, \text{ pour } |\alpha| > 0.$$

Si nous utilisons (1.2) et (1.3), on obtient

$$(Au, v) = (2\pi)^{-n} \iiint \tilde{a}\,(\eta - \xi, \xi)\, \tilde{u}\,(\xi)\, \tilde{v}\,(\eta)\, d\,\xi\, d\,\eta =$$

$$= (2\pi)^{-n} \iiint \tilde{J}(\xi - \tau) \Big| \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}\,(\eta - \xi, \xi)\,(\tau - \xi)^\alpha -$$

$$- \tilde{a}\,(\eta - \xi, \tau) \Big| \tilde{u}\,(\xi)\, \tilde{v}\,(\eta)\, d\,\xi\, d\,\eta\, d\tau.$$

En utilisant encore

$$|\tilde{a}\,(\eta - \xi, \tau) - \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} \tilde{a}^{(\alpha)}(\eta - \xi, \xi)\,(\tau - \xi)^\alpha| \leqslant$$

$$\leqslant C_N \sum_{|\alpha|<N} |\tilde{a}^{(\alpha)}\,(\eta - \xi, \xi + \theta\,(\tau - \xi))|\, |\tau - \xi)|^N$$

il résulte

$$|(Au, v)| \leqslant C_{N,t}\, ||u||_{s,t} ||v||_{s,\,\frac{Nd}{2}-t} \iiint |\tilde{J}(\xi - \tau)|^2 \sum_{|\alpha|=N} |\tilde{a}^{(\alpha)}\,(\eta - \xi, \xi +$$

$$+ \theta\,(\tau - \xi))\,|^2\, |\tau - \xi\,|^{2N}\,(1 + |\xi'|^2)^{-s}\,(1 + |\xi''|^2)^{-t}\,(1 + |\eta'|^2)^{-s}\,(1 +$$

$$+ |\eta''|^2)^{t-\frac{Nd}{2}} d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

Pour obtenir la relation (1.1) on va démontrer que

$$\iiint |\widetilde{J}(\xi-\tau)|^2 \sum_{|\alpha|=N} |\widetilde{a}^{(\alpha)}(\eta-\xi, \xi+\theta(\tau-\xi))|^2 |\tau-\xi|^{2N}(1+|\xi'|^2)^{-s}$$

$$(1+|\xi''|^2)^{-t}(1+|\eta'|^2)^{-s}(1+|\eta''|^2)^{-\frac{Nd}{2}+t}\, d\xi\, d\eta\, d\tau \leqslant \text{const.}$$

Pour démontrer cette dernière relation on a d'abord

$$E(\xi,\eta,\tau) = |\widetilde{J}(\xi-\tau)|^2 |\widetilde{a}^{(\alpha)}(\eta-\xi, \xi+\theta(\tau-\xi))|^2 |\tau-\xi)^{2N}(1+$$

$$+|\xi'|^2)^{-s}(1+|\xi''|^2)^{-t}(1+|\eta'|^2)^{-s}(1+|\eta''|^2)^{t-\frac{Nd}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C|\widetilde{J}(\xi-\tau)|^2(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}(1+|\xi'|+\theta(\tau'-\xi')|^2)^{-\frac{Nd}{2}}$$

$$(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|^2)^K|\tau-\xi|^{2N}(1+|\xi'|^2)^{-s}(1+|\xi''|^2)^{-t}(1+$$

$$+|\eta'|^2)^{-s}(1+|\eta''|^2)^{t-\frac{Nd}{2}}$$

où nous avons utilisé la relation

$$|\widetilde{a}^{(\alpha)}(\eta-\xi, \xi+\theta(\tau-\xi))|^2 \leqslant C(1+|\eta-\xi|^2)^{-l}(1+|\xi'+\theta(\tau'-\xi')|^2)^{-\frac{Nd}{2}}$$

$$(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|^2)^K.$$

Pour évaluer cette expression nous considérons deux cas :

I) Pour $|\theta(\tau-\xi)| > \frac{1}{2}|\xi|$.

Dans ce cas nous avons

$$(1+|\xi'+\theta(\tau'-\xi')|^2)^{-\frac{Nd}{2}} < 1.$$

$$(1+|\eta'|^2)^{-s} \leqslant (1+|\xi'-\eta'|^2)^{|s|}(1+|\xi'|^2)^{-s} \leqslant (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi'|^2)^{-s},$$

$$(1+|\xi'|^2)^{-2s} \leqslant (1+|\xi'|^2)^{2|s|} \leqslant (1+|\xi|^2)^{2|s|} \leqslant C(1+|\tau-\xi|^2)^{2|s|}$$

$$\left(\frac{1+|\xi''|^2}{1+|\eta''|^2}\right)^{-t} \leqslant (1+|\xi''-\eta''|^2)^{|t|} \leqslant (1+|\xi-\eta|^2)^{|t|},$$

$$(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|^2)^K \leqslant C(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|)^{2K} \leqslant C(1+|\xi|+$$

$$+|\theta(\tau-\xi)|)^{2K} \leqslant C_1(1+|\tau-\xi|^2)^K.$$

Si nous utilisons ces évaluations, on obtient pour $E(\xi,\eta,\tau)$ $E(\xi,$

$$\eta,\tau) \leqslant C|\widetilde{J}(\xi-\tau)|^2(1+|\eta-\xi|^2)^{-l+t+s+n}(1+|\xi|^2)^{-n}(1+|\eta|^2)^{-n}(1+$$

$$+|\tau-\xi|^2)^{N+2|s|+K+2n}.$$

II) Pour $|\theta(\tau-\xi)| \leqslant \frac{1}{2}|\xi|$ nous avons les évaluations suivantes.

$$\left(\frac{1+|\xi''|^2}{1+|\eta''|^2}\right)^{-t} \leqslant (1+|\xi''-\eta''|^2)^{|t|} \leqslant (1+|\xi-\eta|^2)^{|t|},$$

$$(1+|\eta'|^2)^{-s} \leqslant (1+|\eta'-\xi'|^2)^{|s|}(1+|\xi'|^2)^{-s} \leqslant (1+|\eta-\xi|^2)^{|s|}$$

$$(1+|\xi'|^2)^{-s},\ (1+|\xi'|^2)^{-2s} \leqslant (1+|\xi'|^2)^{2|s|} \leqslant (1+|\xi|^2)^{2|s|},$$

$$(1+|\xi+\theta(\tau-\xi)|^2)^K \leqslant C(1+|\xi|+|\theta(\tau-\xi)|)^{2K} \leqslant C(1+|\xi|^2)^K,$$

$$(1+|\xi'+\theta(\tau'-\xi')|^2)^{-\frac{Nd}{2}}(1+|\xi''+\theta(\tau''-\xi'')|^2)^{-\frac{Nd}{2}} \leqslant (1+|\xi+$$

$$+\theta(\tau-\xi)|^2)^{-\frac{Nd}{2}} \leqslant C(1+|\xi|^2)^{-\frac{Nd}{2}}.$$

Pour évaluer $(1+|\xi''+\theta(\tau''-\xi'')|)^{Nd}$ nous allons utiliser l'inégalité algébrique

$$(1+|\xi''+\theta(\tau''-\xi'')|)^{Nd} \leqslant (1+|\xi''|)^{Nd}(1+|\tau''-\xi''|)^{Nd} \leqslant C(1+$$

$$+|\xi''|^2)^{\frac{Nd}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{\frac{Nd}{2}}$$

et

$$\left(\frac{1+|\xi''|^2}{1+|\eta''|^2}\right)^{\frac{Nd}{2}} \leqslant (1+|\xi''-\eta''|^2)^{\frac{Nd}{2}} \leqslant (1+|\eta-\xi|^2)^{\frac{Nd}{2}}.$$

Donc, dans ce cas, nous avons pour $E(\xi,\eta,\tau)$ l'évaluation suivante :

$$E(\xi,\eta,\tau) < C|\widetilde{J}(\xi-\tau)|^2(1+|\eta-\xi|^2)^{-l+|t|+|s|+\frac{Nd}{2}}(1+$$

$$+|\xi|^2)^{K+2|s|-\frac{Nd}{2}}(1+|\tau-\xi|^2)^{N+\frac{Nd}{2}}.$$

Si nous prenons dans le cas I) $l > |t|+|s|+n$ et dans le cas II) $-l+|t|+|s|+\frac{Nd}{2} < -\frac{n}{2}$ et N suffisamment grand ainsi que $k+2s-$

$-\frac{Nd}{2} < -\frac{n}{2}$ et si nous remarquons que $J(x)$ est une fonction à support compact, nous obtenons le résultat que $E(\xi, \eta, \tau)$ est intégrable en chaque cas I, II, succesivement relativement à τ, η, ξ, donc :

$$\iiint E(\xi, \eta, \tau)\, d\xi\, d\eta\, d\tau < C. \qquad \text{q. e. d.}$$

Corollaire 1. L'opérateur A avec le symbole $a(x, \xi)$ que satisfait 1) et 2) est partiellement pseudolocal relativement à x'.

Démonstration. Il faudra démontrer que

$$u \in H^{-\infty,-\infty} \text{ et } u \equiv 0 \text{ dans } \Omega \Rightarrow Au \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega).$$

De $u \in H^{-\infty,-\infty}$ il résulte $u \in H^{s,t}$.

Soit $x_0 \in \text{Int}\,\Omega$. Il en résulte qu'il y a un voisinage $\omega_\delta \subset \Omega$ qui contient x_0. Considérons la fonction $\psi(x) \in C_0^\infty(\omega_\delta)$ et $\psi(x) = 1$ dans un voisinage moindre.

Pour tout $v \in S$ à support dans ω_δ nous avons

$$\forall r < s, \; |(\psi Au, v)| = |(Au, \psi v)| \leqslant \|u\|_{r,t}\, \|\psi v\|_{r, \frac{Nd}{2}-t}, \leqslant C\, \|v\|_{r, \frac{Nd}{2}-t},$$

d'où il résulte que $\psi Au \in H^{-r,t-\frac{Nd}{2}}$, $\psi Au \in H^{\infty,-\infty} \Rightarrow Au \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\omega_\delta)$.

Corollaire 2. L'opérateur A avec le symbole $a(x, \xi)$ avec les propriétés 1), 2) et 3) satisfait à

(2.1) $\qquad u \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega) \Rightarrow A(\psi u) \in H^{\infty,-\infty}_{\text{loc}}(\Omega)$, où $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$.

Démonstration. Pour obtenir la relation (2.1) nous allons démontrer la relation

(2.2) $\qquad \|\varphi A(\psi u)\|_{s,t} \leqslant C\, \|\psi u\|_{s+m,t+m}$, où $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, pour tout s.

Pour démontrer cette inégalité, nous avons :

$$\|\varphi A(\psi u)\|^2_{s,t} \leqslant C \int (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi''|^2)^t \iint \tilde{\varphi}(\xi - \eta)\, \tilde{a}(\tau - \eta, \tau)\, \tilde{\psi} u(\tau)$$

$$d\tau\, d\eta|^2\, d\xi \leqslant C \iiint (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi''|^2)^t\, |\varphi(\xi - \eta)|^2\, |\tilde{a}(\tau - \eta, \tau)|^2 |\tilde{\psi} u(\tau)|^2$$

$$d\xi\, d\eta\, d\tau \leqslant C \iiint (1 + |\xi'|^2)^s (1 + |\xi''|^2)^t (1 + |\xi - \eta|^2)^{-t}$$

$$(1 + |\tau - \eta|^2)^{-r} (1 + |\tau|^2)^m |\tilde{\psi} u(\tau)|^2\, d\xi\, d\eta\, d\tau.$$

On va évaluer l'expression contenue sous l'intégrale :

$$(1 + |\xi'|^2)^s \leqslant (1 + |\xi' - \eta'|^2)^s (1 + |\eta'|^2)^s \leqslant (1 + |\xi - \eta|^2)^{|s|} (1 + |\tau -$$

$$- \eta|^2)^{|s|} (1 + |\tau'|^2)^s,$$

$$(1 + |\xi''|^2)^t \leqslant (1 + |\xi'' - \eta''|^2)^{|t|} (1 + |\eta''|^2)^t \leqslant (1 + |\xi - \eta|^2)^{|t|} (1 + |\tau -$$

$$- \eta|^2)^{|t|} (1 + |\tau''|^2)^t,$$

$$(1 + |\tau|)^m \leqslant (1 + |\tau'|^2)^m \; (1 + |\tau''|^2)^m,$$

Si nous utilisons ces évaluations nous obtenons :

$$\|\varphi A(\psi u)\|^2_{s,t} \leqslant C \iiint (1 + |\xi - \eta|^2)^{-t+|s|+|t|} (1 + |\tau - \eta|^2)^{-r+|s|+|t|}$$

$$|\tilde{\psi u}(\tau)|^2 (1 + |\tau'|^2)^{s+m} (1 + |\tau''|^2)^{t+m} d\xi\, d\eta\, d\tau \leqslant C_{s,t}\, \|\psi u\|_{s+m,\, t+m}. \quad \text{q. e. d.}$$

3. Opérateurs pseudo-différentiels partiellement hypoelliptiques

En employant la fonction $a(x, \xi)$ on définit les fonctions $q_j(x, \xi)$. Soit $\psi(\xi) \in \mathcal{E}(R^n)$, qui est nulle dans un voisinage de l'origine qui contient les zéros de la fonction $a(x, \xi)$ pour $x \in \omega$, où $\bar{\omega} \subset \Omega$ et qui a la valeur 1 en dehors d'un voisinage plus grand.

Soit $\zeta(x) \in \mathcal{D}(\omega)$, où $\zeta(x) = 1$, pour $x \in \omega' \subset \omega$, alors on définit la suite des fonctions dérivables $q_0(x, \xi), \ldots, q_j(x, \xi)$ par les relations

$$q_0(x, \xi) = \frac{\psi(\xi)}{a(x, \xi)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$q_{j+1}(x, \xi) = -\frac{1}{a(x,\xi)} \sum_{|\alpha|=1}^{Nj} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha q_j(x, \xi)\, D^\alpha(\zeta(x)\, a(x, \xi)),\; j \geqslant 0.$$

Lemme 2.1. *Si $a(x, \xi)$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3), alors pour $q_j(x, \xi)$ définis ci-dessus, nous avons les évaluations*

(2.1) $\qquad |\delta^\alpha D^\beta q_j(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,x,j}\, |\xi'|^{-d(|\alpha|+j)}\, M^{\beta-\alpha}(x, \xi)/a(x, \xi)$

et

(2.2) $\qquad |D^\beta a(x, \xi)\, q_j(x, \xi)| < C_{\beta,x,j}\, |\xi'|^{-dj}\, M^\beta(x, \xi).$

Démonstration. Pour la démonstration de ces relations voir [2] et [5].

Remarque. La relation (2.1) peut être exprimée encore :

$$(2.1)' \qquad |\partial^\alpha D^\beta q_j(x,\xi)| < C_{\alpha,\beta,x,j}\, |\xi'|^{-d(|\alpha|+|\beta|)} M^{\beta-\alpha}(x,\xi)\, |\xi|^m .$$

Lemme 2.2. *Soient A et Q les opérateurs pseudo-différentiels avec les symboles $a(x,\xi)$ et $q(x,\xi)$ satisfaisant dans Ω aux conditions 1) et 2) et la fonction $\xi(x) \in \mathfrak{D}(\Omega)$.*

Alors l'opérateur pseudo-différentiel $u(x) \to Q\,\xi\, Au(x)$ a le symbole

$$(2.3) \qquad \sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha q(x,\xi)\, D^\alpha [\zeta(x)\, a(x,\xi)] + t_N(x,\xi)$$

et l'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur avec le symbole $t_N(x,\xi)$ tend vers $-\infty$ pour N tendant vers ∞.

Démonstration. Pour la première partie de ce lemme voir [2]. De [2] il résulte que

$$Q\,Au(x) = (2\pi)^{-n} \iiint q(x,\eta+\xi)\, r(y,\eta)\, e^{i(x-y,\xi)}\, e^{i(x,\eta)}\, \tilde{u}(\eta)\, dy\, d\xi\, d\eta .$$

Il faut démontrer que l'opérateur

$$(2.4) \qquad u(x) \to (2\pi)^{-n} \iiint t_N(x,\xi,\eta)\, r(y,\eta)\, e^{i(x-y,\xi)}\, e^{i(x,\eta)}\, \tilde{u}(\eta)\, dy\, d\xi\, d\eta =$$

$$= (2\pi)^{-n} \iint t_N(x,\xi,\eta)\, \tilde{r}(\xi,\eta)\, e^{i(x,\eta)}\, e^{i}(x,\xi)\, \tilde{u}(\eta)\, d\xi\, d\eta ,$$

a l'ordre qui tend vers $-\infty$ pour N tendant vers ∞, où

$$(2.5) \qquad t_N(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{\partial^\alpha q(x,\eta+\theta\xi)}{\partial \eta^\alpha}\, \xi^{N+1} .$$

En utilisant la relation (2.5) nous allons évaluer le symbole de l'opérateur (2.4) :

$$\left| \int t_N(x,\xi,\eta)\, \tilde{r}(\xi,\eta)\, e^{i(x,\xi)} d\xi \right| < C_{N,l} \int (1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}} (1+|\eta'+\theta\xi'|^2)^{-\frac{Nd}{2}}$$

$$(1+|\eta+\theta\xi|^2)^{n/2} (1+|\xi|^2)^{-l/2} (1+|\eta|^2)^{k/2}\, d.$$

On va évaluer l'expression contenue sous l'intégrale

$$F(\xi,\eta,\xi',\eta') = (1+|\xi|^2)^{\frac{N+1}{2}} (1+|\eta'+\theta\xi'|^2)^{-\frac{Nd}{2}} (1+|\eta+\theta\xi|^2)^{k/2} (1 +$$

$$+ |\xi|^2)^{-l/2} (1+|\eta|^2)^{r/2} .$$

Si nous utilisons l'inégalité algébrique $\dfrac{1+|\eta'|}{1+|\theta\xi'|} < 1+|\eta'+\theta\xi'|$ il en résulte

$$(1+|\eta'+\theta\xi'|)^{-Nd} \leqslant (1+|\eta'|)^{-Nd}\, (1+|\theta\xi'|)^{Nd} \leqslant C\,(1+|\xi|^2)^{Nd/2} (1 +$$

$$+ |\eta'|^2)^{-\frac{Nd}{2}} .$$

Pour évaluer $(1+|\eta+\theta\xi|)^k$ nous allons distinguer deux cas :

a) $\dfrac{|\eta|}{2} \leqslant \theta\,|\xi|$; alors

$$(1+|\eta+\theta\xi|)^k \leqslant (1+|\eta|+|\theta\xi|)^k \leqslant (1+3|\theta\xi|)^k \leqslant C(1+|\xi|)^k ;$$

b) $\dfrac{|\eta|}{2} \geqslant |\theta\xi|$.

Dans ce cas on a

$$(1+|\eta+\theta\xi|)^k \leqslant (1+|\eta|+|\theta\xi|)^k \leqslant 1+\frac{3}{2}|\eta|)^k \leqslant C\,(1+|\eta|^2)^{k/2} .$$

Dans le cas a) nous obtenons pour $F(\xi,\eta,\xi',\eta')$ l'évaluation

$F(\xi,\eta,\xi',\eta') \leqslant C_1\,(1+|\xi|^2)^{\frac{N+1-l+k+Nd}{2}} (1+|\eta'|^2)^{\frac{-Nd+r}{2}} (1+|\eta''|^2)^{r/2}$. On va choisir l suffisamment grand de manière que l'inégalité $\dfrac{N+1-l+k+Nd}{2} < -\dfrac{n}{2}$ puisse avoir lieu. Ainsi l'expression $F(\xi,\eta,\xi',\eta')$ est intégrable relativement à ξ et on obtient

$$\int F(\xi,\eta,\xi',\eta')\, d\xi < C\,(1+|\eta'|^2)^{\frac{-Nd+r}{2}} (1+|\eta''|^2)^{r/2}$$

d'où il résulte que l'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur (2.4) tend vers $-\infty$ pour N tendant vers ∞. Dans le cas b) on va choisir l de manière qu'il satisfasse à l'inégalité $(N+1-l+Nd)/2 < -n/2$, donc l'expression $F(\xi,\eta,\xi',\eta')$ est intégrable relativement à ξ et on obtient

$$\int F(\xi,\eta,\xi',\eta')\, d\xi \leqslant C\,(1+|\eta'|^2)^{-\frac{Nd+k+r}{2}} (1+|\eta''|^2)^{\frac{k+r}{2}}$$

d'où il résulte que l'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur (2.4) tend vers $-\infty$ pour N tendant vers ∞.

Lemme 2.3. *L'ordre partiel relativement à x' de l'opérateur qui a le symbole $a(x,\xi)\, q_j(x,\xi) + 1 - \psi(\xi)$ tend vers $-\infty$ pour j tendant vers ∞.*

Démonstration. $1-\psi(\xi)$ est une fonction à support compact, donc l'opérateur avec le symbole $1-\psi(\xi)$ a l'ordre $-\infty$.

De la relation (2.2) du lemme 2.1, il résulte que l'ordre partiel de l'opérateur qui a le symbole $a(x,\xi)\, q_j(x,\xi)$ tend vers $-\infty$ pour j tendant vers ∞.

Théorème 2.1. *L'opérateur A avec le symbole $a(x,\xi)$ qui satisfait aux conditions* H.E. 1), 2) *et* 3) *est partiellement hypoelliptique relativement à x'.*

Démonstration. Soit la fonction $\psi(\xi) \in \xi(R^n)$ qui a été définie antérieurement. Soit $\zeta(x) \in \mathcal{D}(\omega)$, avec $\zeta(x) = 1$, pour $x \in \omega_1 \subset \omega$ et les fonctions $q_0(x,\xi), \ldots, q_{j+1}(x,\xi)$ qui sont définies par les relations

$$q_0(x,\xi) = \frac{\psi(\xi)}{a(x,\xi)}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$q_{j+1}(x,\xi) = -\frac{1}{a(x,\xi)} \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha q_j(x,\xi)\, D^\alpha [\zeta(x)\, a(x,\xi)], \quad j \geqslant 0,$$

où N_j est choisi tel que les opérateurs pseudo-différentiels dont le symbole est la différence entre le symbole de l'opérateur $Q'_j \zeta A$ (Q' avec le symbole $q_j(x,\xi)$) et la fonction

$$\sum_{|\alpha|=0}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha q_j(x,\xi)\, D^\alpha [\zeta(x)\, a(x,\xi]$$

ont l'ordre négatif.

On peut écrire ainsi ces égalités :

$$a(x,\xi)\, q_0(x,\xi) = \psi(\xi),$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a(x,\xi)\, q_{j+1}(x,\xi) + \sum_{|\alpha|=1}^{N_j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha q_j(x,\xi)\, D^\alpha [\zeta(x)\, a(x,\xi)] = 0, \qquad j \geqslant 0$$

Si nous sommons ces égalités, nous obtenons

$$Q_j \zeta A + R_j + S_j + T_j = I,$$

où :

Q_j est l'opérateur avec le symbole $q_0(x,\xi) + \ldots + q_j(x,\xi)$,

A est l'opérateur avec le symbole $a(x,\xi)$,

R_j est l'opérateur avec le symbole $a(x,\xi)\, q_{j+1}(x,\xi) + 1 - \psi(\xi)$

T_j est l'opérateur $T_{N_0} + \ldots + T_{N_j}$,

S_j est l'opérateur avec le symbole $a(x,\xi)\, q_0(x,\xi) + \ldots +$

$$+ q_j(x,\xi)\, [1 - \zeta(x)].$$

Pour $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\omega_1)$ nous avons

$$\varphi(x) = p^* \zeta Q^* \varphi(x) + R_j^* \varphi(x) + S_j^* \varphi(x) + T_j^* \varphi(x).$$

Soit $u \in H^{-\infty,-\infty}_{loc}(\omega)$; il en résulte qu'il existe s et $t(s)$ tels que $\zeta u \in H^{s,t}$ pour $\zeta(x) \in \mathcal{D}(\omega)$.

Nous allons démontrer que dans un ouvert quelconque $\omega_0 \subset \omega$, on a $u(x) \in H^{\infty,-\infty}_{loc}(\omega_0)$.

Pour démontrer cette relation nous considérons :

$$(u,\varphi) = (\zeta u, \varphi) = (\zeta u, A^* \zeta Q_j^* \varphi + R_j^* \varphi + S_j^* \varphi + T_j^* \varphi) = (Q_j \zeta A (\zeta u), \varphi) +$$
$$+ ((R_j + S_j + T_j)(\zeta u), \varphi).$$

Pour $x \in \omega_1$, il en résulte que $S_j(\zeta u)(x) = 0$.

Pour $x \in \omega_1$ on sait que $u(x) - \zeta u(x) = 0$, donc :

$$A(\zeta u) = Au - A(1 - \zeta) u.$$

Parce que $Au \in H^{\infty,-\infty}_{loc}(\omega)$ et $A(1-\zeta)\, u\ H^{\infty,-\infty}_{loc}(\omega_1)$ il en résulte que $A(\zeta u) \in H^{\infty,-\infty}_{loc}(\omega_1)$. Du corollaire 2 il résulte que $Q \zeta A(\zeta u) \in H^{\infty,-\infty}_{loc}(\omega_1)$.

Nous allons choisir $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_j$ et j assez grands afin que l'ordre partiel relativement à x' de R_j et T_j soit < -1.

Il en résulte du fait que $\zeta u(x) \in H^{s,t}$ et de la relation (*) que $u(x) \in H^{s+1,t+r}$, donc si nous choisissons une succession d'ouverts $\omega \supset \omega_1 \supset \omega_2 \ldots \supset \omega_0$ et nous répétons ce procédé nous obtenons $u \in H^{\infty,-\infty}$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Barbu V. — *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques*. An. şt. Univ. Iaşi, tom XII (1966), pp. 293–301.
2. Егоров Ю. В. — *О гипоэллиптических псевдодифференциальных операторах*. Труды Московского математического общества. Том XVI (1967), стр. 99.
3. Garding L., Malgrange B. — *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques*. Math. Scand., 9 (1961), pp. 5–21.
4. Hörmander L. — *Pseudo-differential operators*. Comm. pure and appl. Math., 18 (1965), p. 501.
5. Hörmander L. — *Hypoelliptic differential operators*. Ann. de l'Institut Fourier, 11 (1961), pp. 477–492.
6. Kohn J. J. and Nirenberg L. — *An algebra of pseudo-differential operators*. Comm. pure and appl. Math., 18 (1965), p. 355.
7. Волевич Л. П. — *Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов*. Труды Московского математического общества. XVI (1967), стр. 51–98.

OPERATORI PSEUDODIFERENȚIALI PARȚIAL PSEUDOLOCALI ȘI PARȚIAL HIPOELIPTICI

Rezumat

În această lucrare se studiază proprietățile de parțială pseudolocalitate și parțială hipoelipticitate în condiții de tip HÖ. Aceste rezultate extind la cazul parțial rezultatele date de Egorov în [2] pentru cazul global.

REMARKS ON A HOMOLOGICAL DUALITY OF ABSTRACT BANACH MANIFOLDS

BY

MIRCEA CRAIOVEANU

In this paper we shall formulate a duality theorem for abstract Banach manifolds, which is a homological correspondent of Eells' duality theorem [2] for concrete Hilbert manifolds. The demonstration is analogous to that of Eells, but makes use of the existence of tubular neighbourhoods in C^k-manifolds ($k \geq 2$) modeled on Banach spaces [4, p. 73] and of the existence of the general Thom-Gysin isomorphism [9, p. 283].

1. Let Y be a paracompact, connected, separable C^∞-manifold [1] modeled on a separable Banach space $\mathbf{E}$. It is known that Y has the homotopy type of a countable, locally finite, simplicial polyhedron [3]. On the other hand, Y is a paracompact Banach manifold, hence it is an absolute neighbourhood retract [7], i.e. given a closed subset C of a metrizable space M and a continuous map $f : C \to Y$, there is a neighbourhood U of C in M and a continuous map $F : U \to Y$ which extends f. We also suppose that $\mathbf{E}$ is C^∞-smooth [2] i. e. $\mathbf{E}$ satisfies one of the following three equivalent conditions:

1) There is a non-trivial real valued C^∞-function on $\mathbf{E}$, $f : \mathbf{E} \to \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ is the field of the real numbers) with bounded support,

2) Any open subset O of $\mathbf{E}$ admits C^∞-partitions of unity,

3) For any continuous map g of O into a Banach space $\mathbf{F}$ and any number $\varepsilon > 0$, there is a C^∞-map $h : O \to \mathbf{F}$ such that $\|g(o) - h(o)\|_F < \varepsilon$ for all $o \in O$.

---

[1] It is enough to suppose that Y is of class C^k ($k \geq 2$).

[2] It is not known if there exists nonseparable C^k-smooth Banach spaces with $k \geq 1$ [6].