Dacă conexiunea γ este fără curbură, formele de curbură ale evasi-conexiunii asociate devin:

$$\Pi^{\alpha}_{\bar{\gamma}} = \lambda^{\alpha}_{i} (\delta \omega^{i}_{j} - d\omega^{i}_{j}) \lambda^{j}_{\bar{\gamma}} . \tag{53}$$

Evasi-conexiunea asociată conexiunii $\bar{\gamma}$ are formele de curbură date de

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^{\alpha}_{\bar{\gamma}} = \lambda^{\alpha}_{i} (\delta \bar{\omega}^{i}_{j} - d\bar{\omega}^{i}_{j}) \lambda^{j}_{\bar{\gamma}} = \lambda^{\alpha}_{i} (Q^{e}_{k} \bar{\gamma}^{i}_{mj,e} - Q^{e}_{m} \bar{\gamma}^{i}_{kj,e}) \lambda^{j}_{\bar{\gamma}} dx^{m} \wedge dx^{k} + \\ + \lambda^{\alpha}_{i} \bar{\gamma}^{i}_{kj} \delta dx^{k} \lambda^{j}_{\bar{\gamma}} , \end{aligned} \tag{54}$$

iar tensorul de curbură dat de

$$\bar{S}^{\alpha}_{\lambda\mu\gamma} = \tau^{\alpha}_{\mu\gamma,\lambda} \varphi^{\varepsilon}_{\lambda} - \tau^{\alpha}_{\lambda\gamma,\mu} \varphi^{\varepsilon}_{\mu} + \tau^{\alpha}_{\lambda\beta} \tau^{\beta}_{\mu\gamma} - \tau^{\alpha}_{\mu\beta} \tau^{\beta}_{\lambda\gamma} . \tag{55}$$

Din (54) rezultă că dacă conexiunea $\bar{\gamma}$ și evasi-conexiunea asociată au aceeași tensiune, atunci ele au și aceeași curbură (nulă) dacă și numai dacă $\bar{\gamma}$ verifică relațiile

$$Q^{e}_{k} \bar{\gamma}^{i}_{mj,e} - Q^{e}_{m} \bar{\gamma}^{i}_{kj,e} = 0. \tag{56}$$

BIBLIOGRAFIE

1. Vamanu E. — *Despre structuri aproape-produs și conexiuni liniare complet reductibile asociate*. An. șt. Univ. Iași, s. I a, t. XIII (1967), p. 393—400.
2. Vamanu E. — *Evasi-conexiuni pe spații cu structură aproape-produs*. An. șt. Univ. Iași, s. I a, t. XIII (1967), p. 401—407.
3. Yano Kentaro — *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*. Pergamon Press, 1965, pp. 234—254.

QUASI-CONNEXIONS ASSOCIÉES A UNE CONNEXION LINÉAIRE SUR UN ESPACE A STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT (I)

Résumé

Soit V_n un espace à structure presque-produit, φ le tenseur de la structure et λ_α un repère non-holonome adapté à la structure presque-produit. A toute connexion linéaire γ sur V_n on peut associer une quasi-connexion Γ par

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \tau^{\alpha}_{\beta\gamma}$$

où $\tau^{\alpha}_{\beta\gamma} = \lambda^{\alpha}_{i} (\varphi^{\mu}_{\beta} \partial_{\mu} \lambda^{i}_{\gamma} - \partial_{\beta} \lambda^{i}_{\gamma})$.

Dans cette Note on étudie quelques propriétés de la quasi-connexion Γ et de l'objet géométrique τ.

OBSERVAȚII ASUPRA CONEXIUNILOR INDUSE

DE

C. APREUTESEI

În această Notă sînt cuprinse cîteva rezultate referitoare la conexiunile generalizate induse pe un spațiu fibrat principal și conexiunile infinitezimale induse de o pereche de homomorfisme disjuncte.

§ 1. Homomorfisme de spații fibrate principale

(Definiție și exemple)

Peste tot, în cele ce urmează, varietățile și aplicațiile care intervin sînt presupuse diferențiabile de ordin suficient de mare astfel încît toate considerațiile care se fac să poată avea loc.

Fie $E(V, G, p, \Phi)$ și $E'(V', G', p', \Phi')$ două spații fibrate principale diferențiabile cu grupuri structurale G și G' avînd algebrele Lie L și L' respectiv, h un homomorfism de grupuri Lie de la G la G' iar f o aplicație de la V la V'. Se știe că o aplicație $\mathcal{F} : E \to E'$ se numește homomorfism de spații fibrate principale de tip (f, h) dacă satisface condițiile

$$\mathcal{F} \circ D_g(z) = D_h(g) \circ \mathcal{F}(z), \tag{1}$$

$$f \circ p(z) = p' \circ \mathcal{F}(z), \tag{2}$$

oricare ar fi punctele $z \in E$ și $g \in G$, unde D_g, $D_{h(g)}$ înseamnă translațiile la dreapta definite de elementele g și $h(g)$ respectiv.

1° Fie V_{n+1} și V_n două varietăți diferențiabile de dimensiuni $n+1$ și n respectiv, G grupul matricelor pătratice de forma

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

iar G' grupul matricelor A nesingulare de tip $n \times n$. Considerăm spațiul fibrat principal al reperelor liniare ale varietății V_{n+1}.

$$E = \left\{ z / z = \left(x, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} \right) \right\}$$

și analog $E' = \{z'/z' = (x', A)\}$ unde $x' \in V_n$ este corespunzătorul lui $x \in V_{n+1}$ printr-o aplicație f dată. Definim h și $\mathcal{F}$ prin egalitățile

$$h\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} = A, \quad \left(x, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix} \right) = (f(x), A).$$

Se verifică condițiile (1) și (2).

Observația 1°. Dacă interpretăm $G' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & A \end{pmatrix}$ ca fiind grupul structural al spațiului fibrat al reperelor afine pe varietatea V_n, f aplicația identitate a lui V_n, obținem un homomorfism al spațiului fibrat al reperelor afine pe spațiul fibrat al reperelor liniare ale varietății V_n.

2° Fie V_{2n} o varietate aproape complexă și $E = E^c(V_{2n}, GL(n, C))$ spațiul fibrat principal al reperelor R_x^C ale spațiului S_x^C iar $E' = E^b(V_{2n}, \mathcal{G}L(2n, C))$ spațiul fibrat principal al reperelor (R_x^C, R_{*x}^C) ale spațiului T_x^C [2], unde $\mathcal{G}L(2n, C)$ este subgrupul lui $GL(2n, C)$ dat de mulțimea matricelor de forma $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$ unde $A \in GL(n, C)$ iar $\bar{A}$ este conjugata matricei A. Pentru orice $x \in V_{2n}$ definim $f(x) = x$, $h_1\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = A$ și $\mathcal{F}_1\left(x, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\right) = (x, A)$. Aplicația $\mathcal{F}_1$ este un homomorfism al lui E pe E'.

2'° Păstrăm notațiile din exemplul 2° și definim $\bar{\mathcal{F}}_1$ punînd $\bar{\mathcal{F}}_1\left(x, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\right) = (x, \bar{A})$. Aplicația $\bar{\mathcal{F}}_1$ este un homomorfism de tip (id V_{2n}, $\bar{h}_1$) unde $\bar{h}_1\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix} = \bar{A}$. Considerăm acum $\mathcal{F}_1^{-1}(x, A) = \left(x, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\right)$, $h_1^{-1}(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$ și $\bar{\mathcal{F}}_1^{-1}(x, \bar{A}) = \left(x, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\right)$, $\bar{h}_1^{-1}(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Aceste aplicații sînt homomorfisme de tip (id V_{2n}, h_1^{-1}) și (id V_{2n}, $\bar{h}_1^{-1}$) respectiv.

Observația 2. Homomorfismele $\mathcal{F}_1$ și $\bar{\mathcal{F}}_1$ au imagini distincte pe cînd $\mathcal{F}_1^{-1}$ și $\bar{\mathcal{F}}_1^{-1}$ nu mai au această proprietate.

3° Fie spațiile fibrate E^c, considerat mai înainte, și $E^a(V_{2n}, \tilde{\mathcal{G}}L(2n, R))$ al reperelor liniare reale asociate [2], unde prin $\tilde{\mathcal{G}}L(2n, R)$ am notat grupul

format din mulțimea matricelor pătratice de forma $\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$ unde B și C sînt matrice reale nedegenerate de tipul $n \times n$ care definesc matricea A din exemplul 2°. Putem considera acum aplicațiile h_2 și $\mathcal{F}_2$ definite prin egalitățile $h_2(A) = \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}_2(x, A) = \left(x, \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}\right)$.

4° Să considerăm acum E^a și E^b de mai sus și să punem $h_3\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$, $\mathcal{F}_3\left(x, \begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix}\right) = \left(x, \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}\right)$. $\mathcal{F}_3$ astfel definit este un homomorfism de tipul (id V_{2n}, h_3).

Observația 3. Exemplele considerate ne arată că aplicația identitate a lui V_{2n} și diagrama comutativă 1 antrenează diagrama comutativă 2, unde aceste diagrame sînt (fig. 1 și 2).

Fig. 1

Fig. 2

5° Dat $E(V, G, p, \Phi)$, o varietate V' și aplicația $\varphi : V' \to V$, cum se știe, putem considera spațiul fibrat principal indus de φ pe V': $\varphi^{-1}(E)(V', G, p', \Phi')$. Dacă φ este injectivă, atunci aplicația $\mathcal{F} : E \to \varphi^{-1}(E)$ definită prin egalitatea $\mathcal{F}(z) = (x', z)$, oricare ar fi $x' \in V'$, este un homomorfism de tipul (id G, f), unde f este aplicația definită astfel: $\forall x \in \varphi^{-1}(V')$, $f(x) = \varphi^{-1}(x)$.

§ 2. Conexiuni generalizate și homomorfisme de spații fibrate principale

Să considerăm un subfibrat principal $E'(V, G')$ al lui $E(V, G)$, $\{\varphi'_U\}$ o familie de hărți locale ale lui E', unde $U \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}$ fiind o acoperire a lui V. Familia de hărți locale $\{\varphi_U\}$ ale lui E definite prin $\varphi_U(x, g) = D_g(i \circ \varphi'_U(x, e))$ are restricția la $U \times G'$ egală cu $i \circ \varphi_U$, unde i este aplicația incluziune $U \times G' \subset U \times G$.

Noțiunile de cîmp de elemente, cîmp de elemente tranzitiv, conexiune generalizată și grup de olonomie al unui cîmp de elemente au fost introduse în [5].

Teorema 1. *Fie $E(V, G, p, \Phi)$ un subfibrat principal al lui $E'(V, G', p', \Phi')$ și M_z un cîmp de elemente tranzitiv pe E'. Dacă în fiecare punct $z' = z \in E$ cîmpul M_z este tangent la E, există pe E o conexiune infinitezimală determinată de M_z.*

Demonstrație. Orice cîmp de elemente tranzitiv $M_{z'}$ conține o conexiune infinitezimală $m_{z'}$ [5]; atunci să considerăm incluziunea $\mathcal{J}$ a lui E în E' care este un homomorfism de tipul (id V, i) unde i este incluziunea $G \subset G'$. Deoarece aplicația identitate este un difeomorfism, $\mathcal{J}$ va determina conexiunea $\mathcal{J}(m_z) \subset \mathcal{J}(M_z)$.

Consecință. Un cîmp de elemente tranzitiv M_z, complet integrabil, induce pe varietatea integrală maximală care trece prin z' o conexiune infinitezimală.

În adevăr, varietatea integrală maximală se identifică cu pînza de olonomie a cîmpului în z' care se poate organiza ca un spațiu fibrat principal.

Teorema 2. *Fie $E(V, G, p, \Phi)$ un subfibrat principal al lui $E'(V, G', p', \Phi')$, p și Φ fiind restricțiile lui p' și Φ' respectiv, la $p'^{-1}(x) \cap E$, $\forall x \in V$. Dacă M_z, definește o conexiune generalizată pe E' astfel încît pentru orice $z' \in E$, $M_z \subset \Theta_z$, unde Θ_z, este spațiul tangent la E în z', atunci $M_{z'}$, definește o conexiune generalizată pe E.*

Demonstrație. Deoarece $M_{z'}$ este o conexiune generalizată pe E', rezultă că $M_{z'}$, este un cîmp de elemente tranzitiv pe E și $u'(M_{z'} \cap V'_{z'}) = K'$ este un subspațiu al lui L' ce nu depinde de z', u' fiind izomorfismul fundamental corespunzător lui E'. Apoi $M_{z'} \subset \Theta_{z'}$ și $u'(M_{z'} \cap V'_{z'}) = u(M_{z'} \cap V_{z'}) = K'$, $V'_{z'}$, și $V_{z'}$ fiind spațiile verticale în z' ale lui E' și E respectiv.

Să notăm cu ψ_z și $\psi_{z'}$ grupurile de olonomie ale conexiunilor generalizate M și M' în punctele z și z'.

Teorema 3. *Dacă $\mathfrak{F}$ este un homomorfism al lui E în E' de tip (f, h), unde h este un izomorfism al grupului structural G pe grupul G', orice conexiune generalizată M' pe E' induce o conexiune generalizată M unică pe E, iar h aplică ψ_z în $\psi_{z'}$.*

Demonstrație. Fie z un punct arbitrar al lui E, $z' = \mathfrak{F}(z)$ și $g_1 = h(g)$. Dacă M_z este elementul conexiunii M' în z', atunci definim în z elementul conexiunii M prin $M_z = \{\tau_z \in \Theta_z(E) / \mathfrak{F}(\tau_z) \in M_{z'}\}$. Să demonstrăm că M_z este un cîmp de elemente pe E. Relația (1) din § 1 ne dă

$$\mathfrak{F}(D_g(\tau_z)) = D_{g_1}(\mathfrak{F}(\tau_z)), \tag{3}$$

care este un vector ce face parte din $M_{z'g_1} = D_{g_1} M_{z'}$ și deci $D_g(\tau_z) \in D_g(M_z)$. Notăm $\bar{M}_{zg} = \mathfrak{F}(D_g M_z)$ cînd τ_z parcurge $\Theta_z(E)$ astfel încît să aibă loc relația (3). Pe de altă parte,

$$M_{zg} = \{\tau_{zg} \in \Theta_{zg} / \mathfrak{F}(\tau_{zg}) \in M_{z'g_1}\}.$$

Avem $M_{zg} \cap M_{zg}$. Aplicînd $D_{g^{-1}}$ lui M_{zg} găsim un spațiu M_z care, după același raționament, va face parte din M_z și atunci $D_g \bar{M}_z \subset D_g M_z \subset M_{zg}$, deoarece $D_g \bar{M}_z = M_{zg}$. Avem deci $M_{zg} \subset D_g M_z \subset M_{zg}$, ceea ce înseamnă că $M_{zg} = D_g M_z$, M_z, conținînd o conexiune m_z, care induce o conexiune m_z pe E ce face parte (cum se poate vedea imediat) din M_z, putem scrie $\Theta_z =$

$= M_z + V_z$. $\mathfrak{F}$ duce orice fibră $F_{p(z)}$ în fibra corespunzătoare $\mathfrak{F}_{p'(z')}$ și avem diagrama comutativă (fig. 3): Deoarece aici u, h, u' sînt izomorfisme, înseamnă $V_z \cap M_z \neq \Phi$ și în plus $u(M_z \cap V_z) = h[u'(\mathfrak{F}(M_z) \cap V_{z'})]$. Conexiunea definită pe această cale este unică. Fie acum $g \in \psi_z$ și $l(z, zg^{-1})$ un drum al lui E orizontal în raport cu conexiunea generalizată M. Imaginea l' a lui l prin $\mathfrak{F}$ este un drum al lui E' orizontal în raport cu M', ce unește z' cu $\mathfrak{F}(zg^{-1}) = z'h(g^{-1})$. Aceasta înseamnă că $h(g^{-1}) \subset \psi_{z'}$.

Fig. 3

Teorema 4. *Fie M o conexiune generalizată pe E, $\mathfrak{F}$ un homomorfism al lui E în E' de tip (f, h), unde f este un difeomorfism al lui V pe V' iar h un homomorfism de la G la G'. Există o conexiune generalizată unică M' pe E' astfel încît subspațiile lui M să fie duse prin $\mathfrak{F}$ în subspațiile corespunzătoare ale lui M' iar h aplică grupul ψ_z al lui M în z pe grupul de olonomie $\psi_{z'}$ al lui M' în $\mathfrak{F}(z) = z'$.*

Demonstrație. Oricare ar fi $z' \in \mathfrak{F}(E)$, definim în z' elementul conexiunii M' punînd $M_{z'} = \mathfrak{F}(M_z)$. Deoarece pentru $h(g) = g_1$ avem $D_{g_1} M_{z'} = \mathfrak{F}(D_g M_z) = M_{z'g_1}$, subspațiile $M_{z'}$ definesc pe E' un cîmp de elemente. Au loc diagramele I și II (fig. 4) care ne permit să scriem $M_{z'} = \Theta_{z'} + V_{z'}$ și $u'(M_{z'} \cap V_{z'}) = K'$, unde K' este subspațiu al lui L' ce nu depinde de z'.

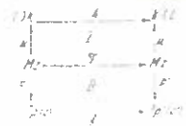

Fig. 4

Fie acum z' arbitrar din E' și să alegem $z_1 \in \mathfrak{F}(E)$ și $g_1 \in G'$ astfel încît să avem $z' = D_{g_1} z_1$. În punctul z' definim elementul conexiunii M' punînd $M_{z'} = D_{g_1}(\mathfrak{F}(M_z))$ unde $z_1 = \mathfrak{F}(z)$. Subspațiile $M_{z'}$ definesc un cîmp de elemente pe E' care nu depinde de alegerea punctelor z_1 și g_1. Dacă $u'(\tau_{z_1}) = \lambda'$, unde $\tau_{z_1} \in M_{z_1} \cap V_{z_1}$, atunci $u'(D_{g_1} \tau_{z_1}) = (\text{adj } g_1^{-1})\lambda'$. Se poate vedea, plecînd de la definiția conexiunii generalizate, că subspațiul $K' \subset L'$ este un ideal și deoarece reprezentarea adj a lui G' lasă invariant K', subspațiile M_{z_1} se vor aplica prin u' tot în K'. Conexiunea M' astfel obținută este unică. Considerăm acum $g \in \psi_z$ și $l(z, zg^{-1})$ un drum orizontal în raport cu M, ce unește z și zg^{-1}. Imaginea l' a lui l prin $\mathfrak{F}$ unește z' cu $z'h(g^{-1}) = \mathfrak{F}(zg^{-1})$ și este orizontal în raport cu M'. Avem deci $h(g^{-1}) \in \psi_{z'}$. Mai mult, orice drum orizontal din E' este imaginea unui drum orizontal din E și atunci h aplică ψ_z pe $\psi_{z'}$.

Fie $E \times E'$ produsul fibrat al spațiilor E și E', $h_1 : G \times G' \to G$, $h_2 : G \times G' \to G'$ homomorfismele canonice și $\mathfrak{F}_1(z, z') = z$, $\mathfrak{F}_2(z, z') = z'$, $\forall (z, z') \in E \times E'$, homomorfismele canonice ale produsului fibrat pe factorii săi.

Teorema 5. *Dacă M și M' sînt conexiuni generalizate pe E și E' respectiv, atunci există, pe $E \times E'$ o conexiune generalizată unică ale cărei subspații sînt aplicate prin $\mathfrak{F}_1$ și $\mathfrak{F}_2$ în subspațiile corespunzătoare ale conexiunilor date, iar h_1, h_2 aplică $\psi_{(z, z')}$ în ψ_z și $\psi_{z'}$, respectiv.*

Demonstrație. Definim în (z, z') elementul conexiunii induse prin $M_{(z,z')} = \{\tau \in \Theta_{(z,z')} / \mathfrak{F}_1(\tau) \in M_{z'}, \mathfrak{F}_2(\tau) \in M_{z'}\}$. Avem de asemenea $(u \boxtimes u')M_{(z,z')} = K + K' \subset L + L'$. Mai departe se procedează ca la teoremele precedente.

Observație. Dacă $K = 0$, avem cazul conexiunilor infinitezimale induse.

§ 3. Homomorfisme disjuncte și conexiuni infinitezimale

1. *Definiție.* Două homomorfisme $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ de la E la E' se numesc disjuncte dacă $\mathfrak{F}(z) \neq \mathfrak{F}_1(z)$, oricare ar fi $z \in E$.

Teorema 6. *Dacă $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ sînt homomorfisme disjuncte de tipul (f, h), unde f este un difeomorfism iar h un homomorfism, ω este forma unei conexiuni infinitezimale pe E, iar ω', ω'_1 și Ω', Ω'_1 formele de conexiune și de curbură ale conexiunilor induse de $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ respectiv, atunci $\mathfrak{F}_1^* \omega'_1 = \operatorname{adj} g_1^{-1} \cdot \mathfrak{F}_1^* \omega'$, $\mathfrak{F}_1^* \Omega'_1 = (\operatorname{adj} g_1^{-1}) \cdot \mathfrak{F}_1^* \Omega'$ iar grupurile de olonomie ale celor două conexiuni induse, în punctul $z' = \mathfrak{F}(z)$ sînt conjugate.*

Demonstrație. Pentru orice $\tau \in \Theta_z$ avem $h(\omega(\tau)) = \omega(\mathfrak{F}(\tau)) = \omega'_1(\mathfrak{F}_1(\tau))$. Deoarece $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ sînt de același tip, pentru $\forall z \in E$, $\mathfrak{F}(z)$ și $\mathfrak{F}_1(z)$ vor aparține la aceeași fibră a lui E', $F_{p'}(\mathfrak{F}(z))$. Există deci un element unic $g_1 \in G'$ astfel ca $D_{g_1} z_1 = z'$, unde $z_1 = \mathfrak{F}_1(z)$. Deci $\omega'_1(\mathfrak{F}_1(\tau)) = \omega'(D_{z_1}\mathfrak{F}_1(\tau)) = (\operatorname{adj} g_1^{-1}) \cdot \omega'(\mathfrak{F}(\tau))$. Folosind ecuațiile de structură obținem $\Omega'_1 = \frac{1}{2}[\omega'_1, \omega'_1] = (\operatorname{adj} g_1^{-1}) \cdot \Omega' = \frac{1}{2}(\operatorname{adj} g_1^{-1}) \cdot [\omega', \omega']$ și de aici obținem relația între formele de curbură. Pentru grupurile de olonomie ale conexiunilor induse avem $\psi'_{z'} = h(\psi_z) = \psi'_{1z_1} = g_1 \psi'_{1z} g_1^{-1}$.

Dacă homomorfismele $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ sînt de tipuri diferite (f, h) și (f_1, h) respectiv, atunci putem defini aplicațiile $f: V \to V'$ prin $f(x) = x'$, unde $x = p(z)$, $x' = p'(z')$ și $F: E' \to E'$ punînd $F(z_1) = z'$, unde $z' = \mathfrak{F}(z)$, $z_1 = \mathfrak{F}_1(z)$. Aplicația F este un homomorfism al lui E' în E' de tipul (f, id, G'), cum se constată ușor.

Teorema 7. *Dacă homomorfismele $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ au tipurile (f, h) și (f_1, h) respectiv, unde f, f_1 sînt difeomorfisme iar h homomorfism, atunci pentru formele de conexiune și de curbură ale conexiunilor induse avem relațiile $\mathfrak{F}^*\omega' = F_0^* \mathfrak{F}_1^* \omega'_1$, $\mathfrak{F}^*\Omega' = F_0^* \mathfrak{F}_1^* \Omega'_1$ iar grupurile de olonomie ale conexiunilor induse de $\mathfrak{F}$ și $\mathfrak{F}_1$ în punctele z' și z'_1 coincid.*

Demonstrație. Este suficient să procedăm ca la teorema precedentă, observînd că $\mathfrak{F} = F \circ \mathfrak{F}_1$ este un homomorfism de tipul (f, h).

2. *Exemple de homomorfisme disjuncte.* Se poate vedea observația 2, § 1.

1° Să presupunem că centrul $C(G')$ al grupului G' nu se reduce la identitate și fie $\mathfrak{F}$ un homomorfism de tip (f, h) iar $g_1 \in C(G')$. Aplicația $\mathfrak{F}_{g_1} = D_{g_1} \circ \mathfrak{F}$ este un homomorfism de la E la E' de același tip cu $\mathfrak{F}$ iar $\mathfrak{F}_{g_1}$ și $\mathfrak{F}$ sînt disjuncte. Într-adevăr, se verifică ușor că $\forall g \in G$, $\mathfrak{F}_{g_1} \circ D_g = D_{h(g)} \circ \mathfrak{F}_{g_1}$.

2° Dacă centrul grupului G, $C(G)$ nu se reduce la elementul neutru, iar $\mathfrak{F}$ este un homomorfism de la E la E', de tip (f, h), atunci aplicația $\mathfrak{F}_g = \mathfrak{F} \circ D_g$ este un homomorfism de același tip (f, h), oricare ar fi elementul $g \in C(G)$.

3° Din exemplele 1° și 2° sau direct prin calcul se deduce că dacă $\mathfrak{F}$ are tipul (f, h) iar $g \in C(G)$ și $g_1 \in C(G')$, atunci aplicația $\mathfrak{F} = D_{g_1} \circ \mathfrak{F} \circ D_g$ este un homomorfism compatibil cu perechea (f, h) iar homomorfismele $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}_g$, $\mathfrak{F}_{g_1}$ și $\mathfrak{F}$ sînt disjuncte.

BIBLIOGRAFIE

1. Goetz A. — *A general scheme of inducing infinitesimal connexions in principal bundles.* Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences, t.X, nr. 1, (1962), p. 29–34.
2. Lichnerowicz A. — *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie.* 1955.
3. Kobayashi S. — *Theory of connexions.* Ann. di Mat., t. 43, (1957), p. 119–194.
4. Kobayashi S. and Nomizu K. — *Foundations of differential geometry.* t. I (1963).
5. Molino P. — *Champs d'éléments sur un espace fibré principal différentiable.* Ann. Inst Fourier, t. 14, 2 (1964), p. 163–220.

OBSERVATIONS SUR LES CONNEXIONS INDUITES

Résumé

On considère dans le premier paragraphe quelques exemples de homomorphismes d'espaces fibrés principaux. Dans les paragraphes suivants, on met en évidence l'action des homomorphismes sur les connexions généralisées et l'action des homomorphismes disjoints sur les connexions infinitésimales sur un espace fibré principal différentiable.