În contextul acestei configurații se stabilește un izomorfism canonic între grupurile de omologie singulară relativă de dimensiune q cu coeficienți locali ale perechii $(Y, Y - X)$ și grupurile de omologie singulară absolută de dimensiune $q - p$ ale lui X. El exprimă un anumit tip de dualitate omologică ce constituie corespondentul omologic al teoremei de dualitate a lui Eells pentru varietăți Hilbert concrete.

Se dovedește invarianța acestui izomorfism în raport cu aplicațiile transversale de-a lungul lui X.

Cu ajutorul acestui izomorfism se construiește un anumit șir exact care permite să obținem, în cazul cînd Y este o retractă absolută, un alt izomorfism γ_* pentru orice $q > 1$.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES COURBES DANS L'ESPACE BICENTRAL n-DIMENSIONNEL. I

PAR

E. MACOVEI

On appelle espace bicentral à n-dimensions un espace Klein n-dimensionnel dont le groupe fondamental est le groupe projectif qui conserve deux points appelés centres de l'espace. On définit un repère dans l'espace bicentral n-dimensionnel comme un repère projectif formé de $n + 2$ points analytiques : A_i, $U (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ dont A_{n-1} et A_n coïncident avec les centres de l'espace. On appelle axe de l'espace la droite $A_{n-1}A_n$.

Si l'on considère un tel repère comme repère naturel de l'espace, alors les équations du groupe fondamental sont :

$$\rho x'_i = \sum_j a^j_i x_j \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} a^{n-1}_i = 0, & (i = 0, 1, \ldots, n-2, n), \\ a^n_i = 0, & (i = 0, 1, \ldots, n-1). \end{cases} \tag{2}$$

Ce groupe dépend de n^2 paramètres, dont ceux qui déterminent la position des points $A_0, \ldots, A_{n-2}, U$ dans l'espace sont des paramètres secondaires et la position des points qui appartiennent à une courbe de l'espace est déterminée par le paramètre principal.

Le mouvement du repère choisi plus haut, est donné par les formules :

$$dA_i = \omega^j_i A_j \quad (i, j = 0, 1, \ldots, n), \tag{3}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} \omega^j_{n-1} = 0, & (j = 0, 1, \ldots, n-2, n), \\ \omega^j_n = 0, & (j = 0, 1, \ldots, n-1), \end{cases} \tag{4}$$

où ω_i^j sont des formes Pfaff qui dépendent de tous les paramètres du groupe. Ces formes satisfont aux équations de structure de l'espace :

$$(5)\quad \begin{cases} D\,\omega_i^j = [\omega_k^j\,\omega_i^k], \\ D\,\omega_{n-1}^j = 0, \\ D\,\omega_n^j = 0, \\ D\,\omega_0^1 = [\omega_1^1 - \omega_0^0,\ \omega_0^1] + [\omega_2^1,\ \omega_0^2] + \ldots + [\omega_{n-1}^1,\ \omega_0^{n-2}]. \ (i, j, k = 0, 1, \ldots, n), \end{cases}$$

Soit C une courbe définie par rapport à un repère naturel par les équations :

$$(6)\qquad x_i = x_i(t),$$

où $x_i(t)$ sont des fonctions analytiques du paramètre t sur l'intervalle (t_0, t_1).

On considère la courbe C comme étant engendrée par ses éléments osculateurs définis par l'ensemble : un point de la courbe, la tangente en ce point, E_2 osculateur en ce point, ..., E_{n-2} osculateur en ce point et E_{n-1} osculateur en ce point qui contient le centre de l'espace A_{n-1} [3].

La détermination successive du repère canonique attaché à la courbe C fait coïncider le sommet A_0 avec le point générique de la courbe et fait prendre le point A_1 sur la tangente à la courbe, le point A_2 dans E_2 osculateur, ..., le sommet A_{n-2} dans E_{n-2} osculateur.

Une telle particularisation du repère est possible pour toutes les courbes gauches de l'espace bicentral n-dimensionnel en un point ordinaire d'une telle courbe. Les droites, les courbes planes, ..., les courbes situées complètement dans un hyperplan E_{n-1} sont exclues successivement des considérations.

La particularisation du repère apporte une suite de relations entre les pfaffiens ω_i^j qui conduit à les définir à l'aide du paramètre principal sur la courbe et de ses invariants projectifs [2].

De cette manière on a

$$(7)\qquad \omega_i^j = 0 \text{ pour } i < j - 1 \text{ et } j = 2, 3, \ldots, n.$$

A l'aide de ces relations (7) par une dérivation extérieure compte tenu des particularisations du repère et en appliquant le lemme de Cartan on trouve :

$$(8)\qquad \omega_i^j = \omega^i \begin{cases} j = 2,3, \ldots, n-1 \\ i = 1,2, \ldots, n-2 \end{cases} \text{ et } \omega^1 = \omega_0^1.$$

Par le même procédé de (8) on déduit :

$$\begin{cases} \omega_2^2 - 2\omega_1^1 + \omega_0^0 = b_2\omega^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_{n-2}^{n-2} - 2\omega_{n-3}^{n-3} + \omega_{n-1}^{n-4} = b_{n-2}\,\omega^1, \end{cases}$$

et l'on peut écrire : $b_2 = b_3 = \ldots = b_{n-2} = 0$; donc on obtient

$$(9)\qquad \omega_i^i - \omega_{i-1}^{i-1} = \omega_{i-1}^{i-1} - \omega_{i-2}^{i-2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-2.$$

Les relations (9) conduisent aussi à :

$$(10)\quad \begin{cases} \omega_3^2 - 3\omega_2^1 + 3\omega_1^0 = 0, \\ \omega_4^3 - 3\omega_3^2 + 3\omega_2^1 - \omega_1^0 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -3\omega_{n-2}^{n-3} + 3\omega_{n-3}^{n-4} - \omega_{n-4}^{n-5} = 0. \end{cases}$$

La dérivation extérieure des relations (10) et l'application du lemme de Cartan donnent :

$$\begin{cases} \omega_4^2 - 4\omega_3^1 + 6\omega_2^0 = \varepsilon_2\omega^1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -6\omega_{n-2}^{n-4} + 4\omega_{n-3}^{n-5} - \omega_{n-4}^{n-6} = \varepsilon_{n-2}\ \omega^1 \end{cases}$$

où l'on considère deux cas.

1) S'il y a des ε_i qui ne sont pas égaux à zéro, alors on peut déterminer :

$$(11)\quad \begin{cases} \omega_2^0 = \omega_{n-2}^{n-4} = \omega^1, \\ \omega_3^1 = \omega_4^2 = \ldots = \omega_{n-3}^{n-5} = 0. \end{cases}$$

A l'aide des relations (11) par la dérivation extérieure et par l'utilisation du lemme de Cartan, on obtient :

$$(12)\quad \begin{cases} \omega_1^1 - \omega_0^0 = 0, \quad \omega_3^0 = \omega_{n-2}^{n-5} = k_1\omega^1, \\ \omega_4^1 = \omega_5^2 = \ldots = \omega_{n-3}^{n-6} = 0 \end{cases}$$

et k_1 est un invariant projectif. De la première relation (12) on peut déduire :

$$(13)\qquad \omega_1^0 = \frac{1}{2}\,\rho\,\omega^1,$$

où ρ est un invariant projectif. Les autres relations de (12) conduisent à :

$$(14)\quad \begin{cases} \omega_4^0 = \omega_{n-2}^{n-6} = k_2\omega^1, \\ \omega_5^1 = \omega_6^2 = \ldots = \omega_{n-3}^{n-7} = 0, \end{cases}$$

avec k_2 invariant projectif.

Dans l'étape finale, on détermine :

$$(15)\qquad \omega_{n-3}^0 = \omega_{n-2}^1 = k_{n-5}\omega^1, \quad \omega_{n-2}^0 = k_{n-4}\omega^1,$$

où k_{n-4}, k_{n-5} sont des invariants projectifs.

Le pfaffien ω^1 est une différentielle exacte et l'on note $\omega^1 = ds$, s étant l'arc projectif sur la courbe C.

Les équations de mouvement du repère canonique d'ordre n déterminé plus haut sont :

$$
(16)\quad \begin{cases}
dA_0 = \omega^1 A_1, \\
dA_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^1 A_0 + \omega^1 A_2, \\
dA_2 = \omega^1 A_0 + \omega_2^1 A_1 + \omega^1 A_3, \\
dA_3 = k_1\omega^1 A_0 + \omega_3^2 A_2 + \omega^1 A_4, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
dA_{n-3} = k_{n-5}\,\omega^1 A_0 + \omega_{n-3}^{n-4} A_{n-4} + \omega^1 A_{n-2}, \\
dA_{n-2} = k_{n-4}\,\omega^1 A_0 + k_{n-3}\,\omega^1 A_1 + \dots + \dots + k_1\omega^1 A_{n-5} + \\
\qquad + \omega^1 A_{n-4} + \omega_{n-2}^{n-3} A_{n-3} + \omega^1 A_{n-1}, \\
dA_{n-1} = \qquad + \omega_{n-1}^{n-1} A_{n-1}, \\
dA_n = \qquad + \omega_n^n A_n.
\end{cases}
$$

II) Si tous les z_i sont égaux à zéro on a :

$$
(18)\qquad \omega_2^0 = \omega_3^1 = \dots = \omega_{n-2}^{n-1} = 0.
$$

On déduit des relations (18), par dérivation extérieure et en utilisant le lemme de Cartan :

$$
\omega_3^0 = \lambda_3\omega^1, \quad \omega_4^1 = \lambda_4\,\omega^1, \ \dots, \ \omega_{n-2}^{n-5} = \lambda_{n-2}\,\omega^1
$$

et on peut de nouveau distinguer deux cas :

I') S'il y a des λ_i qui ne sont pas égaux à zéro, alors on peut ajouter aux relations obtenues jusqu'ici les relations suivantes :

$$
(19)\quad \begin{cases}
\omega_3^0 = \omega_{n-2}^{n-5} = \omega^1, \quad \omega_4^1 = \dots = \omega_{n-3}^{n-6} = 0, \\
\omega_1^1 = \omega_0^0 = 0, \quad \omega_1^0 = \frac{1}{2}\rho\,\omega^1, \\
\omega_4^0 = \omega_{n-2}^{n-6} = k_2\,\omega^1, \quad \omega_5^1 = \dots = \omega_{n-3}^{n-7} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega_{n-3}^0 = \omega_{n-2}^1 = k_{n-5}\,\omega^1, \quad \omega_{n-2}^0 = k_{n-4}\,\omega^1,
\end{cases}
$$

où ρ, k_2, k_3, ..., k_{n-4} sont des invariants projectifs.

II') Si tous les λ_i sont égaux à zéro, alors on peut ajouter aux relations précédentes les relations suivantes :

$$
(20)\quad \begin{cases}
\omega_3^0 = \omega_4^1 = \dots = \omega_{n-2}^{n-5} = 0, \\
\omega_4^0 = \omega_{n-2}^{n-6} = \omega^1, \quad \omega_5^1 = \dots = \omega_{n-3}^{n-7} = 0, \\
\omega_5^0 = \omega_{n-2}^{n-7} = k_3\,\omega^1, \quad \omega_6^1 = \dots = \omega_{n-3}^{n-8} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega_{n-3}^0 = \omega_{n-2}^1 = k_{n-5}\,\omega^1, \quad \omega_{n-2}^0 = k_{n-4}\,\omega^1,
\end{cases}
$$

avec k_3, ..., k_{n-4} invariants projectifs.

On continue par le même procédé jusqu'au moment où tous les pfaffiens sont exprimés à l'aide des invariants projectifs et à l'aide du paramètre principal de la courbe.

Pour une courbe générale C de l'espace bicentral n-dimensionnel, les formules de Frenet ont la forme :

$$
(21)\quad \begin{cases}
dA_0 = \qquad \omega^1 A_1, \\
dA_1 = \frac{1}{2}\rho\omega^1 A_0 \qquad + \omega^1 A_2, \\
dA_2 = k\omega^1 A_0 \qquad - \rho\omega^1 A_2 + \omega^1 A_3, \\
dA_3 = k_1\omega^1 A_0 \qquad - \frac{3}{2}\rho\omega^1 A_2 + \omega^1 A_4, \\
dA_4 = k_2\omega^1 A_0 \qquad - 5\rho\omega^1 A_3 + \omega^1 A_5, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
dA_{n-3} = k_{n-5}\,\omega^1 A_0 \qquad - \rho\omega^1 A_{n-4} + \omega^1 A_{n-2}, \\
dA_{n-2} = k_{n-4}\omega^1 A_0 + k_{n-3}\omega^1 A_1 + \dots + k_1\omega^1 A_{n-5} + k\omega^1 A_{n-3} + \omega^1 A_{n-1}, \\
dA_{n-1} = \qquad + \omega_{n-1}^{n-1} A_{n-1}, \\
dA_n = \qquad \omega_n^n A_n,
\end{cases}
$$

où k, ρ, k_1, k_2, ... k_{n-4} sont des invariants projectifs de la courbe C [1].

Un point de la courbe C où l'on a :

$k = 0$, $k_1 = 1$; ρ, k_2, ..., k_{n-1} différents de zéro, s'appelle point singulier de première l'espèce,

$k = k_1 = 0$, $k_2 = 1$; ρ, k_3, ..., k_{n-4} différents de zéro, s'appelle point singulier de seconde espèce,

. . . . . .

$k = k_1 = \dots = k_{n-i+1} = 0$; $\rho \neq 0$, $k_{n-i} \neq 0$ s'appelle point singulier de l'espèce i

. . . . . .

$k = k_1 = \dots = k_{n-4} = 0$; $\rho \neq 0$, s'appelle point singulier de l'espèce $n - 3$, ou point sextatique.

Une courbe C dont tous les points sont singuliers de l'espèce i s'appelle courbe singulière de l'espèce i ; ces courbes existent et dépendent de $n - i - 1$ fonctions arbitraires d'un seul argument.

On obtient des formules de Frenet (21) :

$k = 1$; $\rho, k_1, k_2, \ldots, k_{n-4}$ invariants projectifs pour les courbes générales de l'espace bicentral n-dimensionnel ;

$k = 0$, $k_1 = 1$; $\rho, k_2, \ldots, k_{n-1}$ invariants projectifs pour les courbes singulières de première espèce ;

$k = k_1 = \ldots = k_{n-5} = 0$, $k_{n-4} = 1$; ρ invariant projectif pour les courbes singulières de l'espèce $(n-4)$.

Les cas rencontrés jusqu'ici représentent :

I) les courbes générales de l'espace bicentral à n dimensions ;

I') les courbes singulières de première espèce ;

II') les courbes singulières de seconde espèce.

. . . . . .

Pour le cas $n = 3$, les courbes singulières de première espèce coïncident avec les courbes du complexe, mais leur propriété géométrique ne peut pas être généralisée pour $n > 3$.

Les courbes de l'espèce $n - 3$, dont tous les points sont sextactiques, s'appellent courbes normales. On ne peut pas fixer pour les courbes normales tous ces éléments composants du repère canonique parce qu'elles sont projectivement égales. Chaque courbe admet un groupe projectif à trois paramètres de transformations en elles-même.

Si l'on ajoute aux conditions précédentes :

$$\omega_1^0 = 0, \tag{22}$$

alors les formules de Frenet obtenues de (21) peuvent être integrées immédiatement et l'on obtient

$$A_0 = A_0^{(0)} + sA_1^{(0)} + \ldots + \frac{s^n}{n!} A_n^{(0)},$$

où $A_0^{(0)}, \ldots, A_n^{(0)}$ est la position du repère canonique pour $s = 0$.

Les équations d'une courbe normale sont :

$$x_2 = \frac{1}{2} x_1^2,\ x_3 = \frac{1}{6} x_1^3, \ldots, x_n = \frac{1}{n!} x^n, \tag{23}$$

et il suit qu'une courbe normale est une courbe algébrique d'ordre n, c'est-à-dire telle que tout E_{n-1} la coupe en n points distincts ou confondus.

Théorème fondamental. *Etant données les courbures projectives : ρ, k, $k_1, \ldots, k_{n-4}$ comme fonctions de l'arc projectif s, qui satisfont au système* (21) *et ses conséquences différentielles, elles déterminent une courbe générale de l'espace bicentral n-dimensionnel jusqu'à un automorphisme de l'espace.*

Pour donner des interprétations géométriques à l'invariant différentiel et aux courbures projectives, on considère sur la courbe C, avec A_0 un point infiniment voisin $A_0' = A_0 + dA_0$. La tangente à la courbe C en A_0 coupe les hyperplans déterminés par les points $A_1, A_0', A_3, \ldots, A_n$ et

respectivement par $A_1, U, A_3, \ldots, A_n$ aux points $P_1' = A_0 + A_1 ds + \ldots + A_n ds^n$ et respectivement $P_1 = A_0 + A_1$ [4].

La partie principale du birapport (A_0, A_1, P_1', P_1) est l'invariant différentiel $ds = \omega^1$, l'élément de l'arc projectif de la courbe C. On dit alors que les points A_1, A_0' jouent par rapport à U de la propriété $p(0, 1)$. On note avec P_m' respectivement P_m les projections des points A_0' respectivement U dans les espaces linéaires déterminés par les points $A_1, \ldots, A_{m-1}, A_{m+2}, \ldots, A_n$ sur le plan A_0, A_m, A_{m+1} et l'on a : $P_m' = A_0 + A_m ds^m + \ldots$ respectivement $P_m = A_0 + A_m + A_{m+1}$. La partie principale du birapport des droites $A_0 (A_m, A_{m+1}, P_m', P_m)$ est aussi égale à ds. On voit donc que les points A_0, A_0' jouissent de la propriété $p(m, m+1)$ par rapport à U. Le point unité U est l'unique point par rapport auquel les points de C, A_0 et A_0' jouissent des propriétés $p(0, 1)$ et $p(m, m+1)$ pour $m = 1, 2, \ldots, n-3$.

En notant par $\bar{A}_0$ la projection de A_0' du plan $A_3A_4A_5$ sur le plan osculateur $A_0A_1A_2$ et avec A_1^* l'intersection de la droite A_0A_2 avec la tangente à la courbe (A_1) au point A_1, on déduit que la partie principale du birapport déterminé par les droites $A_1 (A_0, A_1^*, \bar{A}_0, \bar{A}_2)$, jusqu'à un facteur numérique est égale à la courbure projective ρ.

Par rapport au repère canonique déterminé plus haut, une courbe générale de l'espace bicentral à n dimensions admet la représentation analytique :

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{1}{2!} x_1^2 + a_2 k x_1^{n+1} + \ldots \\ x_3 = \dfrac{1}{3!} x_1^3 + a_3 k_1 x_1^{n+1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{1}{n!} x_1^n + a_n k_{n-2} x_1^{n+1} + \ldots \end{cases} \tag{24}$$

où $k_{n-3} = \omega_{n-1}^{n-1}$, $k_{n-2} = \omega_n^n$ et a_i sont des coefficients numériques.

On considère sur la tangente à la courbe C, les points P définis par :

$$X_i = x_i + \lambda \frac{dx_1}{dx_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{25}$$

et l'on note avec Q_j les points P_λ qui sont à l'intersection de la tangente en A_0 avec l'hyperplan :

$$X_j = 0 \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{26}$$

On suppose que les points Q_j sont ordonnés et que Q_i, Q_j, avec $i < j$ sont distincts.

Les invariants projectifs de la courbe C sont exprimés par des combinaisons linéaires à coefficients numériques des birapports déterminés par les points Q_j.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bell P. O. — *Projective Frenet formulas for an analytic curve in n-dimensional space.* Revista Tucuman, vol. 10, 1954, p. 83–93.
2. Gheorghiev Gh. — *Observații asupra metodei reperului mobil.* An. şt. Univ. Iaşi, matematică, T. XII, (1966), p. 85–118.
3. Pantazi Al. — *Opera matematică.* Ed. Acad. R.S. România, 1956, p. 34–101.
4. Su Buchin — *Contribution to the projective theory of curves in space of five dimensions.* Revista Tucuman, vol. 7–9, 1949–1952, p. 15–79.

ASUPRA GEOMETRIEI DIFERENŢIALE A CURBELOR ÎN SPAŢIUL BICENTRAL n-DIMENSIONAL. I

Rezumat

Nota de faţă reprezintă prima parte din studiul geometriei diferenţiale a curbelor unui spaţiu Klein n-dimensional cu grup fundamental, grupul proiectiv care păstrează două puncte, numite centrele spaţiului.

Folosind metoda reperului mobil, se determină reperul canonic şi se dau interpretări geometrice pentru invarianţii proiectivi ai unei curbe.

CONGRUENCES DE CÔNES QUADRATIQUES EN E_3

PAR

D. RIMER

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza", Jassy, octobre 1967

§ 1. Introduction

L'étude différentielle des variétés de coniques a préoccupé les dernières années plusieurs auteurs, parmi lesquels mentionnons W. Degen [1], V. S. Malachovski [5], V. R. Riutin [9, 10].

Nous avons abordé l'étude différentielle de quelques variétés de cônes quadratiques dans divers espaces [6, 7, 8] et dans cette Note nous présentons la géométrie différentielle des variétés biparamétriques $\mathfrak{V}$ de cônes quadratiques dans l'espace euclidien à trois dimensions, E_3. Ces variétés seront nommées *congruences* de cônes quadratiques. La surface Σ décrite par les sommets des cônes de la congruence sera nommée la *surface support* de la congruence.

Considérons l'espace E_3, son groupe fondamental G_6 et le repère mobile $\{A, I_k\}$ où I_k sont des verseurs rectangulaires deux à deux. (Partout, en ce qui suit, nous notons : $a, b = 1, 2$; $i, k = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3$). Les équations de mouvement du repère sont

$$dA = \omega^k I_k, \qquad dI_k = \Omega \times I_k \tag{1.1}$$

où $\Omega = pI_1 + qI_2 + rI_3$, $p = \omega_2^3$, $q = \omega_3^1$, $r = \omega_1^2$, et les pfaffiens ω^k et ω_k^h satisfont aux équations de structure de l'espace euclidien

$$d\omega^1 = [r, \omega^2] - [q, \omega^3], \text{ etc.} \qquad dp = [r, q], \text{ etc.} \tag{1.2}$$