PROBLEMA PLANĂ A TERMOELASTICITĂȚII PENTRU MEDII TOTAL ANIZOTROPE

DE

A. MANOLACHI

Comunicare prezentată la colocviul „Probleme matematice ale mecanicii mediilor continue deformabile" — 16. XI. 1967, București

Se consideră un mediu elastic omogen anizotrop avînd forma unui cilindru de lungime infinită plasat într-un cîmp de temperatură staționar a cărui distribuție în lungul generatoarelor cilindrului este uniformă.

Admițînd că nu există surse interioare de căldură cîmpul termic ce se instalează în interiorul corpului provine exclusiv din transferul de căldură prin suprafața sa.

Situîndu-se în cazul cînd aceasta este liberă de tensiuni și acțiunea forțelor masice lipsește, deformarea mediului elastic este cauzată numai de prezența temperaturii și depinde esențial de modul de variație a acesteia.

Deoarece cîmpul de temperatură la suprafața cilindrului este uniform în lungul generatoarelor, starea termică interioară a corpului va fi aceeași în orice secțiune transversală și prin urmare, pentru a o studia este suficient să ne situăm într-o asemenea secțiune. Vom presupune că cilindrul nu prezintă goluri longitudinale și deci că domeniul secțiunii transversale, pe care îl vom nota cu D, este simplu conex. Frontiera L a acestuia este o curbă simplă, închisă netedă în întregime sau pe porțiuni, pe care s-a precizat un anumit sens de parcurs ca pozitiv.

Dacă inițial secțiunea considerată era plană, prin deformare termică aceasta își schimbă forma deplanîndu-se. Deoarece temperatura nu variază în lungul cilindrului o altă secțiune se va deforma la fel. Cu alte cuvinte, în mediul elastic considerat, ia naștere o stare de deformare termoelastică plană.

Prezentul articol își propune să dea o metodă de rezolvare a problemei la limită ce caracterizează starea de deformare termoelastică plană în ipoteza că mediul elastic este total anizotrop.

Se arată mai întîi că reprezentarea temperaturii şi a tensiunilor prin funcţii de variabilă complexă, cunoscută pentru corpurile dotate cu anizotropii particulare, se extinde cu uşurinţă la mediile cu anizotropie generală (1,2). Găsirea soluţiei problemei la limită corespunzătoare revine la a determina funcţiile complexe arbitrare din condiţiile ca pe frontieră să nu existe tensiuni. Se stabileşte echivalenţa acestor condiţii cu un sistem de ecuaţii integrale Fredholm de specia a doua [3] ale cărui proprietăţi (4) permit demonstrarea existenţei soluţiei problemei amintită mai sus (5).

O metodă diferită de cea prezentată aici a fost dată de către C. I. B o r ş [2]. Alte metode de studiu al tensiunilor de temperatură în corpuri ce posedă tipuri particulare de anizotropie sînt ilustrate în [3], [8], [10]. Rezultate remarcabile privind rezolvarea unor probleme de termoelasticitate pentru corpurile anizotrope au fost obţinute de către D. I e ş a n în teza sa de doctorat [4].

1. Cîmpul termic

Ataşăm cilindrului reperul triortogonal cartezian $Oxyz$ în care axele Ox, Oy sînt dirijate arbitrar în planul secţiunii transversale, originea aparţine acesteia, iar Oz este paralelă cu generatoarele. Conform celor spuse anterior funcţia T reprezentînd variaţia temperaturii în corp este independentă de variabila z, şi prin urmare ea trebuie căutată printre funcţiile ce verifică ecuaţia [8]:

$$k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + 2k_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + k_3 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0, \tag{1.1}$$

în care k_1, k_2, k_3 sînt constante ce caracterizează proprietăţile de conductibilitate termică ale mediului.

Soluţia ecuaţiei (1.1) se determină astfel încît pe frontiera domeniului D să satisfacă anumitor condiţii date; nu ne vom opri asupra acestora. Ele sînt bine cunoscute în literatura de specialitate şi caracterizează diversele moduri de interacţiune termică dintre solid şi mediu ambiant [1], [3].

În cele ce urmează, amintim o transformare a ecuaţiei (1.1) comodă în aplicaţii şi care conduce la rezolvarea pe o cale elegantă a problemelor la limită asociate acesteia. Este vorba de faptul că discriminatul ecuaţiei algebrice

$$k_3 \nu^2 + 2k_2 \nu + k_1 = 0, \tag{1.2}$$

fiind negativ, este posibilă introducerea variabilei complexe

$$z_0 = \xi_0 + i\eta_0 = x + \nu y; \qquad i = \sqrt{-1} \tag{1.3}$$

generată de rădăcina $\nu = \alpha_0 + i\beta_0$ a ecuaţiei precedente, astfel că, în variabilele ξ_0, η_0, (1.1) devine

$$\frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \xi_0^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{T}}{\partial \eta_0^2} = 0. \tag{1.4}$$

Acest fapt ne conferă posibilitatea să privim funcţia $\mathcal{T}(\xi_0, \eta_0) = T[x(\xi_0, \eta_0), y(\xi_0, \eta_0)]$ ca partea reală a unei funcţii $\varphi_0(z_0)$:

$$2\mathcal{T}(\xi_0, \eta_0) = \varphi_0(z_0) + \overline{\varphi_0(z_0)}, \tag{1.5}$$

funcţia menţionată fiind analitică şi uniformă în domeniul $\mathcal{D}$ imagine a domeniului D prin transformarea afină

$$\xi_0 = x + \alpha_0 y; \qquad \eta_0 = \beta_0 y. \tag{1.6}$$

Condiţiile la care era supusă funcţia $T(x,y)$ pe frontiera L, se transferă fără dificultate, ţinînd seama de (1.6), pe frontiera $\mathcal{L}$. Ele vor servi la determinarea funcţiei $\varphi_0(z_0)$. Avînd-o pe aceasta, $\mathcal{T}(\xi_0, \eta_0)$ rezultă din (1.5).

Astfel prin transformarea menţionată problema integrării ecuaţiei (1.1) cu condiţii date pe L se reduce la probleme de natura următoare: să se găsească o funcţie olomorfă într-un domeniu, cînd pe frontieră se dau partea ei reală sau o combinaţie între partea reală şi cea imaginară.

Problemele la limită de acest tip sînt bine studiate şi diverse metode de rezolvare pot fi găsite în [6], [7].

2. Starea de deformare termică plană. Ecuaţii fundamentale

Admiţînd că funcţia $T(x,y)$ a fost determinată, presupunem că deplasările produse de către acest cîmp de temperatură sînt funcţii numai de x şi y:

$$u = u(x, y); \quad v = v(x, y); \quad w = w(x, y). \tag{2.1}$$

În consecinţă aceeaşi proprietate o vor avea şi deformările

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, y), \ldots, \gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y). \tag{2.2}$$

Determinarea stării de tensiune care ia naştere în corp revine la a determina în fiecare punct al acestuia componentele tensorului tensiunilor $\sigma_x, \ldots \tau_{xy}$. Între acestea din urmă, deformări şi temperatură, în cadrul teoriei liniare a termoelasticităţii există relaţiile [8].

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + \ldots + a_{16}\tau_{xy} - A_1 T, \\ \varepsilon_y &= a_{21}\sigma_x + \ldots + a_{26}\tau_{xy} - A_2 T, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + \ldots + a_{66}\tau_{xy} - A_6 T. \end{aligned} \tag{2.3}$$

în care a_{ij} şi A_i sînt constante ce caracterizează proprietăţile elastice şi termice ale materialului din care este alcătuit corpul.

În ipotezele noastre ecuațiile echilibrului elastic se simplifică:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0, \tag{2.4}$$

iar condițiile de compatibilitate devin:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \tag{2.5 a}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0, \tag{2.5 b}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 0. \tag{2.5 c}$$

Egalitățile (2.5 b) conduc la $\varepsilon_z = 0$ și, din relația

$$\varepsilon_z = a_{31}\sigma_x + \ldots + a_{36}\tau_{xy} - A_3 T,$$

rezultă

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}}\left(a_{31}\sigma_x + \ldots + a_{36}\tau_{xy} - A_3 T\right). \tag{2.6}$$

Ținînd seama de aceasta, (2.3) devin

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= b_{11}\sigma_x + \ldots + b_{16}\tau_{xy} - B_1 T, \\ \varepsilon_y &= b_{21}\sigma_x + \ldots + b_{26}\tau_{xy} - B_2 T, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{xy} &= b_{61}\sigma_x + \ldots + b_{66}\tau_{xy} - B_6 T, \end{aligned} \tag{2.3'}$$

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}\,; \quad B_i = \frac{a_{i3}A_2}{a_{33}} - A_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots 6).$$

Procedînd ca în [5], satisfacem (2.4) dacă punem:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}\,; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{2.7}$$

Se înțelege că funcțiile $F(x, y)$, $\psi(x, y)$ nu pot fi arbitrare. Acestea trebuie să satisfacă ecuațiile ce se obțin din condițiile ca deformările (2.2) date de (2.3) în care înlocuim (2.4) să verifice (2.5 a), (2.5 b). În plus funcțiile amintite se cer determinate astfel ca pe frontiera L să avem

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) &= 0, \\ \tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= 0, \\ \tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) &= 0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

căci prin ipoteză, suprafața laterală este liberă de tensiuni.

Introducînd operatorii:

$$\mathcal{L}_4 \equiv b_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2b_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2b_{12} + b_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2b_{26}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + b_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$\mathcal{L}_3 \equiv b_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (b_{25} + b_{65})\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (b_{14} + b_{25})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - b_{15}\frac{\partial^3}{\partial y^3},$$

$$\mathcal{L}_2 \equiv b_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2b_{45}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\mathcal{M}_2 = -B_2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + B_6\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - B_1\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\mathcal{M}_1 \equiv B_4\frac{\partial}{\partial x} - B_5\frac{\partial}{\partial y},$$

ecuațiile diferențiale care rezultă prin impunerea condițiilor (2.5 a), (2.5 b) sînt următoarele:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 F + \mathcal{L}_3\psi + \mathcal{M}_2 T &= 0, \\ \mathcal{L}_3 F + \mathcal{L}_2\psi + \mathcal{M}_1 T &= 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ținînd seama de (1.5) și prin aceasta de forma funcției $T(x, y)$, ecuațiile precedente devin:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 F + \mathcal{L}_3\psi &= -2\,\mathrm{Re}\left[m_2(\nu)\,\varphi_0''(z_0)\right], \\ \mathcal{L}_3 F + \mathcal{L}_2\psi &= -2\,\mathrm{Re}\left[m_1(\nu)\,\varphi_0'(z_0)\right], \\ m_2(\nu) &= -B_1\nu^2 + B_6\nu - B_2, \\ m_1(\nu) &= -B_5\nu + B_4. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Soluția generală a sistemului (2.10) se compune din soluția generală a sistemului omogen la care adăugăm o soluție particulară a sistemului neomogen. Reprezentarea primei soluții dată de către S. N. Lehnițki [5] este pusă în legătură cu ecuația algebrică:

$$l(\mu) = l_4(\mu)\,l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0, \tag{2.11}$$

în care

$$l_4(\mu) = b_{11}\mu^4 - 2b_{13}\mu^3 + (2b_{16} + b_{66})\mu^2 - 2b_{26}\mu + b_{22},$$

$$l_3(\mu) = b_{15}\mu^3 - (b_{14} + b_{56})\mu^2 + (b_{25} + b_{64})\mu - b_{24},$$

$$b_2(\mu) = b_{55}\mu^2 - 2b_{34}\mu + b_{44}.$$

Cum această ecuație are întotdeauna rădăcini complexe, oricare ar fi materialul elastic omogen considerat ([5], p. 120), integrala generală a sistemului (2.10) omogen se scrie cu ajutorul a trei funcții analitice arbitrare, de variabilele

$$z_k = x + \mu_k y; \quad z_k = \xi_k + i\eta_k; \quad k = 1, 2, 3, \tag{2.12}$$

în care μ_k sînt rădăcinile ecuației (2.11):

$$\mu_k = \alpha_k + i\beta_k. \tag{2.13}$$

În cazul cînd aceste rădăcini sînt distincte forma generală a funcțiilor F și ψ, soluții ale sistemului (2.10) este:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 2\mathrm{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)] + F_0(x, y), \\ \psi(x, y) &= 2\,\mathrm{Re}[G_1(z_1) + G_2(z_2) + G_3(z_3)] + \psi_0(x, y), \end{aligned} \tag{2.14}$$

în care $F_1, \ldots G_3$ sînt funcții arbitrare de argumentele lor, analitice în domeniile D_1, D_2, D_3 care se obțin din D prin transformările afine generate de rădăcinile μ_k ale ecuației (2.11).*)

Deși, așa cum se vede din (2.14) soluția generală a sistemului (2.10) depinde de șase funcții arbitrare, se demonstrează că numai primele trei sînt esențiale, funcțiile G_1, G_2, G_3 exprimîndu-se prin derivatele funcțiilor F_1, F_2, F_3 ([5], p. 120).

În (2.14) am notat cu F_0 și ψ_0 o pereche de soluții particulare.

Ținînd seama de forma specială a termenilor din membrii drepți din (2.10) se verifică fără dificultate că un sistem de funcții cu proprietatea de mai sus este următorul:

$$\begin{aligned} F_0(x, y) &= 2\,\mathrm{Re}\left[\int \Lambda(z_0)dz_0\right], \\ \psi_0(x, y) &= 2\,\mathrm{Re}[\chi(z_0)], \end{aligned} \tag{2.15}$$

---

* Ținînd seama de (2.12) și (2.13) corespondența între punctele domeniului D și ale domeniilor D_k este dată de formulele:

$$\xi_k = x + \alpha_k y, \quad \eta_k = \beta_k y.$$

Aceleași formule leagă punctele corespunzătoare de pe frontierele L și L_k. Dacă pe L am precizat un anumit sens de parcurs ca pozitiv, în general pe L_k sensul se poate schimba. El va rămîne totuși același dacă determinantul funcțional

$$\frac{\partial(\xi_k, \eta_k)}{\partial(x, y)} = \beta_k$$

este pozitiv. Acest lucru înseamnă că trebuie să fie pozitivă partea imaginară a rădăcinii μ_k. În cele ce urmează vom presupune (fără să restrîngem prin aceasta generalitatea problemei) că situația de mai sus are loc.

în care

$$\Lambda(z_0) = \frac{k}{l(\nu)}\int \varphi_0(z_0)dz_0, \quad \chi(z_0) = \frac{L}{l(\nu)}\int \varphi_0(z_0)dz_0,$$

$$K = l_3(\nu)\, m_1(\nu) - l_2(\nu)\, m_2(\nu),$$

$$L = l_3(\nu) m_2(\nu) - l_4(\nu)\, m_1(\nu).$$

Cunoașterea funcțiilor F_1, F_2, F_3, F_0 și ψ_0 atrage după sine în virtutea relațiilor (2.7) cunoașterea tensiunilor în mediul elastic considerat:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu^2\varphi_1'(z_1) + \mu_2^2\varphi_2'(z_2) + \mu_3^2\varphi_3'(z_3) + \varkappa_0\nu^2\varphi_0(z_0)], \\ \sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}\,[\varphi_1'(z_1) + \varphi_2'(z_2) + \varphi_3'(z_3) + \varkappa_0\varphi_0(z_0)], \\ \tau_{yz} &= -2\mathrm{Re}[\lambda_1\varphi_1'(z_1) + \lambda_2\varphi_2'(z_2) + \lambda_3\varphi_3'(z_2) + \lambda_0\varphi_0(z_0)], \\ \tau_{xz} &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\lambda_1\varphi_1'(z_1) + \mu_2\varphi_2'(z_2) + \mu_3\lambda_3\varphi_3'(z_3) + \lambda_0\nu\varphi_0(z_0)], \\ \tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}[\mu_1\varphi_1'(z_1) + \mu_2\varphi_2'(z_2) + \mu_3\varphi_3'(z_3) + \varkappa_0\nu\varphi_0(z_0)], \\ \lambda_1 &= -\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}; \quad \lambda_2 = -\frac{l_3(\mu_2)}{l_2(\mu_2)}; \quad \lambda_3 = -\frac{l_4(\mu_3)}{l_3(\mu_3)}, \\ \varkappa_0 &= \frac{K}{l(\nu)}, \quad \lambda_0 = \frac{L}{l(\nu)}, \quad \varphi_k(z_k) = \frac{dF_k}{dz_k}, \quad k = 1,2,3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Funcțiile $\varphi_k(z_k)$ se determină astfel încît pe frontiera L tensiunile (2.16) să satisfacă condițiile (2.8). Ținînd seama de (2.16) aceste condiții exprimate prin valorile limită ale funcțiilor precedente se scriu sub forma ([5], p. 126)

$$\begin{aligned} &(1 + i\mu_1)\varphi_1(t_1) + (1 + \bar{i}\mu_1)\overline{\varphi_1(t_1)} + (1 + i\mu_2)\varphi_2(t_2) + \\ &(1 + i\mu_2)\overline{\varphi_2(t_2)} + (1 + i\mu_3)\varphi_3(t_3) + (1 + \bar{i}\mu_3)\overline{\varphi_3(t_3)} = f(t) + C \end{aligned} \tag{2.17 a}$$

$$\begin{aligned} &\lambda_1\varphi_1(t_1) + \bar{\lambda}_1\overline{\varphi_1(t_1)} + \lambda_2\varphi_2(t_2) + \bar{\lambda}_2\varphi_2(t_2) + \lambda_3\varphi_3(t_3) + \\ &+ \bar{\lambda}_3\overline{\varphi_3(t_3)} = g(t) + c \end{aligned}$$

$$f(t) = \lim_{z_0 \to t}[(1 + i\nu)\Lambda(z_0) + (1 + \bar{i}\nu)\Lambda(z_0)]; \tag{2.17 b}$$

$$g(t) = -2\lim_{z_0 \to t}\{\mathrm{Re}\,[\chi(z_0)]\}, \quad t_k \in L_k, \quad t \in L.$$

Deoarece în cazul domeniilor simplu conexe valorile constantelor C și c pot fi fixate arbitrar, vom considera mai departe $C = c = 0$. Egalitățile (2.17) pot fi satisfăcute în diverse moduri. Am putea spre exemplu să alegem funcțiile $\varphi_k(z_k)$ de o anumită formă și să determinăm arbitrarul acestora prin condițiile de mai sus. Acest mod de rezolvare este adecvat însă pentru anumite domenii particulare. În cazul domeniilor de formă generală o metodă este aceea de a căuta reducerea condițiilor (2.17) la un sistem de ecuații integrale care să dea funcțiile $\varphi_k(t_k)$. Avîndu-le pe acestea, $\varphi_k(z_k)$ sînt date de teorema lui Cauchy:

$$\varphi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\varphi_k(z_k)}{t_k - z_k}\, dt_k, \quad z_k \in D_k. \tag{2.18}$$

Adăugînd la (2.18) funcția cunoscută $\varphi_0(z_0)$, determinăm din (2.16) starea de tensiune care ia naștere în corp. Deformările și deplasările rezultă din (2.3).

În cele ce urmează, urmînd calea a doua, vom stabili:

3. Ecuațiile integrale corespunzătoare problemei (2.17 a, b)

Fie S_r domeniile nemărginite complementare domeniilor D_r ($D_0 \equiv D$, $r = 0, 1, 2, 3$) și fie $z \in S_0$ ($z_k \in S_k$, $k = 1, 2, 3$). Funcțiile $\varphi_k(z_k)$ fiind olomorfe în D_k:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\varphi_k(t_k)}{t_k - z_k}\, dt_k = 0, \quad z_k \in S_k. \tag{3.1}$$

Ecuațiile integrale anunțate mai sus se obțin în modul următor: Expresiile: (2.17 a), conjugata sa și (2.17 b) le înmulțim cu $[1/[2\pi i(t - z)]dt$ ($z \in S_0$) și integrăm pe curba L. Obținem:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+i\mu_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t-z}\, dt + \frac{1+i\bar{\mu}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t-z}\, dt + \frac{1+i\mu_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t-z}\, dt + \\
&\frac{1+i\bar{\mu}_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{t-z}\, dt + \frac{1+i\mu_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t-z}\, dt + \frac{1+i\bar{\mu}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{t-z}\, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\, dt,
\end{aligned} \tag{3.2 a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1-i\bar{\mu}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t-z}\, dt + \frac{1-i\mu_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t-z}\, dt + \frac{1-i\bar{\mu}_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t-z}\, dt + \\
&+ \frac{1-i\mu_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{t-z}\, dt + \frac{1-i\bar{\mu}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t-z}\, dt + \\
&+ \frac{1-i\mu_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}}{t-z}\, dt.
\end{aligned} \tag{3.2 b}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t-z}\, dt + \frac{\bar{\lambda}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t-z}\, dt + \frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t-z}\, dt + \frac{\bar{\lambda}_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{t-z}\, dt + \\
&\frac{\lambda_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t-z}\, dt + \frac{\bar{\lambda}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{t-z}\, dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t-z}\, dt.
\end{aligned} \tag{3.2 c}$$

Apoi considerăm expresiile:

$$\begin{aligned}
&\frac{1+i\mu_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1-z_1}\, dt_1 + \frac{1+i\bar{\mu}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{\bar{t}_1-z_1}\, d\bar{t}_1 + \frac{1+i\mu_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2-z_2}\, dt_2 + \\
&+ \frac{1+i\bar{\mu}_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{\bar{t}_2-z_2}\, d\bar{t}_2 + \frac{1+i\mu_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3-z_3}\, dt_3 + \\
&+ \frac{1+i\bar{\mu}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{\bar{t}_3-z_3}\, d\bar{t}_3 - \sqrt{\frac{1}{2\pi i}}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1}\, dt_1,
\end{aligned} \tag{3.3 a}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1-i\bar{\mu}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{\bar{t}_1-z_1}\, d\bar{t}_1 + \frac{1-i\mu_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1-z_1}\, dt_1 + \frac{1-i\mu_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{\bar{t}_2-z_2}\, d\bar{t}_2 + \\
&\frac{1-i\mu_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2-z_2}\, dt_2 + \frac{1-i\bar{\mu}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{\bar{t}_3-z_3}\, d\bar{t}_3 + \frac{1-i\mu_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3-z_3}\, dt_3 - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2}\, dt_2 - \frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\, dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{\bar{t}_1^2}\, d\bar{t}_1\right\}. \text{*)}
\end{aligned} \tag{3.3 b}$$

* Semnificația constantei a_1 va fi dată în secțiunea 4.

$$\frac{\lambda_1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1-z_1}\,dt_1 + \frac{\bar{\lambda}_1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t_1-z_1}\,dt_1 + \frac{\lambda_2}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2-z_2}\,dt_2 +$$

$$(3.\ 3\ b)\qquad + \frac{\bar{\lambda}_2}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_2(t_2)}}{t_2-z_2}\,dt_2 + \frac{\lambda_3}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3-z_3}\,dt_3 +$$

$$+ \frac{\bar{\lambda}_3}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi_3(t_3)}}{t_3-z_3}\,dt_3 - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3}\,dt_3 .$$

pe care le scădem din (3.2 a, b, c) respectiv. În relațiile obținute trecem la valorile limită cînd $z_k \in S_k$ tind către $t_{k0} \in L_k$, în același mod în care $z \in S_0$ tinde la $t \in L$. Admițînd că $\varphi_k(t_k)$ precum și f, g sînt hölderiene pe frontieră, valorile la limită ale acestora există și sînt date de cunoscutele formule Plemelj-Sohoțki. În baza acestor formule, (3.2) și (3.3) pot fi scrise astfel:

$$-(1+i\bar{\mu}_1)\varphi_1(t_{10}) - (1+i\bar{\mu}_2)\overline{\varphi_2(t_{20})} - (1+i\bar{\mu}_3)\overline{\varphi_3(t_{30})} +$$

$$+ A_1[t_0;\ \varphi_1(t_1),\ \varphi(t_2),\ \varphi_3(t_3)] = F_1(t_0),$$

$$-(1-i\bar{\mu}_2)\varphi_1(t_{10}) - (1-i\mu_2)\overline{\varphi_2(t_{20})} - (1-i\bar{\mu}_3)\overline{\varphi_3(t_{30})} +$$

$$(3.4)\qquad + A_2[t_0;\ \varphi_1(t_1),\ \varphi_2(t_2),\ \varphi_3(t_3)] = F_2(t_0),$$

$$-\bar{\lambda}_1\varphi_1(t_{10}) - \bar{\lambda}_2\overline{\varphi_2(t_{20})} - \bar{\lambda}_3\overline{\varphi_3(t_{30})} +$$

$$+ A_3[t_0,\ \varphi_1(t_1),\ \varphi_2(t_2),\ \varphi_3(t_3)] = F_3(t_0),$$

în care

$$F_1(t_0) = \lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt,$$

$$F_2(t_0) = \lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}}{t-z}\,dt,$$

$$F_3(t_0) = \lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}}{t-z}\,dt.$$

iar $A_s[\ldots]$ sînt operatorii:

$$A_s[t_0,\ \varphi_1(t_1),\ \varphi_2(t_2),\ \varphi_3(t_3)] = \frac{a'_{sj}}{2\pi i}\int_L \varphi_j(t_j)\,d\ln\frac{t-t_0}{t_j-t_{j0}} +$$

$$(3.5)\qquad \frac{l_{sj}}{2\pi i}\int_L \varphi_j(t_j)\,d\ln\frac{t-t_0}{t-t_{j0}} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_s(t_s)}{t_s}\,dt_s +$$

$$\frac{1}{t_0}\frac{\delta_{2s}}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1\right\},$$

$s = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3,\qquad \delta_{2s} = 0\ (S \neq 2),\qquad \delta_{2s} = 1\ (s = 2).$

$a'_{11} = a'_{21} = 1 + i\mu_1,\qquad a'_{12} = a'_{22} = 1 + i\mu_2,\qquad a'_{13} = a'_{23} = 1 + i\mu_3$

$a'_{31} = \bar{b}_{31} = \lambda_3,\qquad a'_{32} = \bar{b}_{32} = \lambda_2,\qquad a'_{33} = b_{23} = \lambda_3$

$b'_{11} = \bar{b}'_{21} = 1 + i\mu_1,\qquad b'_{12} = b'_{22} = 1 + i\mu_2,\qquad b'_{13} = \bar{b}'_{23} = 1 + \mu_3.$

Se subînțelege că integralele pe curba L se efectuează după ce înlocuim t_k prin

$$2t_k = (1 - i\mu_k)\,t + (1 + i\mu_k)\,\bar{t},\quad t \in L.$$

Întrucît determinantul format din coeficienții primilor trei termeni din (3.4)

$$\tilde{\Delta} = -2i\,[\bar{\lambda}_1\,(\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_3) + \bar{\lambda}_2\,(\bar{\mu}_3 - \bar{\mu}_1) + \bar{\lambda}_3\,(\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2)]$$

este nenul (căci $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$ și λ_1, λ_2, λ_3 nu sînt simultan nule) sistemul (3.4) poate fi pus sub forma următoare:

$$\overline{\varphi_1(t_{10})} + K_1[t_{10};\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3] = f_1(t_{10}),$$

$$(3.6)\qquad \overline{\varphi_2(t_{20})} + K_2[t_{20};\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3] = f_2(t_{20}),$$

$$\overline{\varphi_3(t_{30})} + K_3[t_{30};\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3] = f_3(t_{30}),$$

în care operatorii K_1, K_2, K_3 precum și termenii liberi se exprimă prin combinații liniare cu coeficienți constanți de A_s, și F_1, F_2, F_3. Nu vom avea nevoie să scriem explicit aceste expresii.

4. Proprietățile soluțiilor sistemului (3.6)

Sistemul de ecuații integrale Fredholm de specia a doua obținut mai sus ne permite, în cazul cînd admite soluție, să determinăm trei funcții $\varphi_k(t_k)$ definite pe frontierele L_k. Dacă aceste funcții sînt cu totul generale,

atunci nu ne putem aștepta că vom găsi funcțiile $\varphi_k(z_k)$ care să rezolve problema noastră. Mai întîi este clar că nu putem obține funcțiile de mai sus pe baza formulelor (2.18) dacă nu demonstrăm că soluțiile $\varphi_k(t_k)$ reprezintă valorile pe frontieră ale unor funcții olomorfe în D_k.

Apoi, va trebui să arătăm echivalența deplină a condițiilor (2.17 a,b) cu sistemul (3.6).

În sfîrșit, o altă chestiune este aceea a existenței soluției. Ne vom ocupa pe rînd cu fiecare dintre aceste probleme. Să admitem că (3.6) are soluție. Fie ea $\varphi_k(t_k)$. Considerăm următoarele funcții auxiliare:

$$\Phi_k(z_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\varphi_k(t_k)}{t_k - z_k}\, dt_k\,; \quad t_k \in L_k\,, \quad z_k \in S_k\,. \tag{4.1}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)}{t - z}\, dt, \quad \Psi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_1(t)}}{t - z}\, dt, \tag{4.2}$$

$$\Psi_3(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_2(t)}{t - z}\, dt$$

$$\chi_1(z) = \Psi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1}\, dt_1, \tag{4.3 a}$$

$$\chi_2(z) = \Psi_2(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\, dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t_1^2}\, d\bar{t}_1\right\}. \tag{4.3 b}$$

$$\chi_3(z) = \Psi_3(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3}\, dt_3\,; \quad z \in S_0. \tag{4.3 c}$$

$$\omega_1(t) = (1 + i\mu_1)\,\varphi_1(t_1) + (1 + i\mu_1)\,\varphi_1(t_1) + (1 + i\mu_2)\,\varphi_2(t_2) + (1 + i\mu_2)\,\overline{\varphi_2(t_2)} + (1 + i\mu_3)\,\varphi_3(t_3) + (1 + i\mu_3)\,\overline{\varphi_3(t_3)} = f(t), \tag{4.4 a}$$

$$\omega_2(t) = \lambda_1\,\varphi_1(t_1) + \bar{\lambda}_1\,\overline{\varphi_1(t_1)} + \lambda_2\,\varphi_2(t_2) + \bar{\lambda}_2\,\overline{\varphi_2(t_2)} + \lambda_3\,\varphi_3(t_3) + \bar{\lambda}_3\,\overline{\varphi_3(t_3)} = g(t). \tag{4.4 b}$$

Să observăm mai întîi că funcțiile introduse sînt analitice în domeniile S_r (4.1) și (4.2) anulîndu-se la infinit. Apoi, că uzînd de aceste funcții, sistemul de ecuații integrale (3.6) poate fi transcris astfel: *)

* De data aceasta trebuie să considerăm că z și z_k tind din interioarele domeniilor S_r către frontieră.

$$\chi_1(t) - (1 + i\mu_1)\,\Phi_1(t_1) + (1 + i\mu_1)\,\overline{\Phi_1(t_1)} + (1 + i\mu_2)\,\Phi_2(t_2) + (1 - i\mu_2)\,\overline{\Phi_2(t_2)} - (1 - i\mu_3)\,(t_3) + (1 + i\mu_3)\,\overline{\Phi_3(t_3)} = 0, \tag{4.5 a}$$

$$\chi_2(t) - (1 - i\mu_1)\,\Phi_1(t_1) + (1 - i\mu_1)\,\overline{\Phi_1(t_1)} - (1 - i\mu_2)\,\Phi_2(t_2) + (1 - i\mu_2)\,\overline{\Phi_2(t_2)} - (1 - i\mu_3)\,\Phi_3(t_3) + (1 - i\mu_3)\,\overline{\Phi_3(t_3)} = 0, \tag{4.5 b}$$

$$\chi_3(t) - \lambda_1\,\Phi_1(t_1) + \bar{\lambda}_1\,\overline{\Phi_1(t_1)} - \lambda_2\,\Phi_2(t_2) + \bar{\lambda}_2\,\overline{\Phi_2(t_2)} - \lambda_3\,\Phi_3(t_3) + \bar{\lambda}_3\,\Phi_3(t_3) = 0 \ *). \tag{4.5 c}$$

Egalitățile (4.5) ne furnizează prin conjugare și însumare două relații utile:

$$\chi_1(t) + \overline{\chi_2(t)} = 0, \tag{4.6 a}$$

$$\chi_3(t) + \overline{\chi_3(t)} = 0. \tag{4.6 b}$$

Ținînd seama de faptul că χ_1, χ_2, χ_3 sînt funcții analitice în S_0, din (4.6 a), deducem printr-un proceden similar celui folosit de Șermaan ([9], p. 68), următoarele:

$$\chi_1(t) = C_1\,, \quad \chi_2(t) = C_2\,; \quad C_1 + C_2 = 0, \tag{4.7}$$

și apoi din (4.6 b)

$$\chi_3(t) = iC_3\,, \tag{4.8}$$

— C_1, C_2 — constante complexe, C_3 — o constantă reală.

Revenind în (4.3 a, b, c) cu funcțiile χ_k de mai sus și ținînd seama că $\Psi_k(\infty) = 0$, obținem prin trecere la limită

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t^1}\, dt_1 = 0, \quad -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_2(t_2)}{t_2}\, dt_2 = 0 \tag{4.9}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_3(t_3)}{t_3}\, dt_3 = 0.$$

În consecință (4.3 a, b, c) devin:

$$\Psi_1(z) = 0, \tag{4.10 a}$$

$$\Psi_2(z) + \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\, dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t_1^2}\, d\bar{t}_1\right\} = 0, \tag{4.10 b}$$

$$\Psi_3(z) = 0. \tag{4.10 c}$$

* Am renotat variabilele t_0 și t_{k0} cu t și t_k.

Din egalitatea (4.10 b), prin dezvoltare în serie Taylor în jurul punctului de la infinit și anularea coeficientului de pe lîngă $\frac{1}{z}$, ținînd seama și de (4.4 a, b) obținem următoarea condiție.

$$\frac{1-i\mu_1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi_1(t_1)}\,dt + \frac{1-i\mu_1}{2\pi i}\int_L \varphi_1(t_1)\,dt + \frac{1-i\mu_2}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi_2(t_2)}\,dt +$$

$$(4.11)\qquad + \frac{1-i\mu_2}{2\pi i}\int_L \varphi_2(t_2)\,dt + \frac{1-i\mu_3}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi_3(t_3)} + \frac{1-i\mu_3}{2\pi i}\int_L \varphi_3(t_3)\,dt -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(t)}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1\right\} = 0.$$

Folosind legătura care există între afixele punctelor de pe frontierele L și L_k, dată de formulele:

$$2\beta_k t = (1+i\mu_k)t_k - (1+i\mu_k)\overline{t_k}\,,\quad t_k \in L_k,\ t \in L,$$

la care adăugăm

$$2\beta_0 t = (1+i\nu)\overline{t_0^*} - (1+i\nu)\overline{t_0^*}\,,\quad t^* \in \mathcal{L}:\ t \in L,$$

și ținînd seama de egalitățile:

$$(4.12)\qquad \int_{L_1}\varphi_1(t_1)\,dt_1 = \int_{L_2}\varphi_2(t_2)\,dt_2 = \int_{L_3}\varphi_3(t_3)\,dt_3 = \int_{\mathcal{L}}\Lambda(t_0^*)\,dt_0^* = 0\ ^{*)}$$

condiția (4.11) se transcrie astfel:

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{2\pi i\beta_k}\left[(1+\overline{\mu_k^2})\int_{L_k}\overline{\varphi_k(t_k)}\,dt_k - (1+i\mu_k^2)\int_{L_k}\varphi_k(t_k)\,dt_k\right] +$$

$$(4.13)\qquad \frac{1}{2\pi i\beta_0}\left[(1+\overline{\nu^2})\int_{\mathcal{L}}\Lambda(t_0^*)\,dt_0^* - (1+\nu^2)\int_{\mathcal{L}}\Lambda(t_0^*)\,dt_0^* -\right.$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t_1^2}\,dt_1\right\} = 0.$$

* Vom vedea mai departe că primele trei egalități au loc în adevăr. Ultima este evident adevărată în baza celor spuse în secțiunea 2.

Deoarece β_k' și β_0' sînt numere reale: $\beta_k' = i(\overline{\mu_k} - \mu_k)$, $\beta_0' = i(\overline{\nu} - \nu)$, primii patru termeni ai relației precedente sînt reali, și cum ultimul este pur imaginar, rezultă cu necesitate

$$(4.14)\qquad \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_L \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1 + \frac{1}{a_1}\int_L \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{t_1^2}\,dt_1\right\} = 0.$$

Din (4.10 b), în baza precedentei, deducem alături de (4.10 a, b) și:

$$(4.15)\qquad \Psi_2(z) = 0,$$

care înlocuite în (4.2) ne conduce la:

$$(4.16)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_1(t)}{t-z}\,dt = 0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_1(t)}}{t-z}\,dt = 0,\quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_2(t)}{t-z}\,dt,\quad z \in S_0$$

funcțiile ω_1, ω_2 calculîndu-se cu soluția $\varphi_k(t_k)$ a sistemului (3.6). În sfîrșit să mai punem în evidență încă o proprietate importantă pentru cele ce urmează, a soluției acestui sistem. Pentru aceasta considerăm (4.5 a,c) în care ținem seama de (4.7), (4.8) și introducem funcțiile

$$(4.17)\qquad \Phi_k^*(z_k) = i\Phi_k(z_k).$$

Evident funcțiile $\Phi_k^*(z_k)$ sînt analitice în S_k. Ținînd seama de (4.17) egalitățile (4.5 a, b, c) se scriu acum sub forma:

$$(4.18)\qquad \begin{aligned} &(1+i\mu_1)\Phi_1^*(t_1) + (1+i\overline{\mu_1})\overline{\Phi_1^*(t_1)} + (1+i\mu_2)\Phi_2^*(t_2) + (1+i\mu_2)\overline{\Phi_2^*(t_2)} + \\ &+ (1+i\mu_3)\Phi_3^*(t_3) + (1+i\overline{\mu_3})\overline{\Phi_3^*(t_3)} = iC_1\,, \\ &\lambda_1\Phi_1^*(t_1) + \overline{\lambda_1}\overline{\Phi_1^*(t_1)} + \lambda_2\Phi_2^*(t_2) + \overline{\lambda_2}\Phi_2^*(t_2) + \\ &+ \lambda_3\Phi_3^*(t_3) + \overline{\lambda_3}\overline{\Phi_3^*(t_3)} = C_3\,. \end{aligned}$$

Se observă că pentru determinarea funcțiilor Φ_k^* am obținut condiții la limită de aceeași natură cu (2.17 a, b), dar de data aceasta problema ce o avem de rezolvat este o problemă de elasticitate plană relativă la domeniul S_0 cu tensiuni nule pe frontieră. În acest caz și dacă nu există nici o altă influență exterioară care să producă deformarea, corpul se va găsi în stare netensionată și deci în toate punctele sale

$$(4.19)\qquad \sigma_x = \sigma_y = \ldots = \tau_{xy} = 0.$$

Această stare de tensiune trebuie să rezulte din condițiile la limită (2.17) în care punem $f(t) = g(t) = 0$. Să le notăm pe acestea cu (2.17′). În acest sens (2.17′) și (4.18) sînt identice.

Fixîndu-ne asupra condiţiilor (2.17), ne amintim că acestea reprezintă valorile pe frontieră (despre care am presupus că există) ale următoarelor expresii:

$$(1+i\mu_1)\varphi_1(z_1)+(1+i\mu_1)\overline{\varphi_1(z_1)}+(1+i\mu_2)\varphi_2(z_2)+(1+i\mu_2)\overline{\varphi_2(z_2)}+$$
$$+(1+i\mu_3)\varphi_3(z_3)+(1+i\mu_3)\overline{\varphi_3(z_3)}=\widetilde{C}$$

(4.20)
$$\lambda_1\varphi_1(z_1)+\bar{\lambda}_1\overline{\varphi_1(z_1)}+\lambda_2\varphi_2(z_2)+\bar{\lambda}_2\overline{\varphi_2(z_2)}+$$
$$+\lambda_3\varphi_3(z_3)+\bar{\lambda}_3\overline{\varphi_3(z_3)}=\widetilde{C}$$

cînd
$$z_k\to t_k\,,\quad z_k\in D_k\,.$$

Pentru a găsi funcţiile $\varphi_k(z_k)$ ce satisfac egalităţile precedente aplicăm succesiv acestora şi conjugatelor lor, operatorii

$$-4\frac{\partial^2}{\partial z_k\,\partial z_k}=\beta_k^{-2}(\mu_k-\mu_j)(\mu_j-\mu_k)\frac{\partial^2}{\partial z_j^2}+\beta_k^{-2}[(\mu_k-\mu_k)(\bar{\mu}_j+\bar{\mu}_j)-$$
$$-2(\mu_k\bar{\mu}_k+\mu_j\bar{\mu}_j)]\frac{\partial^2}{\partial z_j\,\partial z_j}+\beta_k^{-2}(\bar{\mu}_k-\bar{\mu}_j)(\bar{\mu}_j-\mu_k)\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}_j^2}$$
$$k=1,\,2,\,3,\qquad j=1,\,2,\,3,\qquad k\neq j\,.$$

şi ţinînd seama că funcţiile φ_k satisfac: $4\dfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial z_k\,\partial\bar{z}_k}=0$ obţinem sistemul de ecuaţii:

$$m_1''\varphi_1''+n_1\overline{\varphi_1''}+p_1\varphi_2''+q_1\overline{\varphi_2''}=0$$

(4.21)
$$m_2\varphi_1''+n_2\overline{\varphi''}+\gamma_2\varphi_3''+s_2\overline{\varphi_3''}=0$$
$$p_3\varphi_2''+q_3\overline{\varphi_2''}+\gamma_3\varphi_3''+s_3\overline{\varphi_3''}=0$$

în care constantele $m_1\ldots s_3$ se exprimă cu λ_k şi μ_k. Calculele arată că determinantul sistemului format cu (4.21) şi conjugatul său este diferit de zero dacă rămînem în ipotezele: $\mu_1\neq\mu_2\neq\mu_3$, $\beta_k\neq 0$.

Acest fapt ne conduce la:

$$\varphi_k''(z_k)=0$$

adică

(4.22)
$$\varphi_k(z_k)=A_k z_k+B_k$$

în care $A_k=A_{k1}+iA_{k2}$, $B_k=B_{k1}+iB_{k2}$ sînt constante complexe arbitrare.

Impunînd funcţiilor de mai sus condiţiile (4.20), ţinînd seama că $z_k=x+(\alpha_k+i\beta_k)y$, şi separînd partea reală de cea imaginară de pe lîngă

x şi y obţinem pentru determinarea celor 12 constante de mai sus următorul sistem de ecuaţii:

$$A_{11}+A_{21}+A_{31}=0$$
$$\alpha_1A_{11}-\beta_1A_{12}+\alpha_2A_{21}-\beta_2A_{22}+\alpha_3A_{31}-\beta_3A_{32}=0$$
$$(\alpha_1^2-\beta_1^2)A_{11}-2\alpha_1\beta_1A_{12}+(\alpha_2^2-\beta_2^2)A_{21}-2\alpha_2\beta_2A_{22}+$$

(4.23 a)
$$(\alpha_3^2-\beta_3^2)A_{31}-2\alpha_3\beta_3A_{32}=0$$
$$\gamma_1A_{11}-\delta_1A_{12}+\gamma_2A_{21}-\delta_2A_{22}+\gamma_3A_{31}-\delta_3A_{32}=0$$
$$x_1A_{11}-x_2A_{12}+x_3A_{21}-x_4A_{22}+x_5A_{31}-x_6A_{32}=0$$
$$(1+i\mu_1)B_1+(1+i\bar{\mu}_1)\bar{B}_1+(1+i\bar{\mu}_2)\bar{B}_2+(1+i\mu_2)B_2+$$

(4.23 b)
$$(1+i\mu_3)\beta_3+(1+i\bar{\mu}_3)\bar{\beta}_3=\widetilde{C}\,,$$
$$\lambda_1B_1+\bar{\lambda}_1\bar{B}_1+\lambda_2B_2+\bar{\lambda}_2\bar{B}_2+\lambda_3B_3+\bar{\lambda}_3\bar{B}_3=\widetilde{C}\,.$$

Am folosit notaţiile:

$$\lambda_k=\gamma_k+i\delta_k\qquad k=1,\,2,\,3.$$

$$x_1=\gamma_1\alpha_1-\delta_1\beta_1,\qquad x_2=\delta_1\alpha_1-\gamma_1\beta_1,\qquad x_3=\gamma_2\alpha_2-\delta_2\beta_2$$
$$x_4=\delta_2\alpha_2-\gamma_2\beta_2,\qquad x_5=\gamma_3\alpha_3-\delta_3\beta_3,\qquad x_6=\gamma_3\alpha_3-\gamma_3\beta_3$$

Sistemele (4.23 a, b) au întotdeauna soluţii. Alegînd arbitrar una dintre constantele A_{11}, A_{12} sau A_{13}, fie $A_{11}=C$, obţinem prin rezolvarea sistemului (4.23 a) valorile constantelor A_k:

$$A_1=iC(\Delta_1'-i\Delta)\Delta^{-1},$$

(4.24)
$$A_2=iC(\Delta_3'-i\Delta_2')\Delta^{-1},$$
$$A_3=iC(\Delta_5'-i\Delta_4')\Delta^{-1},$$

în care

$$\Delta=-\begin{vmatrix}0&1&0&1&0\\ \beta_1&\alpha_2&\beta_2&\alpha_3&\beta_3\\ 2\alpha_1\beta_1&\alpha_2^2\beta_2^2&2\alpha_2\beta_2&\alpha_3^2\beta_3^2&2\alpha_3\beta_3\\ \delta_1&\gamma_2&\delta_2&\gamma_3&\delta_3\\ x_2&x_3&x_4&x_5&x_6\end{vmatrix},\qquad A'=\begin{Vmatrix}-1\\ -\alpha_1\\ -(\alpha_1^2-\beta_1^2)\\ -\gamma_1\\ -x_1\end{Vmatrix}$$

iar $\Delta_1',\ldots\Delta_5'$ sînt determinanţii obţinuţi prin înlocuirea în Δ a coloanelor $1\ldots5$, cu coloana A'.

Renotînd

$$(\Delta_1' - i\Delta)\,\Delta^{-1} = a_1\,,\quad (\Delta_3' - i\Delta_2')\,\Delta^{-1} = a_2\,,\quad (\Delta_5' - i\Delta_4')\,\Delta^{-1} = a_3$$

și revenind în (4.24) și apoi în (4.22) obținem expresiile funcțiilor φ_k, soluții ale ecuațiilor (4.20).

$$\varphi_k(z_k) = iC\,a_k z_k + B_k \tag{4.25}$$

constanta C rămînînd complet arbitrară. B_k, deși arbitrare, sînt supuse totuși condițiilor (4.23 b).

Se verifică prin calcul direct că introducînd expresiile de mai sus ale funcțiilor $\varphi_k(z_k)$ în formulele (2.16) (în care punem $\varphi_0 \equiv 0$) obținem în baza ecuațiilor (4.23 a, b), egalitățile (4.19). Deplasările corespunzătoare funcțiilor (4.25) nu pot fi decît deplasări de corp rigid și ele se calculează din primele trei relații (2.3) în care punem $T \equiv 0$.

Revenind la problema la limită (4.18), soluția sa va fi dată de funcțiile

$$\Phi^*(z_k) = iAa_k z_k + B_k \tag{4.26}$$

în care A este o constantă reală arbitrară iar B_k sînt constante de asemenea arbitrare, în general complexe, dar supuse condițiilor:

$$\begin{gathered}(1 + i\mu_1)\,B_1 + (1 + i\bar{\mu}_1)\,\bar{B}_1 + (1 + i\mu_2)\,B_2 + (1 + i\bar{\mu}_2)\,\bar{B}_2 + \\ (1 + i\mu_3)\,B_3 + (1 + i\bar{\mu}_3)\,\bar{B}_3 = iC_1\,, \\ \lambda_1 B_1 + \bar{\lambda}_1 \bar{B}_1 + \lambda_2 B_2 + \bar{\lambda}_2 \bar{B}_2 + \lambda_3 B_3 + \bar{\lambda}_3 \bar{B}_3 = C_3\,.\end{gathered} \tag{4.27}$$

Funcțiile $\Phi_k(z_k)$ se obțin din (4.17):

$$\Phi_k(z_k) = Aa_k z_k - iB_k\,,$$

și cum aceste funcții trebuie să se anuleze la infinit deducem:

$$A = 0,\quad B_k = 0. \tag{4.28}$$

Introducînd valorile constantelor B_k în (4.27) și ținînd seama de a treia egalitate (4.7) obținem

$$C_1 = C_2 = C_3 = 0 \tag{4.29}$$

Recapitulînd, dacă $\varphi_k(t)_k$ constituie o soluție a sistemului (3.6) atunci au loc următoarele:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\varphi_k(t_k)}{t_k - z_k}\,dt_k = 0,\quad z_k \in S_k \qquad [(4.1),\ (4.28)] \tag{4.30 a}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \frac{\varphi_k(t_k)}{t_k}\,dt_k = 0 \qquad [(4.9),\ (4.29)] \tag{4.30 b}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{a_1}\int_{L_1} \frac{\varphi_1(t_1)}{t_1^2}\,dt_1 + \frac{1}{\bar{a}_1}\int_{L_1} \frac{\overline{\varphi_1(t_1)}}{\bar{t}_1^2}\,d\bar{t}_1\right\} = 0 \qquad [(4.14)] \tag{4.30 c}$$

$$\Psi_1(z) = \Psi_2(z) = \Psi_3(z) \qquad [(4.10\ \text{a,c}),\ (4.15)]\,. \tag{4.30 d}$$

Din (4.30 a) rezultă că funcțiile $\varphi_k(t_k)$ sînt valorile la limită ale unor funcții olomorfe în D_k și prin urmare $\varphi_k(z)_k$ sînt date de (2—18) fiind olomorfe în domeniile lor de definiție. Sînt justificate astfel egalitățile (4.12). Apoi, în baza teoremei lui Harnack din (4.30 d) rezultă că soluția considerată a sistemului (3.6) satisface condițiile:

$$\begin{gathered}(1 + i\mu_1)\,\varphi_1(t_1) + (1 + i\bar{\mu}_1)\,\overline{\varphi_1(t_1)} + (1 + i\mu_2)\,\varphi_2(t_2) + (1 + i\bar{\mu}_2)\,\overline{\varphi_2(t_2)} + \\ + (1 + i\mu_3)\,\varphi_3(t_3) + (1 + i\bar{\mu}_3)\,\overline{\varphi_2(t_2)} - f(t) = 0 \\ \lambda_1\varphi_1(t_1) + \bar{\lambda}_1\overline{\varphi_1(t_1)} + \lambda_2\varphi_2(t_2) + \bar{\lambda}_2\overline{\varphi_2(t_2)} + \lambda_3\varphi_3(t_3) + \bar{\lambda}_3\overline{\varphi_3(t_3)} - g(t) = 0.\end{gathered} \tag{4.31}$$

ceea ce demonstrează echivalența sistemului de ecuații integrale (3.6) cu condițiile la limită (2.17 a, b).

În sfîrșit, condițiile (4.30, b) exprimă faptul că $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = 0$ în timp ce (4.30 c) ne asigură că: $\mathrm{Im}[\varphi_1(0)] = 0$.

5. Existența și unicitatea soluției

Ne rămîne să demonstrăm că într-adevăr sistemul (3.6) are soluție unică. Pentru a demonstra aceasta vom stabili valabilitatea teoremei lui Fredholm pentru acest sistem. Să presupunem că

$$\varphi_{k0}(t_k) \neq 0 \qquad k = 1,\ 2,\ 3 \tag{5.1}$$

este soluția sistemului omogen. Atunci, conform rezultatelor precedente, funcțiile $\varphi_{k0}(z_k)$ determinate din (2.18) ale căror valori limită sînt (5.1) vor fi olomorfe în D_k ne identic nule. Urmărind modul de alcătuire a sistemului (3.6), observăm că acesta poate fi pus sub forma (4.5), în care trebuie să ținem de seama de (4.10) (4.15) și (4.29). (Să notăm sistemul astfel obținut cu (4.5)'). Introducînd în (4.5)' schimbarea de funcții:

$$\varphi_{k0}^*(t_k) = i\varphi_{k0}(t_k) \tag{5.2}$$

constatăm că ultimele, satisfac condițiile la limită corespunzătoare unei probleme elastice plane relativ la domeniul D, cu tensiuni nule pe frontieră. Soluția unei asemenea probleme, conform celor spuse mai sus este

$$\varphi_{k0}^* = iCa_k z_k + E_k\,. \tag{5.3}$$

Ținînd acum seama de (4.30 b,c) deducem în mod necesar: $C = E_k = 0$ și deci, în baza egalităților (5.2),

$$\varphi_{k0}(t_k) \equiv 0 \qquad t_k \in L_k \tag{5.4}$$

ceea ce înseamnă că sistemul omogen (3.6) admite numai soluția banală. Rezultă că sistemul neomogen dă în mod unic funcțiile $\varphi_k(t_k)$ și deci $\varphi_k(z_k)$ sînt unic determinate prin (2.18).

BIBLIOGRAFIE

1. Boley B. A. and Weiner J. H. — *Theory of thermal stresses*. New York — London, 1960.
2. Borș C. I. — *Tensiuni termice în corpurile anizotrope în cazul deformării plane*. An. șt. Univ. Iași, t. XI, f. 1, 1965.
3. Grindei I. — *Termoelasticitate*. București — 1967.
4. Ieșan D. — *Contribuții la studiul unor probleme la limită pentru ecuațiile termoelasticității*. Teza de doctorat, 1968.
5. Lekhnitskii S. G. — *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. San-Francisco, 1963.
6. Мусхелишвили Н. И. — *Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. М. — Л. 1946 (ediția II. 1961).
7. Noether F. — *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen*. Mathematische Annalen. Bd. 82, 1921, p. 42—63.
8. Новацкий В. — *Вопросы термоупругости*. Москва, Изд. АН СССР, 1962.
9. Шерман Д. И. — *Плоская задача теории упругости для анизотропной среды*. Тр. Сейсмал. ин-та АН СССР, № 86 1938, p. 51—78.
10. Уздалев А. И. — *Плоская задача термоупругости для анизотропного тела*. Инженерный журнал № 2. 1962.

LE PROBLÈME PLAN DE LA THERMOÉLASTICITÉ POUR DES MILIEUX TOTALEMENT ANISOTROPES

Résumé

On étudie l'état de déformation thermoélastique plane cas des corps homogènes, cylindriques, dotés d'anisotropie rectiligne générale, et sans tensions à la surface latérale. En utilisant la représentation par des fonctions de variable complexe de la fonction de température $T(x,y)$, de même que des fonctions de tension $F(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ introduites par les relations (2.7), on montre que le problème à la limite coorespondant (2.17 a,b) se réduit à la résolution d'un système d'équations intégrales Fredholm de deuxième espèce (3.6).

On établit les propriétés de la solution de ce système (4.23 a-d) et ensuite on démontre l'existence de cette solution qui résulte de la première partie de l'alternative de Fredholm.

OBSERVAȚII ASUPRA CORELAȚIEI DINTRE FUNCȚIILE UNATE ȘI FUNCȚIILE LOGICE PRAG

DE

D. SANDU și D. SIMOVICI

Introducere. 1. Realizarea rețelelor cu elemente logice prag ELP constituie o problemă de sinteză logică importantă atît pentru structurile combinaționale fixe cît și pentru cele variabile. Întrucît funcțiile logice se dau de obicei sub una din formele canonice: forma canonică disjunctivă FCD sau forma canonică conjuctivă FCC, apare necesitatea transformării funcțiilor logice clasice în funcții logice prag. În acest scop au fost elaborate metode de tratare a realizabilității fizice a funcțiilor booleene prin funcții prag [8, 9, 10, 11].

În majoritatea cazurilor funcția booleană clasică se transformă mai întîi în funcții unate și apoi se testează care din funcțiile unate sînt în același timp și funcții prag. Pentru descompunerea în funcții unate se pot folosi metodele expuse în [7, 8, 9].

2. În lucrare se studiază unele aspecte ale corelației dintre funcțiile unate și funcțiile prag, folosind o metodă algebrică. Se stabilește mai întîi orice funcție unată de trei variabile este în același timp și funcție prag [9], adică este fizic realizabilă cu un element logic prag. Se studiază mulțimile de funcții prag izobare stabilindu-se gradul de arbitrarietate al ponderilor și pragului. Se dă apoi o teoremă generală de realizabilitate pentru funcții unate de n variabile care permite regăsirea unor rezultate cunoscute pentru un număr de patru și cinci variabile.

1. Ordonarea mulțimii combinațiilor liniare de numere ordonate Vom arăta că această problemă este legată de studiul rețelelor cu ELP.

Fiind date n numere pozitive: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ între care există o relație de ordine: $0 < w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ se formează toate combinațiile aditive posibile: $w_1, w_2, \ldots, w_1 + w_2, \ldots, w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, în număr de $2^n - 1$.