Les invariants projectifs de la courbe C sont exprimés par des combinaisons linéaires à coefficients numériques des birapports déterminés par les points Q_j.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bell P. O. — *Projective Frenet formulas for an analytic curve in n-dimensional space.* Revista Tucuman, vol. 10, 1954, p. 83–93.
2. Gheorghiev Gh. — *Observații asupra metodei reperului mobil.* An. șt. Univ. Iași, matematică, T. XII, (1966), p. 85–118.
3. Pantazi Al. — *Opera matematică.* Ed. Acad. R.S. România, 1956, p. 34–101.
4. Su Buchin — *Contribution to the projective theory of curves in space of five dimensions.* Revista Tucuman, vol. 7–9, 1949–1952, p. 15–79.

ASUPRA GEOMETRIEI DIFERENȚIALE A CURBELOR ÎN SPAȚIUL BICENTRAL n-DIMENSIONAL. I

Rezumat

Nota de față reprezintă prima parte din studiul geometriei diferențiale a curbelor unui spațiu Klein n-dimensional cu grup fundamental, grupul proiectiv care păstrează două puncte, numite centrele spațiului.

Folosind metoda reperului mobil, se determină reperul canonic și se dau interpretări geometrice pentru invarianții proiectivi ai unei curbe.

CONGRUENCES DE CÔNES QUADRATIQUES EN E_3

PAR

D. RIMER

Communication presentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza", Jassy, octobre 1967

§ 1. Introduction

L'étude différentielle des variétés de coniques a préoccupé les dernières années plusieurs auteurs, parmi lesquels mentionnons W. Degen [1], V. S. Malachovski [5], V. R. Riutin [9, 10].

Nous avons abordé l'étude différentielle de quelques variétés de cônes quadratiques dans divers espaces [6, 7, 8] et dans cette Note nous présentons la géométrie différentielle des variétés biparamétriques $\mathfrak{V}$ de cônes quadratiques dans l'espace euclidien à trois dimensions, E_3. Ces variétés seront nommées *congruences* de cônes quadratiques. La surface Σ décrite par les sommets des cônes de la congruence sera nommée la *surface support* de la congruence.

Considérons l'espace E_3, son groupe fondamental G_6 et le repère mobile $\{A, I_k\}$ où I_k sont des verseurs rectangulaires deux à deux. (Partout, en ce qui suit, nous notons : $a, b = 1, 2$; $i, k = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3$). Les équations de mouvement du repère sont

$$dA = \omega^k I_k, \qquad dI_k = \Omega \times I_k \tag{1.1}$$

où $\Omega = pI_1 + qI_2 + rI_3$, $p = \omega_2^3$, $q = \omega_3^1$, $r = \omega_1^2$, et les pfaffiens ω^k et ω_k^h satisfont aux équations de structure de l'espace euclidien

$$d\omega^1 = [r, \omega^2] - [q, \omega^3], \text{ etc.} \qquad dp = [r, q], \text{ etc.} \tag{1.2}$$

Nous associons à l'espace E_3 un espace projectif auxiliaire S_9, auquel nous attribuons pour groupe fondamental, la réalisation de G_6 comme groupe de transformations sur les quadriques [7]. Cette réalisation étant intransitive, on devra déterminer les domaines de transitivité 0. L'espace S_9 étant rapporté à un repère $\{A^{\alpha\beta}, E\}$, $(A^{\alpha\beta} = A^{\beta\alpha})$, les équations de mouvement du repère sont [7] :

$$dA^{\alpha\beta} = -\omega^{\lambda}_{\alpha} A^{\lambda\beta} - \omega^{\lambda}_{\beta} A^{\beta\lambda}, \tag{1.3}$$

avec $\omega^0_\alpha = 0$ et $\omega^k_0 = \omega^k$.

§ 2. Le théorème d'existence

Nous déterminons de manière géométrique le repère canonique de la congruence $\mathcal{T}$ par les conditions : l'origine du repère coïncide avec le sommet du cône et les axes de coordonnées aient les directions des axes du cône, Ox^3 étant l'axe intérieur du cône. Ainsi, les six paramètres du groupe sont fixés. L'équation locale du cône C rapporté à ce repère est

$$C \equiv \alpha_1 (x^1)^2 + \alpha_2 (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \ (\alpha_1 > 0, \ \alpha_2 > 0). \tag{2.1}$$

À un couple de valeurs de α_1, α_2 correspond un cône déterminé C_0 et, par l'action de toutes les transformations du groupe G_6 on obtient l'ensemble des cônes équivalents à C_0, donc un domaine de transitivité 0.

L'image du cône C (2.1) en S_9 est le point $\overline{C}$

$$\overline{C} \equiv \alpha_1 A^{11} + \alpha_2 A^{22} - A^{33}, \tag{2.2}$$

qui appartient à une variété algébrique de dimension huit et ordre quatre, $S^4_8 \subset S_9$ [1, 6]. L'image en S_9 de la congruence $\mathcal{T}$ est une surface $\overline{\mathcal{T}} \subset S^4_8$ [7], formée de plusieurs portions simples de surface, homéomorphes à des domaines plans simples connexes.

À chaque domaine de transitivité $0 \subset V$, correspond en S_9 une variété de dimension six, que nous notons 0 et sur laquelle la réalisation du groupe G_6 actionne simplement transitif.

Quoique le repère a été déterminé par des moyens géométriques, nous allons appliquer aussi la méthode du repère mobile de Cartan à la surface $\overline{\mathcal{T}} \subset S_9$, ce qui permettra de dégager les divers cas d'exception.

Par définition, seront considérés comme repères d'ordre zéro, les repères qui maintiennent fixe le point $\overline{C}$. Parce que $\overline{C} \in 0$, qui est une variété de dimension six et le groupe a six paramètres, il suit que le groupe de stabilité de $\overline{C}$ se réduit à la transformation identique et, donc, que le repère canonique de la surface $\overline{\mathcal{T}}$, ainsi que de la congruence $\mathcal{T}$ est déterminé.

En notant par δ un déplacement dans la famille des repères d'ordre zéro et $\pi^k_i = \omega^k_i(\delta)$, la condition de fixité $\delta\overline{C} = \lambda\overline{C}$, avec (1.2) donne :

$$\begin{gathered} \delta\alpha_1 = 0, \ \delta\alpha_2 = 0, \ \pi^1 = 0 \ (\alpha_1 \neq 0), \ \pi^2 = 0 \ (\alpha_2 \neq 0), \ \pi^3 = 0, \\ \pi^2_1 = 0 \ (\alpha_1 - \alpha_2 \neq 0), \ \pi^1_3 = 0 \ (\alpha_1 + 1 \neq 0), \ \pi^3_2 = 0 \ (\alpha_2 + 1 \neq 0). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Il résulte que α_1 et α_2 sont des invariants d'ordre zéro de la congruence $\mathcal{T}$ et que les six pfaffiens ω^k et ω^k_i sont des pfaffiens principaux d'ordre zéro.

En voici les cas d'exception et leurs significations géométriques :

1) $\alpha_1 = 0$ ou 2) $\alpha_2 = 0$ — le cône local se réduit à un couple de plans

$$\alpha_2 (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0, \ \text{respectivement} \ \alpha_1 (x^1)^2 - (x^3)^2 = 0; \tag{2.4}$$

3) $\alpha_1 = -1$ ou 4) $\alpha_2 = -1$ ou 5) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}$ — le cône C est un cône de rotation, dont l'équation est respectivement :

$$\begin{gathered} (x^1)^2 - \alpha_2 (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \ -\alpha_1 (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0, \\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha (x^3)^2 = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Nous allons nous occuper seulement du cas générique et des cônes de rotation (§4).

Le cas générique. Les six pfaffiens ω^k et ω^k_i étant des pfaffiens principaux d'ordre zéro, supposons $[\omega^1, \omega^2] \neq 0$. En exprimant les autres quatre pfaffiens, fonctions des pfaffiens principaux de la variété ω^1 et ω^2, on obtient

$$\omega^3 = l_a \omega^a, \ p = p_a \omega^a, \ q = q_a \omega^a, \ r = r_a \omega^a \tag{2.6}$$

où l_a, p_a, q_a, r_a sont des fonctions regulières de (v_1, v_2), les paramètres principaux de la variété.

On a ainsi les formules de Frenet de la congruence $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} dA &= \omega^a I_a + l_a \omega^a I_3, \\ dI_1 &= r_a \omega^a I_2 - q_a \omega^a I_3, \\ dI_2 &= -r_a \omega^a I_1 + p_a \omega^a I_3, \\ dI_3 &= q_a \omega^a I_1 - p_a \omega^a I_2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Écrivons encore à l'aide de (1.3) trois des dix formules de Frenet de la variété image $\overline{\mathcal{T}} \subset S_9$ (les autres sept ne seront pas utilisées en ce qui suit) :

$$\begin{aligned} dA^{11} &= -2\,[(-r_1 A^{12} + q_1 A^{13} + A^{10})\,\omega^1 + (-r_2 A^{12} + q_2 A^{13})\,\omega^2], \\ dA^{22} &= -2\,[(r_1 A^{12} - p_1 A^{23})\,\omega^1 + (r_2 A^{12} - p_2 A^{23} + A^{20})\,\omega^2], \\ dA^{33} &= -2\,[(-q_1 A^{13} + p_1 A^{23} + l_1 A^{30})\,\omega^1 + (-q_2 A^{13} + p_2 A^{23} + \\ &\qquad + l_2 A^{30})\,\omega^2]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En utilisant les équations de structure (1.2) de l'espace E_3 et notant la différentielle d'une fonction φ par : $d\varphi = \varphi_{,a}\omega^a$ et

$$M^1 = r_1 + l_1 q_2 - l_2 q_1,$$
$$M^2 = r_2 - l_1 p_2 + l_2 p_1,$$

on obtient les conditions d'intégrabilité

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &d\omega^1 = M^1 [\omega^1, \omega^2],\\ &d\omega^2 = M^2 [\omega^1, \omega^2],\\ &l_{2,1} - l_{1,2} + l_a M^a + p_1 + q_2 = 0\\ &p_{2,1} - p_{1,2} + p_a M^a + q_2 r_1 - q_1 r_2 = 0 \text{ etc.,}\end{aligned}$$

les autres deux s'obtenant de la dernière par des permutations circulaires.

On peut énoncer maintenant le théorème fondamental :

Étant données deux formes de Pfaff ω^1, ω^2 linéairement indépendantes de deux arguments v_1, v_2 et huit fonctions régulières l_a, p_a, q_a, r_a des mêmes variables qui satisfont à (2.9), il y a en E_3 une congruence de cônes quadratiques définie à un déplacement près, dont les formes invariantes et les invariants sont les deux pfaffiens et les huit fonctions données.

§ 3. L'étude géométrique de la congruence

En coupant le cône C par le plan $z = 1$, on obtient une conique directrice

$$(3.1)\qquad \alpha_1 (x^1)^2 + \alpha_2 (x^2)^2 - 1 = 0,\ x^3 = 0,$$

avec les demi-axes $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}$. On a ainsi une interprétation de α_a.

Le plan tangent à la surface image $\overline{\mathcal{S}} \subset S_9$ au point $\overline{C}$ est donné par $\overline{C}$ et $d\overline{C} = Q_a \omega^a$, où

$$(3.2)\qquad Q_a = \alpha_{1,a} A^{11} + \alpha_{2,a} A^{22} + 2\tilde{r}_a A^{12} - 2\tilde{q}_a A^{13} + 2\tilde{p}_a A^{23} + 2 l_a A^{03} - 2\alpha_a A^{0a} = 0$$

l'indice a dans le dernier terme étant indice libre et

$$(3.3)\qquad \tilde{p}_a = (\alpha_2 + 1)\, p_a,\ \tilde{q}_a = (\alpha_1 + 1)\, q_a,\ \tilde{r}_a = (\alpha_1 - \alpha_2)\, r_a.$$

La contreimage en E_3 du plan tangent à $\overline{\mathcal{S}}$ en $\overline{C}$ est un réseau de quadriques „tangent" à la congruence $\mathcal{S}$ au cône C :

$$(3.4)\qquad R \equiv \lambda_0 C + \lambda^a Q_a = 0 \quad (a \text{ étant indice de sommation})$$

où

$$(3.2')\qquad Q_a = \alpha_{1,a} (x^1)^2 + \alpha_{2,a} (x^2)^2 + 2\tilde{r}_a x^1 x^2 - 2\tilde{q}_a x^1 x^3 + 2\tilde{p}_a x^2 x^3 + 2 l_a x^3 - 2\alpha_a x^a = 0$$

(l'indice a dans le dernier terme est indice libre).

Nous utiliserons aussi les faisceaux „principaux" de quadriques :

$$(3.5)\qquad F_a = \lambda_0 C + \lambda_a Q_a = 0,$$

qui sont les contreimages en E_3 des tangentes $\overline{F}_a$ aux courbes $\overline{T}_a$ d'équations $\omega^b = 0$ $(b \neq a)$, situées sur $\overline{\mathcal{S}}$ et passant par $\overline{C}$.

Les quadriques Q_a passent par l'origine A du repère. Les axes I_a coupent les quadriques Q_a dans l'origine, aussi que dans le point

P_1 $(2\alpha_1/\alpha_{1,1},\ 0,\ 0)$, respectivement $P_2(0,\ 2\alpha_2/\alpha_{2,2},\ 0)$, ce qui fournit d'autres interprétations de α_a.

Les axes I_a sont tangentes à l'origine aux quadriques Q_b $(b \neq a)$ et la direction de I_3 est une direction asymptotique pour chacune des deux quadriques Q_a. Les plans Π_a tangents en A aux quadriques Q_a ont les équations

$$(3.6)\qquad \Pi_a \equiv \alpha_a x^a - l_a x^3 = 0$$

(où l'indice a dans le premier terme est un indice libre).

Ces équations fournissent des interprétations aux invariants l_a. On obtient aussi des interprétations pour tous les invariants, en considérant les équations des plans diamétralement conjugués aux directions I_k par rapport aux quadriques Q_a :

$$(3.7)\qquad \begin{array}{c|c|c} & Q_1 & Q_2 \\ \hline I_1 & \alpha_{1,1} x^1 + \tilde{r}_1 x^2 - \tilde{q}_1 x^3 - \alpha_1 = 0 & \alpha_{1,2} x^1 + \tilde{r}_2 x^2 - \tilde{q}_2 x^3 = 0 \\ I_2 & \tilde{r}_1 x^1 + \alpha_{2,1} x^2 + \tilde{p}_1 x^3 = 0 & \tilde{r}_2 x^1 + \alpha_{2,2} x^2 + \tilde{p}_2 x^3 - \alpha_2 = 0 \\ I_3 & -\tilde{q}_1 x^1 + \tilde{p}_1 x^2 + l_1 = 0 & -\tilde{q}_2 x^1 + \tilde{p}_2 x^2 + l_2 = 0 \end{array}$$

Évidemment, les plans diamétralement conjugués à I_3 sont des plans asymptotes aux quadriques Q_a.

Soient, les courbes $\Gamma_a \subset \sum$ d'équations

$$(3.8)\qquad (\Gamma_a) \equiv \omega^b = 0 \quad (b \neq a),$$

les verseurs J_a des génératrices du cône C, dont les projections sur le plan $x^3 = 0$ sont situées sur les demiaxes positives Ox^a, et φ_a les angles (J_a, J_3). Lorsque le sommet A du cône C décrit l'une des courbes Γ_a (3.8), les plans tangents au cône C le long de J_1, J_2 varient. Soit n_{ab} $(a = 1, 2\,;\ b = 1, 2)$ le verseur de la normale du plan tangent au cône le long de J_a dans le déplacement de A suivant Γ_b. Les déviations du parallélisme Myller [7] des directions J_a par rapport aux normales n_{ab} le long des courbes Γ_a sont données par les expressions :

$$(3.9)\qquad |J_a, J_{a,b}, n_{a,b}| = \sqrt{[(\lambda p_b + \mu q_b)\cos\varphi_a - r_b \sin\varphi_a]^2 + [1 - \mu p_b + \lambda q_b]^2}$$

où λ et μ sont données dans le tableau

a	λ	μ
1	1	0
2	0	1

Compte tenu que $\sqrt{\alpha_a} = \operatorname{cotg} \varphi_a$, les expressions (3.9) peuvent être mises encore sous la forme

$$(3.9')\qquad |J_a ; J_{a,b} ; n_{ab}| = \sqrt{\frac{[(\lambda p_b + \mu q_b)\sqrt{\alpha_a} - r_b]^2}{1 + \alpha_a} + (1 - \mu p_b + \lambda q_b)^2}$$

Il résulte que si les conditions :

$$(3.10)\qquad r_b = (\lambda p_b + \mu q_b)\sqrt{\alpha_a}, \quad \mu p_b - \lambda q_b = 1$$

sont satisfaites (conditions compatibles avec les relations (2.9)), les directions J_a sont parallèles (M) par rapport aux normales n_{ab} le long des courbes Γ_a.

L'enveloppe de la congruence $\mathfrak{S}$ est donnée par les équations

$$(3.11)\qquad C = 0,\ Q_1 = 0,\ Q_2 = 0.$$

Associons à la congruence $\mathfrak{S}$ de cônes, la congruence de droites Δ, dont la surface support est Σ et le rayon de la congruence est situé le long de I_3. L'équation vectorielle de la congruence Δ est alors :

$$(3.12)\qquad P = M + \rho I_3 .$$

Nous exprimons différents éléments caractéristiques de la congruence Δ en utilisant les invariants de la congruence de cônes $\mathfrak{S}$.

L'arc de l'image sphérique du rayon de la congruence Δ, donc la première forme fondamentale de la congruence Δ, est :

$$(3.13)\qquad ds'^2 = (dI_3)^2 = (p_a^2 + q_a^2)(\omega^a)^2 + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)\,\omega^1\omega^2.$$

La deuxième forme fondamentale de la congruence Δ étant :

$$(3.14)\qquad \varphi = q_1(\omega^1)^2 + (q_2 - p_1)\,\omega^1\omega^2 - p_2(\omega^2)^2,$$

il résulte que le point central d'une génératrice d'une surface réglée R $(\omega^2 = \sigma\omega^1)$ qui appartient à la congruence Δ est donné par

$$(3.15)\qquad \rho = \frac{p_2\sigma^2 + (p_1 - q_2)\sigma - q_1}{N},$$

où $N = (p_2^2 + q_2^2)\sigma^2 + 2(p_1 p_2 + q_1 q_2)\sigma + (p_1^2 + q_1^2)$.

Enfin, la troisième forme fondamentale de la congruence Δ étant

$$(3.16)\qquad p_1(\omega^1)^2 + (p_2 + q_1)\,\omega^1\omega^2 + q_2(\omega^2)^2,$$

il résulte que le paramètre de distribution de la génératrice est

$$(3.17)\qquad \lambda = -\frac{q_2\sigma^2 + (p_2 + q_1)\sigma + p_1}{N},$$

Il s'ensuit que les réglées R pour lesquelles σ satisfait à la condition

$$q_2\sigma^2 + (p_2 + q_1)\sigma + p_1 = 0$$

sont développables.

En particulier, les surfaces réglées (Γ_a, I_3) sont développables si

$$p_1 = 0\ (a = 1)\ ;\ q_2 = 0\ (a = 2).$$

Les foyers sont donnés par

$$(3.18)\qquad \rho_{1,2} = \frac{p_2 - q_1 \pm \sqrt{(p_2 + q_1)^2 - 4p_1 q_2}}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)},$$

les points limite par

$$(3.19)\qquad \rho_{1,2} = \frac{p_2 - q_1 \pm \sqrt{(p_2 + q_1)^2 + (p_1 - q_2)^2}}{2(p_1 q_2 - p_2 q_1)}$$

et, donc, le point moyen du rayon a l'abscisse

$$(3.20)\qquad \rho = \frac{p_2 - q_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}.$$

Pour que la congruence Δ soit une congruence normale il est nécessaire et suffisant que

$$p_1 + q_2 = 0.$$

On voit que si les réglées (Γ_a, I_3) sont développables, la congruence (Δ) est normale.

La condition nécessaire et suffisante afin que la congruence (Δ) soit isotrope, est

$$(3.21)\qquad \frac{p_1^2 + q_1^2}{q_1} = \frac{p_1 p_2 + q_1 q_2}{q_2 - p_1} = \frac{p_2^2 + q_2^2}{-p_2}.$$

§ 4. Congruences de cônes de rotation

En déterminant le repère canonique de la congruence $\mathfrak{S}$ de cônes quadratiques quelconques, nous avons exclu le cas des variétés $\mathfrak{S}_1$ de cônes de rotation, caractérisées par l'une des conditions :

$$\alpha_1 = -1,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}.$$

Reprenons ce cas d'exception, en supposant $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{\alpha}$. L'équation locale du cône C_1 est alors :

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - \alpha\,(x^3)^2 = 0. \tag{4.1}$$

Nous appliquons de nouveau la méthode du repère mobile de Cartan à la variété image de S_9.

Il suit que $\alpha_1 = 0$ correspond à un couple de plans imaginaires et $\alpha = -1$, à un cône complexe. Nous ne nous occuperons pas de ces deux cas d'exception. Alors, les relations qui donnent les variations dans la famille des repères d'ordre zéro sont :

$$\delta\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0, \quad \frac{1}{\alpha}\pi^1 = 0, \quad \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\pi^1_3 = 0, \quad \frac{1}{\alpha}\pi^2 = 0, \quad \left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\pi^3_2 = 0, \quad \pi^3 = 0.$$

Il résulte que α est un invariant d'ordre zéro, et ω^1, ω^2, ω^3, ω^3_2, ω^1_3 sont des pfaffiens principaux d'ordre zéro. En supposant $[\omega^1, \omega^2] \neq 0$, nous exprimons les autres trois pfaffiens principaux d'ordre zéro, fonctions de ω^1 et ω^2.

$$\omega^3 = \lambda_1\,\omega^1 + \lambda_2\,\omega^2, \quad \omega^1_3 = \lambda_3\,\omega^1 + \lambda_4\,\omega^2, \quad \omega^3_2 = \lambda_5\,\omega^1 + \lambda_6\,\omega^2. \tag{*}$$

En continuant l'opération, par différentiation extérieure et, compte tenu des équations de structure du groupe G_6 et des relations (*), on obtient :

$$\delta\lambda_1 - \lambda_2\,\pi^2_1 = 0, \qquad \delta\lambda_2 + \lambda_1\,\pi^2_1 = 0, \qquad \delta\lambda_3 - \lambda_4\,\pi^2_1 = 0,$$

$$\delta\lambda_4 + \lambda_3\,\pi^2_1 = 0, \qquad \delta\lambda_5 - (\lambda_3 + \lambda_6)\,\pi^2_1 = 0, \qquad \delta\lambda_6 - (\lambda_4 - \lambda_5)\,\pi^2_1 = 0.$$

Si tous les six coefficients λ_h $(h = 1, \ldots, 6)$ sont nuls, le repère ne peut pas être fixé. Supposons qu'au moins deux d'entre eux ne sont pas nuls et soient λ_1, λ_2 ces coefficients. Pour $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 \neq 0$, on obtient $\pi^2_1 = 0$ et implicitement le repère canonique de la surface image $\mathcal{V} \subset S_9$ ainsi que de la congruence $\mathcal{V}_1$ de cônes de rotation de E_3 est fixé. Il y a cinq invariants finis du premier ordre :

$$\lambda_2 = l, \quad \lambda_3 = q_1, \quad \lambda_4 = q_2, \quad \lambda_5 = p_1, \quad \lambda_6 = p_2$$

et deux du deuxième ordre r_1, r_2 ; ces deux derniers permettent d'exprimer le pfaffien principal du premier ordre ω^2_1 en fonction de ω^1, ω^2.

Nous pouvons écrire maintenant les formules de Frenet de la congruence $\mathcal{V}_1$

$$\begin{aligned} dA &= \omega^a\,I_a + l\,\omega^2\,I_3, \\ dI_1 &= r_a\,\omega^a\,I_2 - q_a\,\omega^a\,I_3, \\ dI_2 &= -\,r_a\,\omega^a\,I_1 + p_a\,\omega^a\,I_3, \\ dI_3 &= q_a\,\omega^a\,I_1 - p_a\,\omega^a\,I_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

et trois des formules de Frenet de la surface $\overline{\mathcal{V}}_1 \subset S_9$:

$$\begin{aligned} dA^{11} &= -\,2[\omega^1\,A^{01} + r_a\,\omega^a\,A^{12} + q_a\,\omega^a\,A^{13}], \\ dA^{22} &= -\,2[\omega^2\,A^{02} + r_a\,\omega^a\,A^{12} - p_a\,\omega^a\,A^{23}], \\ dA^{33} &= -\,2[\alpha\,(l\omega^2\,A^{03} - q_a\,\omega^a\,A^{13} + p_a\,\omega^a\,A^{23}) - d\alpha\,A^{33}]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

En notant :

$$M^1 = r_1 - lq_1, \quad M^2 = r_2 + lp_1,$$

on a les conditions d'intégrabilité :

$$\begin{aligned} d\omega^a &= M^a\,[\omega^1, \omega^2], \\ l_{,1} + lM^2 + p_1 + q_2 &= 0, \\ p_{2,1} - p_{1,2} + p_a\,M^a + q_1\,r_2 - q_2\,r_1 &= 0, \text{ etc.} \end{aligned} \tag{4.4}$$

les autres deux conditions résultant de la dernière par permutations circulaires.

Le théorème fondamental résulte immédiatement. On voit qu'il y a seulement sept fonctions l, p_a, q_a, r_a de deux variables au lieu de huit comme l'on a pour la congruence $\mathcal{V}$.

Quelques interprétations s'obtiennent à l'aide du plan tangent à la surface $\overline{\mathcal{V}}_1 \subset S_9$ et à sa contreimage en E_3, le réseau de quadriques „tangent" à $\mathcal{V}_1$ en C_1 :

$$R_1 \equiv \lambda_0\,C_1 + \sum \lambda_a\,Q_a = 0. \tag{4.5}$$

où l'on a noté

$$Q_a \equiv \alpha_a\,(x^3)^2 + 2\tilde{q}_a\,x^1\,x^3 - 2\tilde{p}_a\,x^2\,x^3 + 2x^4 - 2\lambda_a\,\alpha\,l x^3 = 0, \tag{4.6}$$

avec

$$\tilde{q}_a = (1+\alpha)\,q_a, \quad \tilde{p}_a = (1+\alpha)\,p_a \quad \text{et} \quad \lambda_a = \begin{cases} 0 & \text{pour } a = 1 \\ 1 & \text{pour } a = 2. \end{cases} \tag{4.6'}$$

L'axe Ax^3 est l'axe de rotation du cône C_1.

Le plan $x^3 = 0$ orthogonal à Ax^3 en A, coupe les quadriques Q_a suivant les axes Ax^2, Ax^1 et la droite à l'infini du plan $x^3 = 0$. Le repère est ainsi interprété.

Le cône C_1 coupe le plan $z = 1$ suivant un cercle de rayon $\sqrt{\alpha}$.

Le plan tangent en A aux quadriques du faisceau $F_2 \equiv \lambda_0 C + \lambda_2 Q_2 = 0$ est

$$x^1 - \alpha l x^3 = 0$$

ce qui fournit une interprétation de l'invariant l.

Les plans diamétralement conjugués aux directions I_k par rapport aux quadriques Q_a ont les équations suivantes, qui donnent des interprétations pour tous les invariants finis du premier ordre.

	Q_1	Q_2
I_1	$\tilde{q}_1 x^3 + 1 = 0$	$x^3 = 0$
I_2	$x^3 = 0$	$\tilde{p}_2 x^3 - 1 = 0$
I_3	$\tilde{q}_1 x^1 - \tilde{p}_1 x^2 + \alpha_{,1} x^3 = 0$	$\tilde{q}_2 x^1 - \tilde{p}_2 x^2 + \alpha_{,2} x^3 - \alpha l = 0$

BIBLIOGRAPHIE

1. Degen Wendelin — *Zur projektiven Differentialgeometrie der Flächen, die von einer einparametrigen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden*. Math. Annalen I, t. 155 (1964) p. 1—34, II t. 170 (1967), p. 1—36.
2. Gheorghiev Gh. — *Sulla geometria dei coni dell S_3 euclideo*. An. şt. Univ. Iaşi, t. III (1957), p. 125—132.
3. Gheorghiev Gh. — *Geometrie diferenţială*. Iaşi, 1963.
4. Gheorghiu Gh. Th. — *Geometrie diferenţială*. Bucureşti, 1964.
5. Малаховский В. С. — *Невырожденные конгруенции кривых второго порядка в трехмерном проективном пространстве*. Труды Томск. Университета, т. 168 (1963), стр. 43—53.
6. Rimer D. — *La géométrie différentielle des variétés uniparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif à trois dimensions*, An. şt. Univ. Iaşi., Matematică, t. XII, 1966, p. 377—403.
7. Rimer D. — *Geometria diferenţială a varietăţilor uniparametrice de conuri pătratice în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni*. An. Univ. din Timişoara, vol. V (1967), p. 257—279.
8. Rimer D. — *Variétés biparamétriques de cônes quadratiques dans l'espace projectif et équiaffine à trois dimensions*. An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XIII (1967), p. 349—365.
9. Рютин В. Р. — *Конгруенции центральных кривых второго порядка в евклидовом пространстве*. Труды Томск. Университета, т. 176 (1964), стр. 102—106.
10. Рютин В. Р. — *Нормальные конгруенции центральных коник*. Труды Томск. Университета, т. 181 (1965), стр. 97—104.

CONGRUENŢE DE CONURI PĂTRATICE ÎN E_3

Rezumat

Se studiază geometria diferenţială a varietăţilor biparametrice (congruenţelor) de conuri pătratice în spaţiul euclidian tridimensional. Se folosește, în acest scop, metoda reperului mobil a lui Cartan şi, pe alocuri, imaginea congruenţei, într-un spaţiu proiectiv cu 9 dimensiuni. Se stabilește reperul canonic al congruenţei în cazul generic, teorema de existenţă şi se dau interpretări geometrice elementelor reperului şi tuturor invarianţilor. Se consideră congruenţa de drepte asociată, avînd aceeaşi suprafaţă suport ca şi congruenţa de conuri pătratice şi drept rază — axa conului local şi se exprimă unele elemente caracteristice ale congruenţei de drepte cu ajutorul invarianţilor congruenţei de conuri.

În ultimul paragraf se studiază cazul de excepţie al congruenţei de conuri de rotaţie, găsindu-se reperul canonic şi interpretări geometrice pentru toţi invarianţii.