CVASI-CONEXIUNI ASOCIATE UNEI CONEXIUNI LINIARE PE UN SPAȚIU CU STRUCTURĂ APROAPE-PRODUS (I)

DE

E. VAMANU

Într-o Notă precedentă am văzut că pe un spațiu cu structură aproape-produs V_n poate fi definită o cvasi-conexiune în sens Wong. Considerînd repere neolonome adaptate la structura aproape-produs, oricărei conexiuni liniare pe V_n i se poate asocia o cvasi-conexiune în raport cu aceste repere.

Prezenta Notă studiază o serie de proprietăți ale acestor cvasi-conexiuni.

1. Cîteva considerații asupra spațiilor aproape-produs

Fie V_n un spațiu cu structură aproape-produs, $\varphi(\varphi^i_j)$ tensorul structurii, iar P și Q cele două distribuții ale spațiului tangent T într-un punct al varietății, determinate de tensorul φ. Avem

$$T = P \oplus Q \tag{1}$$

și dacă $\dim P = p$, $\dim Q = q$, $p + q = n$.

În cele ce urmează, convenim să introducem indicii:

$$a_1, b_1, \ldots = 1, 2, \ldots, p,$$

$$a_2, b_2, \ldots = p + 1, \ldots, n,$$

$$\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n.$$

Fie (e_i) respectiv (dx^i) reperul și coreperul natural într-un punct oarecare $x \in V_n$. Pe un spațiu cu structură aproape-produs putem însă, considera și repere adaptate la această structură. Notăm prin $(\lambda_\alpha) = (\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2})$ un reper neolonom adaptat la structura aproape-produs, în punctul x, deci: $\lambda_{a_1} \in P_x$ și $\lambda_{a_2} \in Q_x$.

Presupunem că față de reperul natural vectorii λ_α au componentele λ^i_α, deci

$$\lambda_\alpha = \lambda^i_\alpha e_i, \text{ cu } \lambda^i_\alpha = (\lambda^i_{a_1}, \lambda^i_{a_2}). \tag{2}$$

Dacă (ω^α) este coreperul asociat reperului (λ_α), avem:

$$\omega^\alpha = \lambda^\alpha_i dx^i, \tag{3}$$

λ^α_i fiind matricea inversă matricei λ^i_α.

Trecerea de la un reper neolonom adaptat la structura aproape-produs la alt reper de același fel e dată de

$$\lambda_{\alpha'} = A^\alpha_{\alpha'} \lambda_\alpha \quad \text{sau} \quad (4') \quad \begin{cases} \lambda_{a'_1} = A^{a_1}_{a'_1} \lambda_{a_1} \\ \lambda_{a'_2} = A^{a_2}_{a'_2} \lambda_{a_2} \end{cases} \tag{4}$$

$$\omega^{\alpha'} = A^{\alpha'}_\alpha \omega^\alpha \quad \text{sau} \quad (5') \quad \begin{cases} \omega^{a'_1} = A^{a'_1}_{a_1} \omega^{a_1} \\ \omega^{a'_2} = A^{a'_2}_{a_2} \omega^{a_2} \end{cases} \tag{5}$$

matricea transformării fiind de forma

$$A^\alpha_{\alpha'} = \begin{pmatrix} A^{a_1}_{a'_1} & 0 \\ 0 & A^{a_2}_{a'_2} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Cu ajutorul vectorilor λ_α se pot defini tensorii proiecție $P(P^i_j)$ și $Q(Q^i_j)$ și obiectul de neolonomie W prin

$$P^i_j = \lambda^i_{a_1} \lambda^{a_1}_j, \qquad Q^i_j = \lambda^i_{a_2} \lambda^{a_2}_j, \tag{7}$$

$$W^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i (\partial_\beta \lambda^i_\gamma - \partial_\gamma \lambda^i_\beta), \text{ unde } \partial_\beta = \lambda^h_\beta \partial_h. \tag{8}$$

La transformări de reper de forma (4) componentele $W^{a_1}_{b_2 c_2}$ și $W^{a_2}_{b_1 c_1}$ se comportă ca niște tensori.

Între tensorii P, Q și tensorul structurii φ există relațiile

$$P^i_j = \frac{1}{2} (\delta^i_j + \varphi^i_j), \quad Q^i_j = \frac{1}{2} (\delta^i_j - \varphi^i_j), \quad \varphi^i_j = P^i_j - Q^i_j. \tag{9}$$

În reperul neolonom acești trei tensori au componentele:

$$P^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \delta^{a_1}_{b_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta^{b_2}_{a_2} \end{pmatrix}, \quad \varphi^\alpha_\beta = \begin{pmatrix} \delta^{a_1}_{b_1} & 0 \\ 0 & -\delta^{a_2}_{b_2} \end{pmatrix}.$$

Cu ajutorul componentelor $W^{a_1}_{b_2 c_2}$ și $W^{a_2}_{b_1 c_1}$ ale obiectului de neolonomie se

poate da o caracterizare a structurii aproape-produs integrabile: condiția necesară și suficientă ca structura aproape-produs să fie integrabilă este ca:

$$W^{a_2}_{b_1 c_1} = W^{a_1}_{b_2 c_2} = 0^{*)}$$

2. Conexiuni liniare pe V_n și cvasi-conexiuni asociate

Fie γ o conexiune liniară pe V_n, de coeficienți γ^i_{jk} față de reperul olonom, deci

$$\omega^i_k = \gamma^i_{jk} dx^j, \tag{10}$$

și de coeficienți $\gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ față de reperul neolonom adaptat la structura aproape-produs, deci

$$\omega^\alpha_\gamma = \gamma^\alpha_{\beta\gamma} \omega^\beta. \tag{11}$$

Între componentele conexiunii γ în cele două repere avem relațiile:

$$\begin{cases} \omega^\alpha_\beta = \lambda^\alpha_i (\omega^i_j \lambda^j_\beta + d\lambda^i_\beta); \quad \omega^i_j = \lambda^i_\alpha (\omega^\alpha_\beta \lambda^\beta_j + d\lambda^\alpha_j), \\ \gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i (\gamma^i_{jk} \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma + \partial_\beta \lambda^i_\gamma). \end{cases} \tag{12}$$

Pe lîngă conexiunea γ dată de V_n mai putem asocia acestui spațiu și conexiunea $\bar\gamma$ definită de familia de repere considerată și anume conexiunea în care aceste repere sînt absolut paralele, deci definită de condiția:

$$d\lambda^i_\alpha + \omega^i_j \lambda^j_\alpha = 0. \tag{13}$$

Înmulțind (13) cu λ^α_k obținem:

$$\omega^i_k = -d\lambda^i_\alpha \lambda^\alpha_k = \lambda^i_\alpha d\lambda^\alpha_k. \tag{14}$$

Folosind (12) și (14) găsim legătura între componentele conexiunii $\bar\gamma$ și cele ale conexiunii γ

$$\bar\omega^i_k = \omega^i_k - \lambda^i_\alpha \omega^\alpha_\beta \lambda^\beta_k, \tag{15}$$

$$\bar\gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - \lambda^i_\alpha \lambda^\alpha_{\beta\gamma} \lambda^\beta_j \lambda^\gamma_k, \tag{15'}$$

unde $\bar\gamma^i_{jk}$ sînt coeficienții conexiunii $\bar\gamma$.

Cu ajutorul componentelor vectorilor λ_α ai reperului neolonom adaptat la structura aproape-produs definim obiectul geometric

$$\tau^\alpha_{\beta\gamma} = \lambda^\alpha_i (\varphi^\mu_\beta \partial_\mu \lambda^i_\gamma - \partial_\beta \lambda^i_\gamma). \tag{16}$$

La o transformare de reper neolonom de forma (3), componentele obiectului τ se transformă după legea

$$\tau^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_\alpha A^\beta_{\beta'} A^\gamma_{\gamma'} \tau^\alpha_{\beta\gamma} + A^{\alpha'}_\alpha (\varphi^{\mu'}_{\beta'} \partial_{\mu'} A^\alpha_{\gamma'} - \partial_{\beta'} A^\alpha_{\gamma'}), \tag{17}$$

deci τ este un obiect liniar și neomogen în raport cu reperele considerate.

*) Pentru detalii vezi [3].

Înmulţind (16) cu φ^{β}_{ν} şi ţinînd cont de această relaţie, se găseşte o proprietate importantă a obiectului geometric τ dată de

sau, ţinînd cont că $P^{\beta}_{\nu} = 1/2\,(\delta^{\beta}_{\nu} + \varphi^{\beta}_{\nu})$,

(18) $$\varphi^{\beta}_{\nu}\,\tau^{\alpha}_{\beta\gamma} + \tau^{\alpha}_{\nu\gamma} = 0$$

(18′) $$P^{\beta}_{\nu} - \tau^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0.$$

Cum

$$P^{\beta}_{\nu} = \begin{pmatrix} \delta^{b_1}_{a_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

(18′) ne dă $\tau^{\alpha}_{a_1\gamma} = 0$, sau pe larg:

(19) $$\tau^{b_1}_{a_1c_1} = \tau^{b_1}_{a_1c_2} = \tau^{b_2}_{a_1c_1} = \tau^{b_2}_{a_1c_2} = 0.$$

Componentele nenule ale obiectului τ vor fi:

(20) $$\tau^{b_1}_{a_2c_1} = -2\lambda^{b_1}_{i}\,\partial_{b_2}\lambda^{i}_{c_1}, \quad \tau^{b_1}_{a_2c_2} = -2\lambda^{b_1}_{i}\,\partial_{a_2}\lambda^{i}_{c_2},$$
$$\tau^{b_2}_{a_2c_1} = -2\lambda^{b_2}_{i}\,\partial_{a_2}\lambda^{i}_{c_1}, \quad \tau^{b_2}_{a_2c_2} = -2\lambda^{b_2}_{i}\,\partial_{a_2}\lambda^{i}_{c_2}.$$

Folosind (17) rezultă că componentele $\tau^{b_1}_{a_2c_2}$ şi $\tau^{b_2}_{a_2c_1}$ se comportă tensorial la transformări de repere de forma (4).

Din (20) rezultă: $\tau^{b_1}_{a_2c_2} - \tau^{b_1}_{c_2a_2} = -2\lambda^{b_1}_{i}\,\partial_{a_2}\lambda^{i}_{c_2} + 2\lambda^{b_1}_{i}\,\partial_{c_2}\lambda^{i}_{a_2} = 2\lambda^{b_1}_{i}(\partial_{c_2}\lambda^{i}_{a_2} - \partial_{a_2}\lambda^{i}_{c_2}) = 2W^{b_1}_{c_2a_2}$. Putem astfel enunţa

Teoremă. *Condiţia necesară şi suficientă ca distribuţia Q să fie integrabilă este ca tensorul $\tau^{b_1}_{a_2c_2}$ să fie simetric.*

Considerăm cantităţile $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ definite prin:

(21) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \tau^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

unde γ este conexiunea liniară considerată pe V_n, iar τ este obiectul geometric definit mai sus.

La o transformare de reper de forma (4) cantităţile $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ se comportă după legea:

(22) $$\Gamma^{\alpha'}_{\beta'\gamma'} = A^{\alpha'}_{\alpha}\,(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,A^{\beta}_{\beta'}\,A^{\gamma}_{\gamma'} + \varphi^{\mu}_{\beta'}\,\partial_{\mu'}\,A^{\alpha}_{\gamma'}),$$

deci $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ constituie coeficienţii unei cvasi-conexiuni pe V_n în raport cu repere neolonome adaptate la structura aproape-produs a varietăţii.

Rezultă că, la orice conexiune liniară dată pe V_n putem asocia o cvasi-conexiune definită de relaţia (21).

Ţinînd cont de (12) şi (16), obţinem expresia coeficienţilor $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sub forma

(23) $$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i}\,(\gamma^{i}_{jk}\,\lambda^{j}_{\beta}\,\lambda^{k}_{\gamma} + \varphi^{\mu}_{\beta}\,\partial_{\mu}\,\lambda^{i}_{\gamma}).$$

Să considerăm, în particular, cvasi-conexiunea $\overline{\Gamma}$ asociată conexiunii $\overline{\gamma}$ introdusă mai sus. Avem:

$$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i}\,(\overline{\gamma}^{i}_{jk}\,\lambda^{j}_{\beta}\,\lambda^{k}_{\gamma} + \varphi^{\mu}_{\beta}\,\partial_{\mu}\,\lambda^{i}_{\gamma}) = \lambda^{\alpha}_{i}\,(\gamma^{i}_{jk} - \lambda^{i}_{\rho}\,\gamma^{\rho}_{\rho\tau}\,\lambda^{\rho}_{j}\,\lambda^{\tau}_{k})\,\lambda^{j}_{\beta}\lambda^{k}_{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{i}\,\varphi^{\mu}_{\beta}\,\partial_{\mu}\,\lambda^{i}_{\beta} =$$
$$= \lambda^{\alpha}_{i}\,\gamma^{i}_{jk}\,\lambda^{j}_{\beta}\,\lambda^{k}_{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{i}\,\varphi^{\mu}_{\beta}\,\partial_{\mu}\,\lambda^{i}_{\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tau^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Deci

(24) $$\overline{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \tau^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

Am obţinut astfel interpretarea obiectului τ şi anume, τ este cvasi-conexiunea asociată conexiunii în care reperele (λ_{α}) sînt absolut paralele.

Proprietatea (18′) a obiectului τ atrage proprietatea

(25) $$P^{\beta}_{\lambda}\,\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = P^{\beta}_{\lambda}\,\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}.$$

sau

(25′) $$\Gamma^{\alpha}_{a_1\gamma} = \gamma^{\alpha}_{a_1\gamma}.$$

Din (21) şi (25′) rezultă:

(26) $$\Gamma^{a_1}_{b_1c_1} = \gamma^{a_1}_{b_1c_1}, \quad \Gamma^{a_1}_{b_1c_2} = \gamma^{a_1}_{b_1c_2}, \quad \Gamma^{a_1}_{b_2c_1} = \gamma^{a_1}_{b_2c_1} + \tau^{a_1}_{b_2c_1}, \quad \Gamma^{a_1}_{b_2c_2} = \gamma^{b_1}_{b_2c_2} + \tau^{a_1}_{b_2c_2},$$
$$\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = \gamma^{a_2}_{b_1c_1}, \quad \Gamma^{a_2}_{b_1c_2} = \gamma^{a_2}_{b_1c_2}, \quad \Gamma^{a_2}_{b_2c_1} = \gamma^{a_2}_{b_2c_1} + \tau^{a_2}_{b_2c_1}, \quad \Gamma^{a_2}_{b_2c_2} = \gamma^{a_2}_{b_2c_2} + \tau^{a_2}_{b_2c_2}.$$

Folosind interpretările geometrice date coeficienţilor de conexiune $\gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ în [3], p. 240–245 şi relaţiile (26) putem enunţa următoarele rezultate:

a) Distribuţia P este plană dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = 0$,
Distribuţia Q este plană dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_1}_{b_2c_2} = \tau^{a_1}_{b_2c_2}$.

b) Distribuţia P este geodezică dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} + \Gamma^{a_2}_{c_1b_1} = 0$,
Distribuţia Q este geodezică dacă şi numai dacă
$$\Gamma^{a_1}_{b_2c_2} + \Gamma^{a_1}_{c_2b_2} = \tau^{a_1}_{b_2c_2} + \tau^{a_1}_{c_2b_2}.$$

c) P este paralel de-a lungul lui Q dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_2}_{b_2c_1} = \tau^{a_2}_{b_2c_1}$,
Q este paralel de-a lungul lui P dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_1}_{b_1c_2} = 0$.

d) Distribuţia P este paralelă dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_2}_{b_1c_1} = 0$,
$$\Gamma^{a_2}_{b_2c_1} = \tau^{a_2}_{b_2c_1}.$$
Distribuţia Q este paralelă dacă şi numai dacă $\Gamma^{a_1}_{b_2c_2} = \tau^{a_1}_{b_2c_2}$, $\Gamma^{a_1}_{b_1c_2} = 0$.

Asociem coeficienţilor de cvasi-conexiune $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ formele π^{α}_{γ} definite de

(27) $$\pi^{\alpha}_{\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}\,\omega^{\beta}$$

şi pe care le vom numi forme de cvasi-conexiune; atunci (21) se scrie sub forma

(28) $$\pi^\alpha_\gamma = \omega^\alpha_\gamma + \tau^\alpha_\gamma,$$

unde am notat

(29) $$\tau^\alpha_\gamma = \tau^\alpha_{\beta\gamma}\,\omega^\beta = \lambda^\alpha_i\,(\delta\lambda^i_\gamma - d\lambda^i_\gamma - d\lambda^i_\gamma),$$

δ fiind operatorul introdus în [2].

Fie f o funcţie arbitrară de x. Ţinînd cont de proprietăţile operatorului δ avem:

$$\delta f = f_e\,\varphi^e_m\,dx^m = f_e\,\lambda^e_\alpha\,\lambda^\delta_m\,\varphi^\alpha_\beta\,\lambda^m_\gamma\,\omega^\gamma = f_{,\alpha}\,\varphi^\alpha_\beta\,\omega^\beta,$$

unde am notat $f_{,\alpha} = \lambda^i_\alpha f_{,i}$.

Aplicînd încă o dată operatorul δ expresiei $\delta f = f_{,\alpha}\,\varphi^\alpha_\beta\,\omega^\beta$ şi ţinînd cont de proprietatea $\delta^2 = 0$, obţinem

(30) $$\delta\omega^\alpha = -\frac{1}{2}\,\varphi^\alpha_\varepsilon\,W^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\varphi^\beta_\lambda\,\varphi^\gamma_\mu\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu,$$

unde $W^\varepsilon_{\beta\gamma}$ este obiectul de neolonomie introdus mai sus.

Analog se găseşte:

(31) $$d\omega^\alpha = -\frac{1}{2}\,W^\alpha_{\lambda\mu}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu,$$

de unde

(32) $$\delta\omega^\alpha - d\omega^\alpha = \frac{1}{2}\,(\delta^\alpha_\varepsilon\,\delta^\beta_\lambda\,\delta^\gamma_\mu - \varphi^\alpha_\varepsilon\,\varphi^\beta_\lambda\,\varphi^\gamma_\mu)\,W^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu = F^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu}\,W^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu,$$

cu

(33) $$F^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu} = \frac{1}{2}\,(\delta^\alpha_\varepsilon\,\delta^\beta_\lambda\,\delta^\gamma_\mu - \varphi^\alpha_\varepsilon\,\varphi^\beta_\lambda\,\varphi^\gamma_\mu).$$

Pe de altă parte, folosind (3), avem:

$$\delta\omega^\alpha - d\omega^\alpha = \delta(\lambda^\alpha_i\,dx^i) - d(\lambda^\alpha_i\,dx^i) = (\delta\lambda^\alpha_i - d\lambda^\alpha_i) \wedge dx^i + \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i =$$
$$= (\delta\lambda^\alpha_i - d\lambda^\alpha_i) \wedge \lambda^i_\beta\,\omega^\beta + \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i = -\lambda^\alpha_i\,(\delta\lambda^i_\beta - d\lambda^i_\beta) \wedge \omega^\beta +$$
$$+ \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i = -\tau^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i.$$

Deci

(34) $$\delta\omega^\alpha - d\omega^\alpha = -\tau^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i = F^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu}\,W^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu.$$

Fie Π^α şi Π^α_β formele de torsiune respectiv formele de curbură ale cvasi-conexiunii Γ. Ţinînd cont de definiţia dată acestor forme în [2], avem:

$$\Pi^\alpha = \delta\omega^\alpha + \pi^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}\,S^\alpha_{\lambda\mu}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu \quad \text{şi}$$

$$\Pi^\alpha_\beta = \delta\pi^\alpha_\beta + \pi^\alpha_\gamma \wedge \pi^\gamma_\beta = \frac{1}{2}\,S^\alpha_{\lambda\mu\beta}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu,$$

$S^\alpha_{\lambda\mu}$ şi $S^\alpha_{\lambda\mu\beta}$ fiind tensorii de torsiune şi respectiv de curbură corespunzători.

Dacă $\Omega^\alpha = d\omega^\alpha + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma = \frac{1}{2}\,T^\alpha_{\lambda\mu}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu$ sînt formele de torsiune ale conexiunii liniare γ în reperul neolonom, atunci

$$\Pi^\alpha = \delta\omega^\alpha + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma + \tau^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma = (d\omega^\alpha + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma) + (\delta\omega^\alpha - d\omega^\alpha) +$$
$$+ \tau^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma = \Omega^\alpha + \delta\omega^\alpha - d\omega^\alpha + \tau^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma$$

şi ţinînd cont de (34) obţinem

(35) $$\Pi^\alpha = \Omega^\alpha + \lambda^\alpha_i\,\delta dx^i = \Omega^\alpha + F^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu}\,W^\varepsilon_{\beta\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu + \tau^\gamma_\gamma \wedge \omega^\gamma$$

sau pentru tensorii corespunzători:

(36) $$S^\alpha_{\lambda\mu} = T^\alpha_{\lambda\mu} + 2F^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu}\,W^\varepsilon_{\beta\gamma} + \tau^\alpha_{\lambda\mu} - \tau^\alpha_{\mu\lambda}.$$

(35) şi (36) ne dau legătura între torsiunea conexiunii γ şi torsiunea cvasi-conexiunii asociate.

În (36) $T^\alpha_{\lambda\mu}$ sînt componentele tensorului de torsiune a conexiunii γ calculate în reperul neolonom, deci

$$T^\alpha_{\lambda\mu} = \lambda^\alpha_i\,T^i_{jk}\,\lambda^j_\lambda\,\lambda^k_\mu.$$

Pe larg, (36) se scrie sub forma:

(36′) $$S^{a_1}_{b_1c_1} = T^{a_1}_{b_1c_1},\quad S^{a_1}_{b_1c_2} = T^{a_1}_{b_1c_2} - \tau^{a_1}_{c_2b_1} + 2W^{a_1}_{b_1c_2},\quad S^{a_1}_{b_2c_2} = T^{a_1}_{b_2c_2} + \tau^{a_1}_{b_2c_2} - \tau^{a_1}_{c_2b_2} =$$
$$T^{a_1}_{b_2c_2} + 2W^{a_1}_{c_2b_2},\quad S^{a_2}_{b_1c_1} = T^{a_2}_{b_1c_1} + 2W^{a_2}_{b_1c_1},$$
$$S^{a_1}_{b_1c_2} = T^{a_2}_{b_1c_2} - \tau^{a_2}_{c_2b_1},\quad S^{a_2}_{b_2c_2} = T^{a_2}_{b_2c_2}.$$

Din (35) rezultă următoarea

Teoremă. *Condiţia necesară şi suficientă ca conexiunea γ şi cvasi-conexiunea Γ asociată să aibă aceeaşi torsiune este ca*

(37) $$\delta dx^i = 0.$$

Ţinînd cont de proprietăţile operatorului δ date în [2], avem:

$$\delta dx^i = \delta\varphi^i_e \wedge \varphi^e_m\,dx^m = \frac{1}{2}\,\varphi^i_{e,h}\,(\varphi^h_k\,\varphi^e_m - \varphi^h_m\,\varphi^e_k)\,dx^k \wedge dx^m.$$

(37) atrage

(38) $$\varphi^i_{e,h}\,(\varphi^h_\kappa\,\varphi^e_m - \varphi^h_m\,\varphi^e_k) = 0,$$

şi cum $\varphi^i_j\,\varphi^j_k = \delta^i_k$ rezultă

(39) $$\varphi^i_{j,k} - \varphi^i_{k,j} = 0.$$

Deci, teorema enunţată capătă forma:

Condiția necesară și suficientă ca conexiunea γ și evasi-conexiunea Γ asociată să aibă aceeași torsiune este ca tensorul structurii aproape-produs să verifice sistemul de ecuații cu derivate parțiale (39).

Fie N^i_{jk} tensorul lui Nijenhuis (tensorul de torsiune al structurii aproape-produs)

$$N^i_{jk} = \varphi^e_j(\varphi^i_{k,e} - \varphi^i_{e,k}) - \varphi^e_k(\varphi^i_{j,e} - \varphi^i_{e,j}).$$

Relația (39) atrage $N^i_{jk} = 0$. Deci, dacă γ și Γ au aceeași torsiune, structura aproape-produs este integrabilă ; reciproca, evident, nu este adevărată.

Relațiile (36′) ne vor ajuta să dăm o a 3-a formă teoremei enunțate și anume :

Condiția necesară și suficientă ca conexiunea γ și cvasi-conexiunea Γ asociată să aibă aceeași torsiune este ca structura aproape-produs a varietății să fie integrabilă ($W^{a_1}_{c_1 b_2} = W^{a_2}_{c_2 b_1} = 0$) *și ca τ să satisfacă condițiile :*

$$\tau^{a_2}_{c_2 b_1} = 0, \quad \tau^{a_1}_{c_2 b_1} = 2W^{a_1}_{b_1 c_2}. \tag{40}$$

Observație. Dacă conexiunea liniară γ este simetrică, cvasi-conexiunea Γ asociată are formele de torsiune date de

$$\Pi^\alpha = \lambda^\alpha_i \, \delta d x^i \tag{41}$$

și tensorul de torsiune dat de

$$S^\alpha_{\lambda\mu} = 2E^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu} W^\varepsilon_{\beta\gamma} + \tau^\alpha_{\lambda\mu} = \tau^\alpha_{\mu\lambda}. \tag{42}$$

Dacă considerăm, în particular, cvasi-conexiunea asociată conexiunii liniare $\bar{\gamma}$, tensorul de torsiune a acestei cvasi-conexiuni este

$$\bar{S}^\alpha_{\lambda\mu} = \tau^\alpha_{\lambda\mu} - \tau^\alpha_{\mu\lambda} - \varphi^\alpha_\varepsilon W^\varepsilon_{\beta\mu} \varphi^\beta_\lambda \varphi^\gamma_\mu \tag{43}$$

unde, în acest caz, W este un tensor și e dat de

$$W^\varepsilon_{\beta\gamma} = -\lambda^\varepsilon_i \bar{T}^i_{jk} \lambda^j_\beta \lambda^k_\gamma, \tag{44}$$

$\bar{T}^i_{jk}$ fiind tensorul de torsiune a conexiunii $\bar{\gamma}$.

Introducînd tensorul

$$E^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu} = \frac{1}{2}(\delta^\alpha_\varepsilon \delta^\beta_\lambda \delta^\gamma_\mu + \varphi^\alpha_\varepsilon \varphi^\beta_\lambda \varphi^\gamma_\mu) \tag{45}$$

și ținînd cont că în raport cu reperele absolut paralele $\tau^\alpha_{\lambda\mu}$ este o cvasi-conexiune, (43) capătă forma :

$$\bar{S}^\alpha_{\lambda\mu} = -2E^{\alpha\beta\gamma}_{\varepsilon\lambda\mu} W^\varepsilon_{\beta\gamma} + \lambda^\alpha_i(\bar{\gamma}^i_{jh}\varphi^j_k - \bar{\gamma}^i_{jk}\varphi^j_h)\lambda^k_\mu \lambda^h_\lambda. \tag{46}$$

Dacă conexiunea $\bar{\gamma}$ care era fără curbură este și fără torsiune, cvasi-conexiunea τ asociată are tensorul de torsiune dat de

$$S^\alpha_{\lambda\mu} = \lambda^\alpha_i(\bar{\gamma}^i_{jk}\varphi^j_h - \bar{\gamma}^i_{jk}\varphi^j_h)\lambda^h_\lambda \lambda^k_\mu = \tau^\alpha_{\lambda\mu} - \tau^\alpha_{\mu\lambda}. \tag{47}$$

Din (47) rezultă că cvasi-conexiunea τ asociată este fără torsiune dacă și numai dacă este simetrică sau dacă și numai dacă $\bar{\gamma}$ satisface condiția

$$\bar{\gamma}^i_{jh}\varphi^j_k - \bar{\gamma}^i_{jk}\varphi^j_h = 0, \tag{48}$$

care este echivalentă cu

$$\Phi^{jk}_{2he}\bar{\gamma}^{hi}_{k} = 0, \tag{49}$$

unde $\Phi^{jk}_{2he} = \frac{1}{2}(\delta^j_h \delta^k_e - \varphi^j_h \varphi^k_e)$ (tensor cunoscut în spațiile cu structură aproape-produs).

Să introducem acum formele de curbură ale cvasi-conexiunii Γ și să determinăm legătura între acestea și formele de curbură ale conexiunii γ. Avem :

$$\Pi^\alpha_\gamma = \delta\pi^\alpha_\gamma + \pi^\alpha_\beta \wedge \pi^\beta_\gamma = \delta(\omega^\alpha_\gamma + \tau^\alpha_\gamma) + (\omega^\alpha_\beta + \tau^\alpha_\beta) \wedge (\omega^\beta_\gamma + \tau^\beta_\gamma).$$

Dacă $\Omega^\alpha_\gamma = d\omega^\alpha_\gamma + \omega^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_\gamma = \frac{1}{2} R^\alpha_{\lambda\mu\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu$ sînt formele de curbură ale conexiunii γ în reperul neolonom, avem :

$$\Pi^\alpha_\gamma = \Omega^\alpha_\gamma + \delta\omega^\alpha_\gamma - d\omega^\alpha_\gamma + \delta\tau^\alpha_\gamma + \omega^\alpha_\beta \wedge \tau^\beta_\gamma + \tau^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta_\gamma + \tau^\alpha_\beta \wedge \tau^\beta_\gamma. \tag{50}$$

Ținînd cont de legătura între componentele conexiunii γ în cele două repere (olonom și neolonom) și de definiția obiectului τ, pentru formele Π^α_j se mai obține expresia

$$\Pi^\alpha_\gamma = \Omega^\alpha_\gamma + \lambda^\alpha_i(\delta\omega^i_j - d\omega^i_j)\lambda^j_\gamma. \tag{51}$$

Introducînd tensorul de curbură corespunzător

$$\Pi^\alpha_\gamma = \frac{1}{2} S^\alpha_{\lambda\mu\gamma}\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu,$$

obținem

$$\begin{aligned} S^\alpha_{\lambda\mu\gamma} = {} & R^\alpha_{\lambda\mu\gamma} + 2Q^\varepsilon_\lambda \gamma^\alpha_{\mu\gamma,\varepsilon} - 2Q^\varepsilon_\mu \gamma^\alpha_{\lambda\gamma,\varepsilon} + \tau^\alpha_{\mu\gamma,\varepsilon}\varphi^\varepsilon_\lambda - \tau^\alpha_{\lambda\gamma,\varepsilon}\varphi^\varepsilon_\mu + \\ & + \gamma^\alpha_{\lambda\beta}\tau^\beta_{\mu\gamma} - \gamma^\alpha_{\mu\beta}\tau^\beta_{\lambda\gamma} + \tau^\alpha_{\lambda\beta}\gamma^\beta_{\mu\gamma} - \tau^\alpha_{\mu\beta}\gamma^\beta_{\lambda\gamma} + \tau^\alpha_{\lambda\beta}\tau^\beta_{\mu\gamma} - \tau^\alpha_{\mu\beta}\tau^\beta_{\lambda\gamma} - \\ & - \gamma^\alpha_{\rho\gamma}\tau^\rho_{\mu\lambda} + 2\gamma^\alpha_{\rho\gamma}E^{\rho\delta\nu}_{\varepsilon\lambda\mu}W^\varepsilon_{\delta\nu} \end{aligned} \tag{52}$$

(52) exprimă legătura între tensorul de curbură a conexiunii γ și tensorul de curbură a cvasi-conexiunii asociate.

Dacă conexiunea γ este fără curbură, formele de curbură ale cvasi-conexiunii asociate devin:

$$\Pi^{\alpha}_{\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i} (\delta \omega^{i}_{j} - d \omega^{i}_{j}) \lambda^{j}_{\gamma}. \tag{53}$$

Cvasi-conexiunea asociată conexiunii $\bar{\gamma}$ are formele de curbură date de

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{\alpha}_{\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i} (\delta \bar{\omega}^{i}_{j} - d \bar{\omega}^{i}_{j}) \lambda^{j}_{\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i} (Q^{e}_{k} \bar{\gamma}^{i}_{mj,e} - Q^{e}_{m} \bar{\gamma}^{i}_{kj,e}) \lambda^{j}_{\gamma} dx^{m} \wedge dx^{k} + \\ + \lambda^{\alpha}_{i} \bar{\gamma}^{i}_{kj} \delta d x^{k} \lambda^{j}_{\gamma}, \end{aligned} \tag{54}$$

iar tensorul de curbură dat de

$$\bar{S}^{\alpha}_{\lambda\mu\gamma} = \tau^{\alpha}_{\mu\gamma,\varepsilon} \varphi^{\varepsilon}_{\lambda} - \tau^{\alpha}_{\lambda\gamma,\varepsilon} \varphi^{\varepsilon}_{\mu} + \tau^{\alpha}_{\lambda\beta} \tau^{\beta}_{\mu\gamma} - \tau^{\alpha}_{\mu\beta} \tau^{\beta}_{\lambda\gamma}. \tag{55}$$

Din (54) rezultă că dacă conexiunea $\bar{\gamma}$ și evasi-conexiunea asociată au aceeași tensiune, atunci ele au și aceeași curbură (nulă) dacă și numai dacă $\bar{\gamma}$ verifică relațiile

$$Q^{e}_{k} \bar{\gamma}^{i}_{mj,e} - Q^{e}_{m} \bar{\gamma}^{i}_{kj,e} = 0. \tag{56}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs și conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. șt. Univ. Iași, s. I a, t. XIII (1967), p. 393–400.
2. Vamanu E. — *Cvasi-conexiuni pe spații cu structură aproape-produs*. An. șt. Univ. Iași, s. I a, t. XIII (1967), p. 401–407.
3. Yano Kentaro — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965, pp. 234–254.

QUASI-CONNEXIONS ASSOCIÉES A UNE CONNEXION LINÉAIRE SUR UN ESPACE A STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT (I)

Résumé

Soit V_n un espace à structure presque-produit, φ le tenseur de la structure et λ_{α} un repère non-holonome adapté à la structure presque-produit. A toute connexion linéaire γ sur V_n on peut associer une quasi-connexion Γ par

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \tau^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

où $\tau^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i} (\varphi^{\mu}_{\beta} \partial_{\mu} \lambda^{i}_{\gamma} - \partial_{\beta} \lambda^{i}_{\gamma})$.

Dans cette Note on étudie quelques propriétés de la quasi-connexion Γ et de l'objet géométrique τ.

OBSERVAȚII ASUPRA CONEXIUNILOR INDUSE

DE

C. APREUTESEI

În această Notă sînt cuprinse cîteva rezultate referitoare la conexiunile generalizate induse pe un spațiu fibrat principal și conexiunile infinitezimale induse de o pereche de homomorfisme disjuncte.

§ 1. Homomorfisme de spații fibrate principale

(Definiție și exemple)

Peste tot, în cele ce urmează, varietățile și aplicațiile care intervin sînt presupuse diferențiabile de ordin suficient de mare astfel încît toate considerațiile care se fac să poată avea loc.

Fie $E(V, G, p, \Phi)$ și $E'(V', G', p', \Phi')$ două spații fibrate principale diferențiabile cu grupuri structurale G și G' avînd algebrele Lie L și L' respectiv, h un homomorfism de grupuri Lie de la G la G' iar f o aplicație de la V la V'. Se știe că o aplicație $\mathcal{F} : E \to E'$ se numește homomorfism de spații fibrate principale de tip (f, h) dacă satisface condițiile

$$\mathcal{F} \circ D_{g}(z) = D_{h}(g) \circ \mathcal{F}(z), \tag{1}$$

$$f \circ p(z) = p' \circ \mathcal{F}(z), \tag{2}$$

oricare ar fi punctele $z \in E$ și $g \in G$, unde D_{g}, $D_{h(g)}$ înseamnă translațiile la dreapta definite de elementele g și $h(g)$ respectiv.

1° Fie V_{n+1} și V_n două varietăți diferențiabile de dimensiuni $n+1$ și n respectiv, G grupul matricelor pătratice de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix}$$