ASUPRA CONVERGENȚEI UNEI CLASE DE METODE ITERATIVE ÎN SPAȚII BANACH

DE

G. GOLDNER

În lucrarea sa [1], M. Balazs dă o clasă de metode de iterație pentru rezolvarea ecuației

$$P(x) = 0, \tag{1}$$

unde P este un operator definit pe spațiul Banach X, cu valori în X care are diferențe divizate pînă la ordinul al treilea.

În această lucrare ne propunem îmbunătățirea rapidității de convergență a acestei metode. În acest scop scriem ecuația (1) sub forma

$$P(x) = x - \Phi(x) = 0 \tag{1'}$$

și considerăm metoda dată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n(I + \alpha R_n)^{-1} R_n P(x_n) \tag{2}$$

unde α este un parametru real sau complex, $\Gamma_n = (P_{x_n, u_n})^{-1}$ este inversul diferenței divizate de ordinul întîi a operatorului P în punctele x_n și u_n $R_n = P_{x_n, u_n, v_n} \overline{\Gamma}_n P(u_n) \Gamma_n \overline{\Gamma}_n = (P u_{n}, v_n)^{-1}$, $u_n = \Phi(x_n)$, $v_n = \Phi(u_n)$, iar P_{x_n, u_n, v_n} este diferența divizată de ordinul al doilea a lui P, I fiind operatorul identic.

Teoremă. *Dacă există un element $x_0 \in X$ pentru care sînt îndeplinite condițiile:*

1° $\|P(x_0)\| \leqslant \eta_0$;

2° *pentru orice x', x'', x''', x din sfera $S(x_0, r)$ au loc limitările*

a) $\|(\Gamma_{x' x''})^{-1}\| \leqslant B$,

b) $\|\Phi_{x', x''}\| \leqslant K$, $K \geqslant 1$,

c) $\|P_{x',x'',x'''}\| \leqslant M$.

d) $\|P_{x',x'',x''',x^{IV}}\| \leqslant N$;

3° $E_0 h_0 < 1$

unde

$$E_0^2 = \{[|1+\alpha|(1+h_0)+1](1-|\alpha|h_0) + \frac{1}{K}(1+|1+\alpha|h_0)\}/(1-|\alpha|h_0)^2 + \frac{N[1+(1-|\alpha|)h_0]^2[h_0+(2+K^2)(1-|\alpha|h_0)]}{BM^2K(1-|\alpha|h_0)(1-|\alpha|h_0)^2}$$

$h_0 = B^2MK\eta_0, \quad |\alpha| h_0 < 1$,

atunci în sfera $S(x_0, r)$, *unde* $r = (1+K)\eta_0 + K^2L$, *iar*

$$L = B\eta_0 \frac{1+(1-|\alpha|)h_0}{1-|\alpha|h_0}\sum_{n=0}^{\infty}(E_0h_0)^{3^n-1}$$

ecuația (1) *are o soluție* x^* *și numai una, către care converge șirul* (x_n) *definit prin algoritmul* (2), *iar rapiditatea de convergență se caracterizează prin inegalitatea*:

$$\|x^* - x_n\| \leqslant (E_0h_0)^{3^n-1}L. \tag{3}$$

Demonstrație. Se observă că u_0 și v_0 sînt în $S(x_0, r)$. Pe baza condițiilor 1° și 2°, obținem evaluările

$$\|P(u_0)\| \leqslant K\eta_0, \quad \|P(v_0)\| \leqslant K^2\eta_0, \quad \|x_0 - u_0\| \leqslant \eta_0, \quad \|x_0 - v_0\| \leqslant (1+K)\eta_0.$$

De asemenea din condițiile 1°, 2° și 3° rezultă:

$\|\alpha R_0\| \leqslant |\alpha|h_0 < 1$ deci $(I + \alpha R_0)^{-1}$ există și $\|(I+\alpha R_0)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-|\alpha|h_0}$;

deci x_1 se poate construi pe baza formulei (2) și

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{B\eta_0}{1-|\alpha|h_0}[1+(1-|\alpha|)h_0] \leqslant r.$$

Vom arăta că pentru x_1 sînt verificate condițiile 1° — 3° ale teoremei. Utilizînd formula

$$P(x_1) = (1+\alpha)(I+\alpha R_0)^{-1}R_0R_0P(x_0) + P_{x_0,u_0,v_0}\Gamma_0[(I+\alpha R_0)^{-1}R_0P(x_0) - P_{x_0,u_0,v_0}(x_0 - v_0)\Gamma_{-1}P(u_0)]\Gamma_0(I+\alpha R_0)^{-1}[I+(1+\alpha)R_0]P(x_0) + P_{x_1,x_0,u_0,v_0}(x_1 - v_0)(x_1 - u_0)(x_1 - x_0),$$

precum și evaluările

$$\|x_1 - x_0\| \leqslant \frac{B\eta_0}{1-|\alpha|h_0}[1+(1-|\alpha|)h_0],$$

$$\|x_1 - u_0\| \leqslant \frac{KB\eta_0}{1-|\alpha|h_0}[1+(1-|\alpha|)h_0],$$

$$\|x_1 - v_0\| \leqslant \frac{B\eta_0}{1-|\alpha|h_0}[h_0+(2+K^2)(1-|\alpha|h_0)],$$

obținem:

$$\|P(x_1)\| \leqslant (E_0h_0)^2\eta_0 = \eta_1 < \eta_0,$$

deci condiția 1° este satisfăcută.

Condițiile 2° sînt evident satisfăcute.

Condiția 3° se verifică luînd $h_1 = B^2MK\eta_1$ și știind că $h_1 = B^2MK\eta_1 < B^2MK\eta_0 = h_0$, de unde $E_1 < E_0$ și $E_1h_1 < E_0h_0$.

Prin inducție se arată că x_n poate fi construit pe baza formulei (2) și au loc relațiile

$$\|P(x_n)\| \leqslant \eta_n; \quad \|P(u_n)\| \leqslant K\eta_n; \quad \|P(v_n)\| \leqslant K^2\eta_n. \tag{4}$$

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{B\eta_n}{1-|\alpha|h_n}[1+(1-|\alpha|)h_n],$$

$$\|x_{n+1} - u_n\| \leqslant \frac{KB\eta_n}{1-|\alpha|h_n}[1+(1-|\alpha|)h_n], \tag{5}$$

$$\|x_{n+1} - v_n\| \leqslant \frac{B\eta_n}{1-|\alpha|h_n}[h_n+(2+K^2)(1-|\alpha|h_n)],$$

$$\|P(x_{n+1})\| \leqslant (E_nh_n)^2\eta_n = \eta_{n+1}. \tag{6}$$

Din $h_n = B^2MK\eta_n \leqslant \frac{1}{E_0}(E_0h_{n-1})^3$ rezultă:

$$h_n \leqslant \frac{1}{E_0}(E_0h_0)^{3^n} \quad \text{și} \tag{7}$$

$$\eta_{n+1} \leqslant (E_0h_0)^{3^{n+1}-1}\eta_0. \tag{8}$$

Obținem atunci

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \frac{B\eta_0}{}\frac{1+(1-|\alpha|)h_0}{1-|\alpha|h_0}(E_0h_0)^{3^n-1}, \text{ și de aici}$$

$$\|x_{n+p} - x_n\| \leqslant \frac{B\eta_0[1+(1-|\alpha|)h_0]}{1-h_0}(E_0h_0)^{3^n-1}\sum_{k=1}^{p}(E_0h_0)^{3^n(3^{k-1}-1)}; \tag{9}$$

X fiind complet rezultă că există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Dacă în (9) facem pe $p \to \infty$ rezultă inegalitatea (3). Faptul că $P(x)^* = 0$ rezultă din (6) ţinînd cont de (8) şi continuitatea lui P. Se vede uşor că $x_n \in S(x_0, r)$, $u_n \in S(x_0, r)$ şi $v_n \in S(x_0, r)$, deci $x^* \in S(x_0, r)$.

Pentru a demonstra unicitatea soluţiei presupunem $\tilde{x} \in S(x_0, r)$, $P(\tilde{x}) = 0$ şi $\tilde{x} \neq x^*$. Avem:

$$||\tilde{x} - x_n|| = ||(P_{\tilde{x}, x_n})^{-1} P_{\tilde{x}, x_n} (\tilde{x} - x_n)|| \leq B||P(x_n)|| \leq B(E_0 h_0)^{3^n - 1} \eta_0,$$

deci $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \tilde{x}$ şi $\tilde{x} = x^*$.

Observaţii. 1. În cazul în care $K < 1$, e suficient să considerăm $K = 1$.

2. Pentru $\alpha = 0$, $\alpha = -1$, obţinem cazuri particulare care prezintă analogii cu [2].

BIBLIOGRAFIE

1. Balázs M. — *Asupra unei clase de metode iterative în spaţii Banach*. An. şt. Univ. Iaşi. t. XV, Matematică (1969), p. 179.
2. Balázs M. şi Birsan F. — *Asupra unor metode iterative cu diferenţe divizate de ordinul doi şi rapiditatea de convergenţă de ordinul trei pentru rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare*. Sub tipar.

Universitatea „Babeş-Bolyai" Cluj
Institutul pedagogic de 3 ani
Catedra de matematică

SUR LA CONVERGENCE D'UNE CLASSE DE MÉTHODES ITÉRATIVES DANS UN ESPACE DE BANACH

Résumé

On considère l'amélioration de la rapidité de la convergence d'une classe de méthodes itératives étudiées en [1]. On donne un théorème d'existence et d'unicité de la solution de (1), en utilisant la suite d'approximantes (2).

ON A ROUTING PROBLEM WITH THREE INDICES

BY

CORINA REISCHER

Let (R) be a routing network, with every two vertices P_i and $P_j (i, j = 1, \ldots, N;\ i \neq j)$ linked by at most n arcs. The times required to traverse these arcs are given, they are not directly proportional to the distances, and let us denote them by t_{ij}^k $(i, j = 1, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, n)$. Here the lower indices of t correspond to the points P_i, P_j, the upper one to the arc used. The variation of t_{ij}^k as a function of k, expresses the different natures of the n arcs, corresponding to the same vertices P_i and P_j.

We consider the probleme of determining the path from one given vertex to another given vertex, which minimizes the travel time.

Interpretation. The vertices P_i of the routing network may be cities and the n arcs which linke every pair of the cities may be the different transport means between those cities (bus, train, airline, ship and so on), the time may be the cost and we may wish to determine the route from one given city to another given city utilizing those component arcs of the route which minimize the total cost.

The problem we wish to treat is a combinatorial one involving the determination of an optimal route from one point to another, and we solve this problem by extending Bellman's algorithm [3].

Let $P_i (i = 1, \ldots, N)$ be the vertices of the routing network (R), P_N the final vertex, $T = (t_{ij}^k)$ $(i, j = 1, \ldots, N;\ k = 1, \ldots, n)$ a three-dimensional matrix related to the network, and t_{ij}^k is the time required to travel from P_i to P_j using the arc number k. We consider $t_{ij}^k = 0$ if $i = j$, and $t_{ij}^k = \infty$, $i \neq j$, if the transport mean number k between P_i and P_j does not exist.