SUR LA STRUCTURE PRESQUE-PRODUIT ASSOCIÉE À UNE CONNEXION SUR UN ESPACE FIBRÉ

PAR

V. CRUCEANU

À une connexion sur un espace fibré principal on peut associer d'une manière naturelle une structure presque-produit. Le but de cette Note est de chercher certaines propriétés de la connexion à l'aide de cette structure.

1. Nous rappelons d'abord quelques notions sur les structures presque-produit [4].

Soit M une variété différentiable de classe C^∞, $\mathcal{F}$ l'anneau des fonctions de classe C^∞ et $\mathcal{D}^r_s$ le $\mathcal{F}$-module des champs de tenseurs du type (r, s) et classe C^∞ sur M.

Définition 1. *Nous disons que le champ de tenseurs $F \in \mathcal{D}^1_1$ détermine sur la variété M une structure presque-produit s'il satisfait à la condition*

$$F^2 = I, \tag{1}$$

où I est le champ de tenseurs de Kronecker.

Une telle structure détermine un automorphisme F_x de l'espace tangent T_x en chaque point $x \in M$. En considérant alors l'équation

$$F_x(X) = \lambda X, \quad X \in T_x, \tag{2}$$

on obtient $\lambda = \pm 1$. Si les valeurs propres $\lambda = \pm 1$ sont respectivement de multiplicité p et q nous avons $p + q = n$, où n est la dimension de M. Les sous-espaces propres correspondants

$$V_x = \{X \in T_x : F(X) = X\}, \quad H_x = \{X \in T_x : F(X) = -X\} \tag{3}$$

sont supplémentaires, c'est-à-dire

$$T_x = V_x \oplus H_x, \quad \forall x \in M. \tag{4}$$

En associant à chaque point $x \in M$ les sous-espaces propres V_x et H_x on obtient deux distributions supplémentaires de classe C^∞ sur M notées respectivement par V et H et nommées les distributions *verticale* et *horizontale* de la structure presque-produit considérée.

Pour chaque $x \in M$ et $X \in T_x$ nous avons

$$X = vX + hX \tag{5}$$

et

$$F(X) = vX - hX \tag{6}$$

où vX et hX sont respectivement les composantes verticale et horizontale de X.

Réciproquement, deux distributions supplémentaires V et H de classe C^∞ sur M déterminent une structure presque-produit dont le tenseur de structure F est donné par (6).

Une structure presque-produit F sur M détermine deux champs de tenseurs v et $h \in \mathfrak{D}^1_1$, nommés respectivement les projecteurs *vertical* et *horizontal*, définis par

$$v(X) = vX, \qquad h(X) = hX, \qquad X \in \mathcal{D}^1. \tag{7}$$

Ils satisfont aux conditions

$$v + h = I, \qquad v^2 = v, \qquad h^2 = h, \quad v \circ h = h \circ v = 0, \ \operatorname{rang} v = p, \ \operatorname{rang} h = q. \tag{8}$$

A l'aide de I et F on obtient pour v et h

$$v = \frac{1}{2}(I + F), \qquad h = \frac{1}{2}(I - F). \tag{9}$$

Réciproquement, étant donné sur M le champ v (resp. h) qui satisfait à la condition (8_2) (resp. (8_3)) il détermine une structure presque-produit avec le champ F donné par

$$F = 2v - I \qquad (\text{resp. } F = I - 2h) \tag{10}$$

pour laquelle il soit le projecteur vertical (resp. horizontal).

A la structure presque-produit définie par F on peut associer le champ de tenseurs $N \in \mathfrak{D}^1_2$ donné par

$$4N(X, Y) = [X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] \tag{11}$$

et nomme le *champ de tenseurs de torsion* ou *de Nijenhuis* de la structure.

Nous avons

$$N(X, Y) = \begin{cases} h[X, Y] & \forall X, Y \in V, \\ v[X, Y] & \forall X, Y \in H, \\ 0 & \text{dans le reste} \end{cases} \tag{12}$$

On peut considérer encore les champs de tenseurs $N_1, N_2 \in \mathfrak{D}^1_2$ donnés par

$$N_1 = N - F \circ N, \qquad N_2 = N + F \circ N. \tag{13}$$

Pour ces champs nous avons

$$\begin{aligned} N_1(X, Y) &= \begin{cases} 2h[X, Y] & \forall X, Y \in V, \\ 0 & \text{dans le reste} \end{cases} \\ N_2(X, Y) &= \begin{cases} 2v[X, Y] & \forall X, Y \in H, \\ 0 & \text{dans le reste.} \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

De (14) et (12) il résulte :

La distribution V est intégrable si et seulement si

$$N_1 = 0. \tag{15}$$

La distribution H est intégrable si et seulement si

$$N_2 = 0. \tag{16}$$

Par suite, les deux distributions V et H sont simultanément intégrables pour

$$N = 0. \tag{17}$$

Dans ce cas on dit que la structure presque-produit F est *intégrable*.

2. Considérons maintenant un espace fibré principal $P(M, G)$ [2]. En associant à chaque point $u \in P$ l'espace tangent dans ce point à la fibre locale, on obtient une distribution intégrable V de classe C^∞ sur P nommée la *distribution verticale de la structure fibrée*. Une connexion sur P détermine une autre distribution H de classe C^∞ sur P qui est *la distribution horizontale de la connexion* considérée. H est supplémentaire à V et aussi invariante à l'action de G.

Par suite, à une connexion sur un espace fibré principal $P(M, G)$ on peut associer d'une manière naturelle une structure presque-produit sur P qui a comme distribution verticale la distribution verticale de la fibration et comme distribution horizontale la distribution horizontale de la connexion considérée. Le champ de tenseurs F de cette structure est donné alors par (6).

La distribution verticale étant intégrable, nous avons remplie la condition (15). D'autre part, les deux distributions étant invariantes à l'action de G on obtient pour $u \in P$, $a \in G$ et $X \in T_u(P)$

$$\begin{aligned} dR_a \circ F_u(X) = dR_a(v_u X) - dR_a(h_u X) = F_{ua} \circ dR_a(v_u X) + \\ + F_{ua} \circ dR_a(h_u X) = F_{ua} \circ dR_a(X). \end{aligned}$$

Par suite

$$dR_a \circ F_u = F_{ua} \circ dR_a, \quad \forall u \in P, \quad \forall a \in G. \tag{18}$$

Réciproquement, considérons une structure presque-produit sur $P(M, G)$

qui admet comme distribution verticale la distribution verticale de la fibration et qui possède encore la propriété (18). Alors la distribution horizontale H de cette structure est de classe C^∞ et supplémentaire à V. De (18) il résulte encore pour $u \in P$, $a \in G$ et $X \in H_u$,

$$F_{ua} \circ dR_a(X) = dR_a \circ F_u(X) = - dR_a(X),$$

c'est-à-dire $dR_a(X) \in H_{ua}$ et par suite H est la distribution horizontale d'une connexion sur $P(M, G)$.

Nous avons donc le

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une structure presque-produit sur un espace fibré principal $P(M, G)$ soit naturellement associée à une connexion sur cet espace est que sa distribution verticale coïncide avec la distribution verticale de la fibration et que l'action du tenseur de structure F sur $\mathfrak{D}^1(P)$ commute avec les translations à droite déterminées par l'action de G sur P.*

Par suite à l'aide de la notion de structure presque-produit on peut donner la définition suivante pour une connexion sur un espace fibré principal.

Définition 2. *On appelle connexion sur un espace fibré principal $P(M,G)$, avec la distribution verticale V, une structure presque-produit F sur P qui satisfait aux conditions*

1) $$F(X) = X \iff X \in V,$$

2) $$dR_a \circ F_u = F_{ua} \circ dR_a, \quad \forall u \in P, \quad \forall a \in G.$$

Cette définition peut être plus commode dans certaines problèmes relativement aux connexions.

3. Soit $\mathfrak{Q}_r(M, E)$ l'ensemble de r-formes sur une variété différentiable M à valeurs dans un espace vectoriel E et F le tenseur d'une structure presque-produit sur M. A une r-forme $\varphi \in \mathfrak{D}_r(M, E)$ nous faisons correspondre par F la r-forme $F\varphi$ définie de la manière suivante

(19) $$(F\varphi)(X_1, X_2, \ldots, X_r) = \varphi(FX_1, FX_2, \ldots, FX_r)$$
$$\forall X_1, X_2, \ldots, X_r \in \mathfrak{D}^1(M).$$

Une r-forme $\varphi \in \mathfrak{D}_r(M, E)$ sera nommée *propre* pour F s'il existe $\lambda \in R$ tel que

(20) $$F\varphi = \lambda\varphi.$$

De (1) et (19) il résulte $\lambda = \pm 1$.

Considérons en particulier un espace fibré principal $P(M, G)$ et une connexion sur cet espace. Soit ω la forme de connexion et F le tenseur de la structure presque-produit associé. Nous avons

$$(F\omega)(X) = \omega(FX) = \omega(vFX) = \omega(vX) = \omega(X), \ \forall X \in \mathfrak{D}^1(P).$$

Par suite,

(21) $$F\omega = \omega,$$

c'est-à-dire ω est une 1-forme propre pour la structure presque-produit associée correspondant à $\lambda = 1$.

Si $\Omega = D\omega$ est la 2-forme de courbure pour la connexion considérée on a pour $X, Y \in \mathfrak{D}^1(P)$,

$$(F\Omega)(X, Y) = \Omega(FX, FY) = d\omega(hFX, hFY) = d\omega(-hX, -hY) = \Omega(X,Y),$$

c'est-à-dire

(22) $$F\Omega = \Omega$$

et par suite Ω est une 2-forme propre correspondante à $\lambda = 1$.

De (22) on obtient

(23) $$\Omega(X, FY) = \Omega(FX, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}^1(P).$$

Nous avons encore le résultat remarquable [3] :

Théorème 2. *Entre la forme de connexion ω, la forme de courbure Ω et le tenseur de torsion N de la structure presque-produit associée à une connexion sur l'espace fibré principal $P(M, G)$, il existe la relation*

(24) $$\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\,\omega[N(X, Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{D}^1(P).$$

En effet, les distributions V et H étant supplémentaires et les deux membres de la relation (24) $\mathfrak{F}$-bilinéaires, il suffit de la vérifier dans les cas suivants :

a) Au moins un des champs X et $Y \in V$. Alors $\Omega(X, Y) = T(X, Y) = 0$ et la relation est vérifiée.

b) X et $Y \in H$. Dans ce cas

$$\Omega(X, Y) = -\frac{1}{2}\,\omega(v[X, Y]), \qquad N(X, Y) = v[X, Y]$$

et par suite (24) est aussi satisfaite.

De (12), (17) et (24) il résulte

(25) $$\Omega = 0 \iff N = 0$$

et par suite.

Conséquence 1. Une connexion sur l'espace fibré principal $P(M, G)$ est plane ($\Omega = 0$) si et seulement si la structure presque-produit associée est intégrable ($N = 0$).

4. Pour toute connexion sur l'espace fibré principal $P(M, G)$ l'application „lift" $l : \mathfrak{D}^1(M) \to \mathfrak{D}^1(P)$ est un homomorphisme de modules qui satisfait encore à la condition

(26) $$l[X^*, Y^*] = h[lX^*, lY^*], \quad \forall X^*, Y^* \in \mathfrak{D}^1(M).$$

De (12) et (26) il résulte

(27) $$[lX^*, lY^*] - l[X^*, Y^*] = N(lX^*, lY^*), \quad \forall X^*, Y^* \in \mathfrak{D}^1(M).$$

D'autre part, du fait que pour chaque $u \in P$ les espaces H_u et $T_{\pi(u)}(M)$ sont isomorphes, on déduit que pour $X, Y \in H_u$ il existe $X^*, Y^* \in \mathfrak{D}^1(M)$ tel que

(28) $$X = (lX^*)_u, \quad Y(Y^*)_u.$$

De (27) et (28) on obtient alors le

Théorème 3. *L'application „lift" $l : \mathfrak{D}^1(M) \to \mathfrak{D}^1(P)$ définie par une connexion sur l'espace fibré principal $P(M, G)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie si et seulement si la structure presque-produit associée est intégrable.*

Par suite, le tenseur de torsion de la structure presque-produit associée donne l'écart de l'application „lift" d'un homomorphisme d'algèbres de Lie.

5. Soit X un champ de vecteurs sur $P(M, G)$ qui est *invariant* par les translations à droite, c'est-à-dire

(29) $$dR_a(X_u) = X_{ua}, \quad \forall u \in P, \quad \forall a \in G.$$

Cette condition peut s'écrire sous la forme équivalente

(30) $$L_Y X = 0, \quad \forall Y \in g^*,$$

où L est le symbole de la dérivée de Lie et g^* est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs fondamentaux sur P.

En tenant compte que

(31) $$L_Y X = [Y, X] = [Y, hX] + [Y, vX]$$

et que pour $Y \in g^*$, $[Y, hX] \in H$ et $[Y, vX] \in V$, on obtient le

Théorème 4. *Un champ de vecteurs X sur $P(M, G)$ est invariant par les translations à droite si et seulement si ses composantes horizontale et verticale satisfont aux conditions*

(32) $$[hX, Y] = 0, \quad [vX, Y] = 0, \quad \forall Y \in g^*,$$

c'est-à-dire elles sont aussi invariantes.

Définition 3. *Un champ $X \in \mathfrak{D}^1(P)$ s'appelle presque-décomposable [4] pour la structure presque-produit F associée à une connexion sur P s'il engendre un groupe uniparamétrique qui conserve F, c'est-à-dire*

(33) $$L_X F = 0.$$

De la relation

(34) $$L_X F = [X, FY] - F[X, Y] = \begin{cases} 2[hX, Y] & Y \in g^* \\ -2v[X, Y] & Y \in H \end{cases}$$

on obtient le

Théorème 5. *Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{D}^1(P)$ est presque-decomposable pour la structure presque-produit associée à une connexion sur $P(M, G)$ si et seulement si*

(35) $$[hX, Y] = 0, \quad \forall Y \in g^*, \quad v[X, Y] = 0, \quad \forall Y \in H.$$

Ces conditions sont satisfaites si X est fondamental et par suite :

Conséquence 2. Tout champ de vecteurs fondamental sur l'espace fibré principal $P(M, G)$ est presque-décomposable pour la structure presque-produit associée à une connexion donnée sur P.

Définition 4. *On dit que le champ de vecteurs $X \in \mathfrak{D}^1(P)$ engendre un groupe uniparamétrique d'automorphismes infinitésimaux pour une connexion donnée sur P si les transformations de ce groupe conservent la forme de connexion, c'est-à-dire*

(36) $$L_X \omega = 0.$$

De l'expression

(37) $$L_X \omega(G) = X\omega(Y) - \omega([X, Y]) = \begin{cases} -\omega([vX, Y]), & Y \in g^*, \\ -\omega(v[X, Y]), & Y \in H, \end{cases}$$

on obtient [1] le

Théorème 6. *Un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{D}^1(P)$ engendre un groupe d'automorphismes infinitésimaux pour une connexion donnée sur $P(M, G)$ si et seulement si*

(38) $$[vX, Y] = 0, \quad \forall Y \in g^*, \quad v[X, Y] = 0, \quad \forall Y \in H.$$

Des théorèmes 4, 5 et 6 il résulte le

Théorème 7. *Soit une connexion sur l'espace fibré principal $P(M, G)$ pour laquelle F est le tenseur de la structure presque-produit associée et ω la forme de connexion. Alors, si un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{D}^1(P)$ satisfait à deux des conditions :*

1) X est invariant par les translations à droite,

2) X est presque-décomposable pour la structure presque-produit F,

3) X engendre un groupe d'automorphismes infinitésimaux pour la connexion,

il satisfait aussi à la troisième.

6. Considérons deux variétés différentiables M et M' douées avec les structures presque-produit définies respectivement par les champs de tenseurs F et F' et soient (V,H) et (V', H') les distributions supplémentaires correspondantes.

Définition 5. *Nous dirons que l'application différentiable $f: M \to M'$ est presque-décomposable relativement au couple (F, F') si les conditions suivantes :*

$$df(V) \subset (V'), \quad df(H) \subset (H' \tag{38}$$

sont satisfaites.

Nous avons le

Théorème 8. *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application $f: M \to M'$ soit presque-décomposable relativement au couple (F, F') est*

$$df_x \circ F_x = F'_{f(x)} \circ df_x, \quad \forall x \in M. \tag{39}$$

En effet, soit l'application $f: M \to M'$ presque-décomposable et $x \in M$, $X \in T_x(M)$. Alors

$$df_x \circ F_x(X) = df_x \circ F_x(vX) + df_x \circ F_x \circ (hX) = df_x(vX) - df\,(hX) =$$
$$= F'_{f(x)} \circ df_x\ v\ (vX) + F'_{f(x)} \circ df_x\,(hX) = F'_{f(x)} \circ df_x\,(X)$$

et par suite la condition (39) est satisfaite.

Réciproquement, soit la condition (39) satisfaite et $x \in M$, $X \in V_x$. Alors

$$F'_{f(x)} \circ df_x(X) = df_x \circ F_x\,(X) = df_x(X),$$

c'est-à-dire $df(V) \subset V'$. En considérant ensuite $X \in H_x$, nous avons

$$F'_{f(x)} \circ df_x(X) = df_x \circ F_x(X) = -\,df_x(X)$$

et par suite, $df(H) \subset H'$.

Définition 6. *Soient maintenant deux espaces fibrés principaux $P(M, G)$ et $P'(M', G')$. On appelle homomorphisme de $P(M, G)$ en $P'(M', G')$ [2] un couple d'applications $f_G : G \to G'$ et $f_P : P_P \to P'$ qui satisfont aux conditions*

1) $f_G(a \,.\, b) = f_G(a) \cdot f_G(b), \quad \forall\, a, b \in G,$
2) $f_P \circ R_a = R_{f_G(a)} \circ f_P, \quad \forall\, a \in G.$

De ces conditions il résulte que l'application $f_P : P - P'$ conserve les fibres et par suite pour les distributions V et V' de P et P' nous avons

$$df(V) \subset V'.$$

Définition 7. *On dit que l'homomorphisme précédent est un homomorphisme de connexion relativement au couple de connexions des distributions horizontales H et H' respectivement sur P et P' si*

$$df(H) \subset H'.$$

En considérant les structures presque-produit associées au couple de connexions sur P et P' on obtient le

Théorème 9. *Un homomorphisme (f_P, f_G) de l'espace fibré principal $P(M, G)$ dans l'espace fibré principal $P'(M', G')$ est un homomorphisme de connexion relativement à un couple de connexions données sur P et P' si et seulement si l'application $f: P \to P'$ est presque-décomposable par rapport au couple de structures presque-produit associées.*

Par suite, dans ce cas, l'application $f_P : P \to P'$ satisfait à la condition (39).

BIBLIOGRAPHIE

1. Hangan Th. — *Automorphismes infinitésimaux et holonomie.* C. R. Paris 247 (1958), p. 411–412.
2. Kobayashi S. and Nomizu K. — *Foundations of differential geometry.* Vol. I, 1963. Interscience Publishers, New York, London.
3. Legrand G. — *Une interprétation de la forme de courbure d'une connexion infinitésimale.* C. R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), p. 3441–3442.
4. Yano K. — *Differential geometry on complex and almost complex spaces.* Pergamon Press, 1965.

ASUPRA STRUCTURII APROAPE-PRODUS ASOCIATE UNEI CONEXIUNI PE UN SPAȚIU FIBRAT

Rezumat

Pornind de la observația că unei conexiuni pe un spațiu fibrat principal i se poate asocia în mod natural o structură aproape-produs, autorul studiază unele proprietăți ale conexiunii cu ajutorul acestei structuri.