ASUPRA UNEI CLASE DE METODE ITERATIVE ÎN SPAȚII BANACH

DE

M. BALÁZS

În lucrările [2] și [3] se dă cîte o metodă pentru rezolvarea ecuațiilor operaționale nelineare

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde operatorul P este definit într-un spațiu Banach X și are valori în spațiul Y de același tip, respectiv X, cu diferențe divizate pînă la ordinul al treilea.

Formulele de recurență folosite în lucrările susamintite sînt:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \overline{\Gamma}_n P(x_n) \tag{2}$$

și

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n [I - P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \overline{\Gamma}_n]^{-1} P(x_n), \tag{3}$$

unde $P(x', x'')$ și $P(x', x'', x''')$ sînt diferențele divizate de ordinul întîi, respectiv al doilea ale operatorului P, iar $\Gamma_n = [P(x_n, x_{n-1})]^{-1}$ și $\overline{\Gamma}_n = [P(x_n, x_{n-2})]^{-1}$ sînt operatorii inverși operatorilor lineari $P(x_n, x_{n-1})$ și $P(x_n, x_{n-2})$, I fiind operatorul identic.

În locul formulei (2) să considerăm formula

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n R_n P(x_n), \tag{2a}$$

unde operatorul $R_n = P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n$, iar $P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$ este diferența divizată de ordinul al doilea a operatorului P.

Teorema 1. *Dacă în domeniul de definiție al operatorului continuu P există punctele x_{-2}, x_{-1}, x_0 astfel încît:*

1° *Există* Γ_0, $\overline{\Gamma}_0$, Γ_{-1} *și* $\max \{\|\Gamma_0\|, \|\overline{\Gamma}_0\|, \|\Gamma_{-1}\|\} = B_1 < +\infty$;

2° $\|P(x_{-2})\| \leqslant \eta_{-2}$, $\|P(x_{-1})\| \leqslant \eta_{-1}$, $\|P(x_0)\| \leqslant \eta_0$

$$(\eta_0 \leqslant \eta_{-1} \leqslant \eta_{-2});$$

3° *În sfera* $S(x_0, R_0^*)$ *există* $\Gamma = [P(x', x'')]^{-1}$ *și* $\|\Gamma\| =$

$$= \|[P(x, x)]^{-1}\| \leqslant B_2,$$

$$\|P(x', x'', x''')\| \leqslant M, \quad \|P(x', x'', x''', x^{nn})\| \leqslant N$$

pentru orice x', x'', x''', x^{nn} (B_2, M, N *sînt numere fixe*);

4° $(E_{-2}^* h_{-2}) < 1$, *unde* $h_n = B^2 M \eta_n$ $(n = -2, -1, 0, 1, \ldots)$,

$$B = \max(B_1, B_2) \text{ și}$$

$$E_n^{*2} = 4 + h_{n+2} + \frac{N}{BM^2}(1 + h_{n+2})(1 + h_{n+1})(3 + h_n)$$

$$(n = -2, -1, 0, 1, \ldots),$$

atunci ecuația (1) *are în sfera* $S(x_0, R_0^*)$ *o soluție și numai una* x^*, $R_0^* = (2B\eta_{-2})/[1 - (E_2^* h_{-2})^2]$ *către care converge șirul* (x_n) *dat de formula* (2a) *și rapiditatea de convergență se caracterizează prin inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant R_0^* (E_{-2}^* h_{-2})^2 \sum_{i=2}^{n-1} t_i,$$

unde $t_i = t_{i-1} + t_{i-2} + t_{i-3}$, $(i = 2, 3, \ldots)$ *și* $t_{-1} = -1$, $t_0 = 1$, $t_1 = 1$.

Teorema se demonstrează (la fel ca în [2]), cu metoda inducției complete luînd în considerare că are loc relația

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \Gamma_n P(x_{n-1}) - \Gamma_n R_n P(x_n)$$

și că pe baza formulei lui Newton, folosind (2a) avem

$$P(x_{n+1}) = -P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x_n - x_{n-2}) \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n P(x_n) +$$

$$+ P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n R_n P(x_n) \Gamma_n P(x_n) +$$

$$+ P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n P(x_{n-1}) \Gamma_n R_n P(x_n) +$$

$$+ P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n R_n P(x_n) \Gamma_n R_n P(x_n) +$$

$$+ P(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n).$$

Observații. 1. Condiția $E_{-2}^* h_{-2} < 1$ este mai puțin restrictivă în anumite cazuri decît condiția corespunzătoare din [2]. În adevăr pentru $h_{-2} = \frac{1}{2}$ avem $E_{-2}^* h_{-2} < 1$, dacă $\frac{N}{BM^2} < \frac{63}{80}$, însă nu avem $E_{-2} h_{-2} < 1$.

2. Teorema 1 este adevărată și în cazul cînd inegalitatea $\|P(x', x'', x''', x^{nn})\| \leqslant N$ din condiția 3° se înlocuiește cu inegalitatea $\|P(x', x'', x^{nn}) - P(x', x'', x''')\| \leqslant N \|x^{nn} - x'''\|$.

Plecînd de la formula (3) se poate demonstra următoarea

Teorema 2. *Dacă condițiile* 1°—3° *ale teoremei* 1 *sînt satisfăcute, în condiția* 3° *luînd în locul sferei* $S(x_0, R_0^*)$ *sfera* $S(x_0, r_0^*)$, *și*

4° $G_{-2}^* h_{-2} < 1$, *unde* $h_n = B^2 M \eta_n$, $h_{-2} < 1$,

$$G_n^{*2} = \frac{3 + h_{n+1} + \dfrac{N}{BM^2}\dfrac{(1 + 2h_{n+1})(1 + 2h_n)}{(1 - h_{n+1})}}{(1 - h_{n+1})^2}, \quad (n = -2, -1, 0, 1, \ldots)$$

atunci ecuația (1) *are o singură soluție* x^* *în sfera* $S(x_0, r_0^*)$, *unde*

$$r_0^* = \frac{(2B\eta_{-2})}{[1 - (G_{-2}^* h_{-2})^2]},$$

către care converge șirul (x_n) *definit de relația* (3) *și rapiditatea convergenței este dată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant r_0^* (G_{-2}^* h_{-2})^2 \sum_{i=2}^{n-1} t_i,$$

unde t_i *are aceeași semnificație ca în teorema precedentă.*

În demonstrarea acestei teoreme ne folosim de egalitatea

$$P(x_{n+1}) = P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n (I - R_n)^{-1} R_n P(x_n) \Gamma_n (I - R_n)^{-1} P(x_n) -$$

$$- P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_n P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x_{n-1}, x_{n-2}) \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) -$$

$$- \Gamma_n (I - R_n)^{-1} P(x_n) +$$

$$+ P(x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-2})(x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} - x_n)$$

obținută pe baza formulei lui Newton luînd în considerare relația (3).

Observații. 1. Condiția $G_{-2}^* h_{-2} < 1$ poate să fie mai puțin restrictivă decît condiția corespunzătoare din [3]. Dacă de exemplu $h_{-2} = \frac{1}{4}$ atunci, $G_{-2}^* h_{-2} < 1$, dacă $N/BM^2 < 23/12$, însă $G_{-2} h_{-2} < 1$ numai dacă $N/BM^2 < 1$.

2. Teorema este adevărată și în cazul precizat în observația 2 de la teorema 1.

Să considerăm formula de recurență

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n (I + \alpha R_n)^{-1} R_n P(x_n) \tag{4}$$

unde α este un parametru real sau complex (vezi [1] și [4]). Din această formulă reobținem metodele (2a) și (3) ca două cazuri particulare dacă luăm $\alpha = 0$ respectiv $\alpha = -1$.

În legătură cu metoda definită de această formulă demonstrăm următoarea teoremă:

Teorema 3. *Dacă în domeniul de definiție al operatorului P există punctele x_{-2}, x_{-1}, x_0 astfel încît următoarele condiții să fie satisfăcute:*

1° *Există Γ_0, $\bar{\Gamma}_0$, Γ_{-1} și* $\max\{\|\Gamma_0\|, \|\bar{\Gamma}_0\|, \|\Gamma_{-1}\|\} = B_1 < +\infty$;

2° $\|P(x_{-2})\| \leqslant \eta_{-2}$, $\|P(x_{-1})\| \leqslant \eta_{-1}$, $\|P(x_0)\| \leqslant \eta_0$,

$$(\eta_0 \leqslant \eta_{-1} \leqslant \eta_{-2});$$

3° *In sfera $S(x_0, R_0^{(\alpha)})$ există $\Gamma = [P(x', x'')]^{-1}$ și*

$\|\Gamma\| = \|[P(x', x'')]^{-1}\| \leqslant B_2$, $\|P(x', x'', x''')\| \leqslant M$, $\|P(x', x'', x''', x'')\| \leqslant N$ *pentru orice x', x'', x''', x''*;

4° $E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2} < 1$, $(1 + |\alpha| h_{-2}) < 1$, *unde* $h_n = B^2 M \eta_n$,

$$(B = \max\{B_1, B_2\}) \text{ și}$$

$$(E_n^{(\alpha)})^2 = + \frac{\{[|1+\alpha|(1+2h_{n+1}) + 2](1 - |\alpha| h_{n+1})\}/(1 - |\alpha| h_{n+1})^2 + (1 + |1+\alpha| h_{n+1}) + \dfrac{N[1 + (1 - |\alpha|) h_{n+1}]^2 [3 + (1 - 3|\alpha|) h_{n+1}]}{BM^2 (1 - |\alpha| h_{n+1})}}{(1 - |\alpha| h_{n+1})^2},$$

$$(n = -2, -1, 0, 1, \ldots),$$

atunci ecuația (1) *are o soluție x^* și numai una în sfera $S(x_0, R_0^{(\alpha)})$, unde $R_0^{(\alpha)} = (2B\eta_{-2})/[1 - (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^2]$, către care converge șirul (x_n) definit de relația* (4), *rapiditatea convergenței fiind dată de inegalitatea*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{2B\eta - 2}{1 - (E_{-2}^{(\alpha)} h - 2)^6} (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^{2\sum_{i=2}^{n-1} t_i}$$

unde t_i are aceeași semnificație ca în teorema precedentă.

Observații. 1. Din condiția 4° rezultă că h_{-2} trebuie să fie mai mic decît 1.

2. Din condiția 1° și 2° rezultă că x_{-1}, x_{-2} se găsesc în sfera $S(x_0, R_0^{(\alpha)})$.

Demonstrație. Din condițiile 1°–4° ale teoremei și din observația 2 rezultă posibilitatea construcției lui x_1 precum și relația $x_1 \in S(x_0, R_0^{(\alpha)})$. În adevăr, pe baza formulei (4) avem

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant B\eta_0 \frac{1 + (1 - |\alpha|) h_{-1}}{1 - |\alpha| h_{-1}} < 2B\eta_{-2} < R_0^{(\alpha)}.$$

Demonstrăm că pentru punctele x_{-1}, x_0, x_1, condițiile teoremei sînt satisfăcute.

1° rezultă în mod evident din observația 2 și din condiția 3°

2° Din formula lui Newton folosind relația (4) rezultă

$$P(x_1) = (1 + \alpha)(I + \alpha R_0)^{-1} R_0 R_0 P(x_0) +$$
$$+ P(x_0, x_{-1}, x_{-2}) \Gamma_0 [(I + \alpha R_0)^{-1} R_0 P(x_0) - P(x_0, x_{-1}, x_{-2}) \times$$
$$\times (x_0 - x_{-2}) \Gamma_{-1} P(x_{-1})] \Gamma_0 (I + \alpha R_0)^{-1} [I + (1 + \alpha) R_0] P(x_0) +$$
$$+ P(x_1, x_0, x_{-1}, x_{-2})(x_1 - x_{-2})(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_0),$$

de unde pe baza inegalităților

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant B\eta_0 \frac{1 + (1 - |\alpha|) h_{-1}}{1 - |\alpha| h_{-1}},$$

$$\|x_1 - x_{-1}\| \leqslant B\eta_{-1} \frac{1 + (1 - |\alpha|) h_{-1}}{1 - |\alpha| h_{-1}},$$

$$\|x_1 - x_{-2}\| \leqslant B\eta_{-2} \frac{3 + (1 - 3|\alpha|) h_{-1}}{1 - |\alpha| h_{-1}}$$

se obține

$$\|P(x_1)\| \leqslant (E_{-2}^{(\alpha)})^2 h_{-1} h_{-2} \eta_0 \leqslant (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^2 \eta_0 = \eta_1 < \eta_0.$$

3° Condițiile sînt în mod evident satisfăcute.

4° Avînd în vedere că $h_{-1} = B^2 M \eta_{-1} \leqslant B_1 M \eta_{-2} = h_{-2}$, se vede ușor că $(E_{-1}^{(\alpha)})^2 \leqslant (E_{-2}^{(\alpha)})^2$, deci $E_{-1}^{(\alpha)} h_{-1} < 1$ și $(1 + |\alpha|) h_{-1} < 1$.

Prin inducție completă se demonstrează posibilitatea construirii aproximației x, condițiile 1°–4° pentru punctele x_n, x_{n-1}, x_{n-2} și următoarele relații:

$$\eta_{n+3} \leqslant (E_n^{(\alpha)} h_n)^2 \eta_{n+2} \tag{5}$$

$$h_{n+3} \leqslant \frac{(E_n^{(\alpha)} h_n)^3}{E_n^{(\alpha)}}, \tag{6}$$

unde $\|P(x_{n+3})\| \leqslant \eta_{n+3}$, $(n = -2, -1, 0, 1, \ldots)$.

Din relaţia (5) rezultă că pentru orice $n \geqslant 1$, $x_n \in S(x_0 R_0^{(\alpha)})$, $x_n \in S(x_{n-1}, R_0^{(\alpha)})$, $x_n \in S(x_{-2}, R_0^{(\alpha)})$. În adevăr, de exemplu, avem

$$\|x_n - x_0\| \leqslant B \frac{1 + (1 - |\alpha| h_{-2})}{1 - |\alpha| h_{-2}} (\eta_0 + \eta_1 + \ldots + \eta_n) \frac{2B\eta_1}{1 - (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^2} \leqslant R_0^{(\alpha)}$$

Pe baza relaţiilor (5) şi (6) avem

$$\eta_{n+1} \leqslant \eta_0 (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^{2\sum_{i=2}^{n} l_i}, \tag{7}$$

de unde obţinem

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{2B\eta_{-2}}{1 - (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^6} (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^{2\sum_{i=2}^{n-1} l_i}. \tag{8}$$

Relaţia (8) ne arată că şirul definit de relaţia (4) este fundamental, deci are limită $x^* \in X$. În mod evident avem $x^* \in S(x_0, R_0^{(\alpha)})$, $x^* \in S(x_{-1}, R_0^{(\alpha)})$, $x^* \in S(x_{-2}, R_0^{(\alpha)})$. Tot din relaţia (8), pentru $p \to \infty$ obţinem inegalitatea care caracterizează rapiditatea de convergenţă a şirului de aproximaţie

Din relaţia (7) rezultă că

$$\|P(x_n)\| \leqslant \eta_0 (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^{2\sum_{i=2}^{n-1} l_i},$$

de unde trecînd la limită pentru $n \to \infty$ şi ţinînd cont de continuitatea operatorului P, avem $P(x^*) = 0$, adică x^* este soluţia ecuaţiei (1).

Arătăm că x^* este soluţia unică a ecuaţiei (1) în sfera $S(x_0, R_0^{(\alpha)})$. În adevăr, fie $\tilde{x} \in S(x_0, R_0^{(\alpha)})$ o soluţie arbitrară a ecuaţiei (1). Conform condiţiei 3° există $[P(\tilde{x}, x_n)]^{-1}$ şi $\|[P(\tilde{x}, x_n)]^{-1}\| \leqslant B$. Avem mai departe

$$\tilde{x} - x_n = [P(\tilde{x}, x_n)]^{-1} P(\tilde{x}, x_n)(\tilde{x} - x_n) = -[P(\tilde{x}, x_n)]^{-1} P(x_n)$$

de unde

$$\|\tilde{x} - x_n\| \leqslant B\eta_0 (E_{-2}^{(\alpha)} h_{-2})^{2\sum_{i=2}^{n-1} l_i},$$

ceea ce înseamnă că $\lim_{n \to \infty} x_n = \tilde{x}$, adică $\tilde{x} = x^*$, şi astfel teorema este în întregime demonstrată.

Observaţie. Teorema are loc şi în cazul precizat în observaţia 2 de la teorema 1.

BIBLIOGRAFIE

1. Kazik I. I. — *Despre o clasă a metodelor iterative pentru rezolvarea aproximativă a ecuaţiilor operaţionale.* ДАН СССР, 112, 4, 579—582 (1957).
2. Balázs M. and Goldner G. — *On an iterative method with difference quotients of the second order.* Sub tipar.
3. Balázs M. and Goldner G. — *On an analogical iterative method with the method of the tangent hyperbolas.* Sub tipar.
4. Balázs M. — *Asupra rezolvării ecuaţiilor operaţionale neliniare printr-o metodă de iteraţie.* Sub tipar.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj
Institutul pedagogic

ON A CLASS OF ITERATIVE METHOD IN BANACH SPACES

Abstract

It is studied the solving nonlinear operational equations $P(x) = 0$, where P is a nonlinear operator defined in a Banach space, using the difference quotients of the second order. The used reccursive formula is analogous with the formula of [1]. Generalizing the results of [2] and [3] an existence and uniqueness theorem (Theorem 3) for the solution of this equation is proved.