$$\varphi_{k0}(t_k) \equiv 0 \qquad t_k \in L_k \tag{5.4}$$

ceea ce înseamnă că sistemul omogen (3.6) admite numai soluția banală. Rezultă că sistemul neomogen dă în mod unic funcțiile $\varphi_k(t_k)$ și deci $\varphi_k(z_k)$ sînt unic determinate prin (2.18).

BIBLIOGRAFIE

1. Boley B. A. and Weiner J. H. — *Theory of thermal stresses*. New York — London, 1960.
2. Borș C. I. — *Tensiuni termice în corpurile anizotrope în cazul deformării plane*. An. șt. Univ. Iași, t. XI, f. 1, 1965.
3. Grindei I. — *Termoelasticitate*. București — 1967.
4. Ieșan D. — *Contribuții la studiul unor probleme la limită pentru ecuațiile termoelasticității*. Teza de doctorat, 1968.
5. Lekhnitskii S. G. — *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*. San-Francisco, 1963.
6. Мусхелишвили Н. И. — *Сингулярные интегральные уравнения, граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике*. М. — Л. 1946 (ediția II. 1961).
7. Noether F. — *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen*. Mathematische Annalen. Bd. 82, 1921, p. 42—63.
8. Новацкий В. — *Вопросы термоупругости*. Москва, Изд. АН СССР, 1962.
9. Шерман Д. И. — *Плоская задача теории упругости для анизотропной среды*. Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 86 1938, p. 51—78.
10. Уздалев А. И. — *Плоская задача термоупругости для анизотропного тела*. Инженерный журнал № 2. 1962.

LE PROBLÈME PLAN DE LA THERMOÉLASTICITÉ POUR DES MILIEUX TOTALEMENT ANISOTROPES

Résumé

On étudie l'état de déformation thermoélastique plane cas des corps homogènes, cylindriques, dotés d'anisotropie rectiligne générale, et sans tensions à la surface latérale. En utilisant la représentation par des fonctions de variable complexe de la fonction de température $T(x,y)$, de même que des fonctions de tension $F(x,y)$ et $\Psi(x,y)$ introduites par les relations (2.7), on montre que le problème à la limite coorespondant (2.17 a,b) se réduit à la résolution d'un système d'équations intégrales Fredholm de deuxième espèce (3.6).

On établit les propriétés de la solution de ce système (4.23 a-d) et ensuite on démontre l'existence de cette solution qui résulte de la première partie de l'alternative de Fredholm.

OBSERVAȚII ASUPRA CORELAȚIEI DINTRE FUNCȚIILE UNATE ȘI FUNCȚIILE LOGICE PRAG

DE

D. SANDU și D. SIMOVICI

Introducere. 1. Realizarea rețelelor cu elemente logice prag ELP constituie o problemă de sinteză logică importantă atît pentru structurile combinaționale fixe cît și pentru cele variabile. Întrucît funcțiile logice se dau de obicei sub una din formele canonice: forma canonică disjunctivă FCD sau forma canonică conjuctivă FCC, apare necesitatea transformării funcțiilor logice clasice în funcții logice prag. În acest scop au fost elaborate metode de tratare a realizabilității fizice a funcțiilor booleene prin funcții prag [8, 9, 10, 11].

În majoritatea cazurilor funcția booleană clasică se transformă mai întîi în funcții unate și apoi se testează care din funcțiile unate sînt în același timp și funcții prag. Pentru descompunerea în funcții unate se pot folosi metodele expuse în [7, 8, 9].

2. În lucrare se studiază unele aspecte ale corelației dintre funcțiile unate și funcțiile prag, folosind o metodă algebrică. Se stabilește mai întîi orice funcție unată de trei variabile este în același timp și funcție prag [9], adică este fizic realizabilă cu un element logic prag. Se studiază mulțimile de funcții prag izobare stabilindu-se gradul de arbitrarietate al ponderilor și pragului. Se dă apoi o teoremă generală de realizabilitate pentru funcții unate de n variabile care permite regăsirea unor rezultate cunoscute pentru un număr de patru și cinci variabile.

1. Ordonarea mulțimii combinațiilor liniare de numere ordonate. Vom arăta că această problemă este legată de studiul rețelelor cu ELP.

Fiind date n numere pozitive: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ între care există o relație de ordine: $0 < w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_n$ se formează toate combinațiile aditive posibile: $w_1, w_2, \ldots, w_1 + w_2, \ldots, w_1 + w_2 + \ldots + w_n$, în număr de $2^n - 1$.

Notînd cu S_n mulţimea acestor combinaţii liniare, se cer condiţiile în care ordinea pe S_n este complet precizată. În acest scop se dovedeşte foarte utilă introducerea unei reprezentări grafice pentru relaţia de ordine [5]. Anume, dacă $a \geqslant b$ vom indica acest lucru trasînd o săgeată între un punct pe care îl ataşăm lui a şi unul pe care îl ataşăm lui b, cu sensul de a spre b.

Lema I. *Pentru $n = 2$, ordinea pe mulţimea S_2 este total precizată.*

Într-adevăr, dacă $0 < w_1 \leqslant w_2$, avem $0 < w_1 \leqslant w_2 \leqslant w_1 + w_2$, ceea ce se reprezintă în fig. 1.

Lema II. *Ordinea pe mulţimea S_3 nu este total precizată.* Vom încerca să stabilim o ordine pe S_3 plecînd de la S_2. Astfel diagrama din fig. 1 nu se modifică ca aspect dacă adunăm la toate elementele ei pe w_3. Cum avem:

$w_1 + w_3 \geqslant w_1 + w_2$ şi

$w_3 \geqslant w_2$, putem obţine diagrama din fig. 2a

sau, sub o formă convenabil modificată, pe cea din fig. 2b.

Din diagrama reprezentată în fig. 2 b se vede lesne că ordinea pe mulţimea S_3 nu este complet precizată; astfel nu cunoaştem sensul relaţiei de ordine dintre w_3 şi $w_1 + w_2$.

Fig. 1

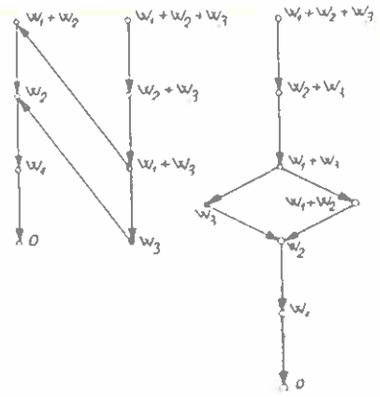

Fig. 2 a şi b

Vom numi diagramele de acest fel diagrame de ordonare cu precizare parţială: D.O.P.P.

Observaţie. Urmînd acelaşi procedeu ca la lema II se pot construi diagrame pentru patru şi mai multe variabile. Astfel se alătură mai întîi diagramele, ca în fig. 2 a şi apoi se stabilesc relaţiile de conexare a acestora (fig. 3 a şi b).

Ordinea pe mulţimea S_3 poate fi precizată total dacă precizăm relaţia între w_3 şi $w_1 + w_2$. Apar astfel două cazuri: $w_3 \geqslant w_1 + w_2$ sau $w_3 < w_1 + w_2$. Grafic, acesta ar reveni la trasarea unei diagrame într-un sens

sau în altul în patrulaterul din diagrama 2b. Obţinem astfel două diagrame de ordonare cu precizare totală: D.O.P.T.

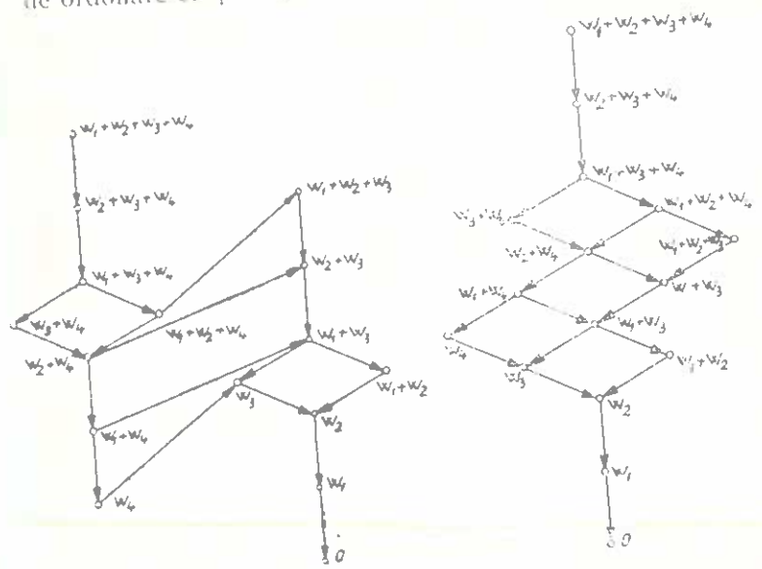

Fig. 3

Fig. 4 a şi b

Fie acum patru numere α, β, γ, δ între care avem o anumită relaţie de ordine. Să construim o diagramă de ordine unind succesiv punctele reprezentative ale acestor patru numere. Astfel se obţine un patrulater (fig. 5) cu laturile orientate în anumite sensuri. Patrulatere de acest tip se pot întîlni în D.O.P.P. (fig. 2 şi 3). Putem întîlni următoarele trei situaţii:

1. toate laturile orientate într-un sens (fig. 5 a)
2. trei laturi orientate într-un sens: a patra în sens contrar (fig. 5b)
3. două laturi orientate într-un sens: două în celălalt (fig. 5 c).

În primul caz $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta \geqslant \alpha$, ceea ce implică: $\alpha = \beta = \varphi = \delta$.

În al doilea caz ordinea pe mulţimea $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ este total precizată şi avem: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \geqslant \delta$.

În fine în cazul trei ordinea este precizată parţial. Se vede că în acest caz este necesară trasarea unei diagonale de „precizare" între β şi δ. Trasarea diagonalei $\alpha\gamma$ este inutilă căci, oricum $\alpha \geqslant \gamma$.

Aplicăm consideraţiile de mai sus în fig. 5 cu privire la ordonarea mulţimii S_4. Este evidentă necesitatea trasării unui număr de cinci diagonale de precizare şi anume: $(w_3, w_1 + w_2)$, $(w_4, w_1 + w_3)$, $(w_1 + w_4, w_2 + w_3)$, $(w_2 + w_4, w_1 + w_2 + w_3)$, $(w_3 + w_4, w_1 + w_2 + w_4)$. Se vede însă că astfel apare un număr de patru noi patrulatere. Pentru fiecare nou

patrulater (fig. 6) există o situaţie în care trebuie trasată o diagonală de precizare. Astfel să observăm că în patrulaterele formate avem trasate deja o diagonală şi două laturi. Celelalte două laturi pot avea sensuri variate şi putem întîlni una din situaţiile din fig. 7. În cazurile din fig. 7 a, b, d situaţia este complet precizată. Numai cazul din fig. 7 c impune trasarea

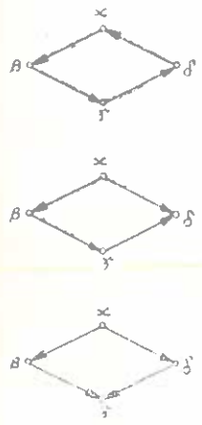

Fig. 5

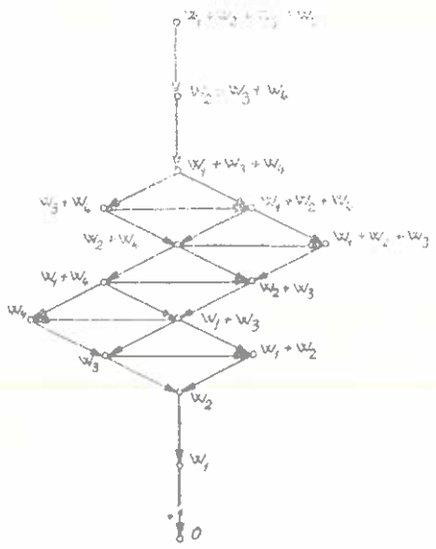

Fig. 6

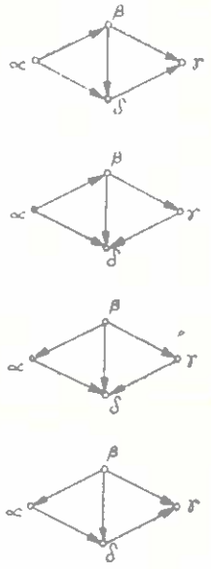

Fig. 7
a, b, c, d

unei diagonale de precizare între α şi γ. Prin urmare numai acest caz dă naştere la o posibilă alternativă. În total vom avea: $2^5 + 4 = 36$ posibilităţi de precizare a ordinii pe mulţimea S_1.

În mod similar se poate proceda pentru un număr mai mare de variabile.

2. Funcţii prag de trei variabile. Vom da cîteva definiţii necesare tratării ulterioare a problemei:

1. O funcţie $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numeşte funcţie prag dacă există un vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, $w_i > 0$ şi un număr T astfel ca:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } WX \geqslant T \\ 0, & \text{dacă } WX < T \end{cases} \tag{1}$$

unde cu $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ am notat vectorul variabilelor booleene, cu W vectorul pondere şi cu T pragul; WX reprezintă produsul scalar.

Se mai introduc [12] mulţimile:

$$X_{f1} = \{X \mid WX \geqslant T\} \text{ şi } X_{f0} = \{X \mid WX < T\}.$$

2. O funcţie booleană care nu conţine variabile logice biforme se numeşte funcţie unată. Orice funcţie prag este funcţie unată.

3. Două funcţii prag care au acelaşi vector pondere şi praguri diferite se numesc funcţii izobare. Relaţia de izobaritate o vom nota cu B. Astfel faptul că două funcţii sînt izobare se va transcrie: fBg, unde f şi g sînt două funcţii prag.

Teorema 1. *O funcţie unată de trei variabile este o funcţie prag.*

Această propoziţie se poate dovedi imediat ca o consecinţă a unei afirmaţii mai generale pe care o vom face ulterior. Preferăm aici o demonstraţie exhaustivă care permite studiul mulţimilor de funcţii izobare.

Notăm cu (i_1, i_2, i_3) o premutare a numerelor 1, 2, 3 şi fie w_1, w_2, w_3 ponderile variabilelor $x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}$; $0 < w_1 \leqslant w_2 \leqslant w_3$. Vom considera cele două diagrame de ordonare cu precizare totală din fig. 4.

Fie un punct mobil care pleacă din 0 spre w_1, w_2, w_3 pe care-l vom numi punct figurativ al pragului: p.f.p. Dacă convenim ca distanţa de la 0 la un punct al diagramei să fie proporţională cu numărul pe care-l reprezintă punctul respectiv, punctele care se află deasupra p.f.p. vor da conjuncţiile care intră în expresia booleană a funcţiei, căci pentru aceste puncte avem:

$$w_1 x_{i_1} + w_2 x_{i_2} < w_3 x_{i_3} \geqslant T. \tag{2}$$

Este evident că pentru fiec[illegible] din cele două diagrame vom obţine o familie de funcţii prag izobare.

Pentru diagrama din fig. 4 a caracterizată de inegalitatea $w_3 \geqslant w_1 + w_2$ avem următoarele funcţii izobare:

$$\begin{aligned}
x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_1} x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_1^{\mathrm{I}} = x_{i_1} + x_{i_2} + x_{i_3} \\
x_{i_2} + x_{i_1} x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_2^{\mathrm{I}} = x_{i_2} + x_{i_3} \\
x_{i_1} x_{i_2} + x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_3^{\mathrm{I}} = x_{i_1} x_{i_2} + x_{i_3} \\
x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_4^{\mathrm{I}} = x_{i_3} \\
x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_5^{\mathrm{I}} = x_{i_1} x_{i_3} + x_{i_2} x_{i_3} \\
x_{i_2} x_{i_3} + x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_6^{\mathrm{I}} = x_{i_2} x_{i_3} \\
x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} &= F_7^{\mathrm{I}} = x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Diagrama din fig. 4—6 caracterizată de inegalitatea $w_3 < w_1 + w_2$ ne dă următoarea familie de funcţii izobare:

$$x_{i_1}+x_{i_2}+x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}+x_{i_1}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_1^{II}=x_{i_1}+x_{i_2}+x_{i_3}$$

$$x_{i_2}+x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}+x_{i_1}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_2^{II}=x_{i_2}+x_{i_3}$$

$$x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_3^{II}=x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}$$

(4)
$$x_{i_1}x_{i_2}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_4^{II}=x_{i_1}x_{i_2}+$$
$$+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_3}x_{i_1}$$

$$x_{i_1}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_5^{II}=x_{i_1}x_{i_3}+x_{i_2}x_{i_3}$$

$$x_{i_2}x_{i_3}+x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_6^{II}=x_{i_2}x_{i_3}$$

$$x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}=F_7^{II}=x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}.$$

Se vede că avem în total opt funcţii distincte din cele două familii şi anume: $F_1^{I}\equiv F_1^{II}, F_1^{I}\equiv F_2^{II}, F_3^{I}\equiv F_3^{II}, F_4^{I}, F_4^{II}, F_5^{I}\equiv F_5^{II}$

(5)
$$F_6^{I}\equiv F_6^{II}, F_7^{I}\equiv F_7^{II}$$

Cum există $3!=6$ permutări posibile ale numerelor 1,2,3, rezultă că avem 12 clase de funcţii izobare care includ toate funcţiile unate de trei variabile (ceea ce se poate lesne observa comparînd cu o listă a funcţiilor unate).

Se mai poate observa că relaţia B nu constituie o echivalenţă căci, deşi este reflexivă şi simetrică nu este tranzitivă. Clasele de funcţii izobare, după cum rezultă din lista de mai sus, nu sînt disjuncte.

O altă concluzie ce se desprinde este aceea că funcţia prag poate fi realizată cu vectori de pondere diferiţi. Mulţimile de funcţii prag izobare sînt caracterizate de sensul unor inegalităţi în speţă: în cazul $n=3$ de inegalitatea dintre w_3 şi w_1+w_2.

Numerele w_1, w_2, w_3 pozitive sînt precizate pînă la sensul unei inegalităţi şi pot fi alese din considerente fizice. Funcţia sintetizată este dată în cadrul unei mulţimi de funcţii prag izobare de poziţia p.f.p. pe diagrama D.O.P.T.

$f[W,T]$ fiind funcţia prag cu vectorul de pondere W şi pragul T, se poate introduce o ordine într-o mulţime de funcţii izobare prin relaţia de implicaţie dintre funcţiile logice respective. Spunem că funcţia $f[W,T]$ implică pe $g[W,T']$ dacă $T>T'$, ceea ce se mai scrie: $f\to g$. Se vede că $f=1\to g=1$, afirmaţia reciprocă nefiind valabilă.

3. Structura funcţiilor prag. Am dovedit că în cazul a patru variabile se pot obţine un număr de 36 diagrame de ordonare cu precizare totală. Permutînd cele patru variabile vom obţine un total de $4!\,36=864$ clase de funcţii izobare. Se observă complexitatea mult sporită a problemei faţă de cazul a trei variabile.

Pentru a putea studia funcţiile prag cu un număr mai mare de variabile vom formula mai jos următoarea teoremă [12]:

Teorema 2. *$h(X_{n+1})$ este o funcţie prag dacă şi numai dacă se poate pune sub forma:*

(6)
$$h(X_{n+1})=X_{i_{n+1}}\mu(X_n)+\bar{x}_{i_{n+1}}\nu(X_n)$$

unde $\mu(X_n)$ şi $\nu(X_n)$ sînt funcţii prag izobare de n variabile, iar X_n este un vector i-dimensional.

Condiţia este *suficientă*. Să presupunem $\mu=\mu[W,T_\mu]$ şi $\nu=\nu[W,T_\nu]$ (fig. 8) şi de asemenea că $\nu\to\mu$ adică $T_\nu>T_\mu$. Vom demonstra că h este o funcţie prag.

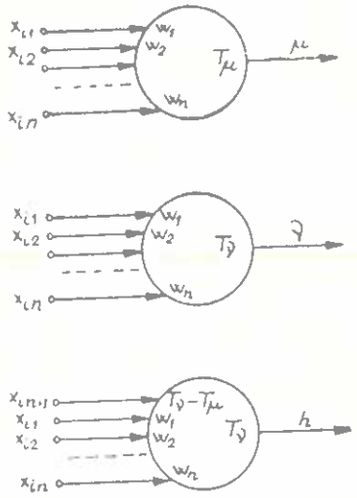

Fig. 8
a, b, c

Avem $h=1$ în două situaţii:

(7)
a) $x_{i_{n+1}}=1$ şi $\mu(X_n)=1$, adică $\sum_{k=1}^{n} w_k x_{i_k}\geq T_\mu$

b) $x_{i_{n+1}}=0$ şi $\nu(X_n)=1$, adică $\sum_{k=1}^{n} w_k x_{i_k}\geq T_\nu>T_\mu$

h este realizabilă cu elementul din fig. 8 c. Astfel:

(8)
$$h=1,\ \text{dacă}\ x_{i_{n+1}}(T_\nu-T_\mu)+\sum_{k=1}^{n} w_k x_{i_k}\geq T_\nu$$

adică, fie cînd $x_{i_{n+1}} = 1$ şi $\sum_{k=1}^{n} w_k x_{i_k} \geqslant T_\mu$, fie cînd:

$$x_{i_{n+1}} = 0 \text{ şi } \sum_{i=1}^{n} w_k x_{i_k} \geqslant T_\nu .$$

Completa indentitate dintre (7) şi (8) demonstrează suficienţa.

Condiţia este necesară. Dacă avem o funcţie prag $h = h[w_1, w_2, \ldots, w_n, T]$ atunci:

(9) $$\mu = \mu\,[w_1 w_2, \ldots, w_n\, T - w_{n+1}] \text{ şi } \nu = \nu\,[w_1, w_2, \ldots, w_n, T].$$

Într-adevăr, dacă $\mu = 1$ şi $x_{i_{n+1}} = 1$, aceasta înseamnă că avem:

(10) $$\sum_{k=1}^{n} w_k x_{i_k} \geqslant T - w_{n+1}$$

Atunci: $\sum_{k=1}^{n+1} x_{i_k} w_k = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} w_k + w_{n+1} \geqslant T$, deci $h = 1$

Dacă: $\nu = 1$ şi $x_{i_{n+1}} = 0$ avem: $\sum_{k=1}^{n} x_{i_k} w_k \geqslant T$ şi cum $x_{i_{n+1}} = 0$

(11) $$\sum_{k=1}^{n+1} w_k x_{i_k} \geqslant T,$$

rezultă $h = 1$, ceea ce arată că h se poate pune sub forma:

(12) $$h = x_{i_{n+1}} \mu (X_n) + \bar{x}_{i_{n+1}} \nu (X_n)$$

Consecinţă. Dacă

(13) $$h' (X_{n+1}) = x_{i_{n+1}} \mu' (X_n) + \bar{x}_{i_{n+1}} \nu' (X_n)$$

cu μ' şi ν' izobare, cu praguri $T_{\mu'}$ şi $T_{\nu'}$ avem $h\ B\ h'$ dacă şi numai dacă:

$$T_\mu - T_\nu = T_{\mu'} - T_{\nu'}$$

Vom da o formă mai convenabilă teoremei 2, în special pentru a fi proprie testării funcţiilor unate. Această formă permite generalizarea unor rezultate cunoscute în literatură

Precizarea relaţiilor suplimentare de ordine îngăduie transformarea D.O.P.P. într-un număr de diagrame de ordonare cu precizare totală, ataşînd fiecărei mulţimi de funcţii izobare cîte o astfel de diagramă. Am arătat în partea a doua că o astfel de mulţime este ordonată de relaţia de implicaţie. Rezultatul acesta poate fi extins imediat la un număr de n variabile.

Să mai observăm că forma (6) a funcţiei nu contrazice faptul că ea este unată.

În virtutea implicaţiei $\nu \to \mu$, putem pune:

(14) $$\mu = \mu + \nu$$

În acest caz avem:

(15) $h (X_{n+1}) = x_{i_{n+1}} \mu + \bar{x}_{i_{n+1}} \nu = x_{i_{n+1}} [\mu + \nu] + \bar{x}_{i_{n+1}} \nu$, de unde rezultă:

(16) $$h (X_{n+1}) = x_{i_{n+1}} \mu + (x_{i_{n+1}} + \bar{x}_{i_{n+1}}) \nu = x_{i_{n+1}} \mu + \nu$$

Astfel obţinem următoarea teoremă:

Teorema 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca o funcţie unată să fie funcţie prag este ca ea să se poată pune sub forma:*

(17) $$h (X_{n+1}) = x_{i_{n+1}} \mu (X_n) + \nu (X_n)$$

unde $\mu (X_n)$ şi $\nu (X_n)$ *sînt funcţii prag izobare.*

În cazul funcţiilor unate de două variabile este evident că avem o singură clasă de funcţii izobare şi că orice funcţie unată de două variabile face parte din această clasă.

Teorema 3 explică imediat de ce orice funcţie unată de trei variabile este de asemenea o funcţie prag şi permite regăsirea teoremei 1 ca o consecinţă.

Astfel orice funcţie unată de trei variabile se poate pune sub forma:

(18) $$f (x_1, x_2, x_3) = \mu (x_{i_1}, x_{i_2})\, x_{i_3} + \nu (x_{i_1}, x_{i_2})$$

μ şi ν fiind funcţii unate de două variabile. Cum orice funcţie unată de două variabile face parte din unica clasă de funcţii prag izobare de două variabile rezultă că f este o funcţie prag. Am demonstrat însă că în cazul $n = 3$ apar două clase de funcţii prag izobare. Aceasta face ca pentru patru variabile mulţimea funcţiilor prag să fie mai restrînsă decît mulţimea funcţiilor unate.

Dacă funcţiile $\mu (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ şi $\nu (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$ ce intră în descompunerea funcţiei unate $f (x_1, x_2, x_3, x_4)$:

(19) $$f (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_{i_4} \mu (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) + \nu (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$$

sînt funcţii prag izobare, atunci f este o funcţie prag. Dacă însă μ şi ν nu fac parte din aceeaşi mulţime de funcţii izobare f nu este o funcţie prag. Ca exemplu s-ar putea lua:

$$\mu = x_3 \text{ şi}$$

(20) $$\nu = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

Atunci funcţia unată:

(21) $$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 x_3 + x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1$$

nu este o funcţie prag.

Din teorema 3 se deduce pentru funcţiile unate de cinci variabile un rezultat cunoscut

$$f (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

este o funcţie prag dacă şi numai dacă se poate pune sub forma:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = m(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + x_{i_1} n(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) \tag{22}$$

unde m şi n sînt funcţii prag izobare de patru variabile.

La rîndul lor $m(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5})$ şi $n(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5})$ sînt funcţii prag dacă şi numai dacă se pot pune sub forma:

$$m(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) = p(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + x_{i_2} q(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) \tag{23}$$

$$n(x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) = s(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + x_{i_2} t(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) \tag{24}$$

unde p, q, s, t sînt funcţii prag izobare de trei variabile.

Înlocuind pe (23), (24), în (21) avem:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = p(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + x_{i_2} q(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + x_{i_1} s(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}) + \\ + x_{i_1} x_{i_2} t(x_{i_3}, x_{i_4}, x_{i_5}). \tag{25}$$

Relaţia (25) reprezintă o condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie unată de cinci variabile să fie funcţie prag, adică să poată fi realizată cu un element logic prag. Generalizarea relaţiei (25) pentru cazul descompunerii funcţiilor prag de n variabile este imediată şi evidentă.

Catedra de electricitate şi Centrul de calcul
ale Universităţii „Al. I. Cuza"

BIBLIOGRAFIE

1. Butakov, E. A. — *Sintez optimalnyh setej na porogovyh elementah.* Avtomatica i Telemechanica nr. 7, 1967; pp. 106—112.
2. Ercoli P. and Mercurio L. — *Treshold logic with one or more then one threshold.* Proc. I.F.I.P. Congres 62, Amsterdam. North Holland Publ. Comp. 1963; pp. 741—746.
3. Glinski G. S. and Yue C. K. — *Decomposition of n-variable threshold functions into p-variable treshold functions, where p < n.* Dept. of Electrical Engineering. Univ. of Ottawa Tech. Rept. 63—10, iunie 1963.
4. Mattson R. L. — *The analysis and synthesis of adaptive systems which use networks of threshold elements.* Standford Electronics Lab. Tech. Rept. 1553—1.
5. Pic Gh. — *Algebră superioară,* E.S.D.P. 1966.
6. Roy A. — *A note on testing and realization of threshold functions.* (Short Notes). I.E.E.E.Tr. on Electronic Comp. vol. EC—15, nr. 2, 1966; pp. 242—244.
7. Sandu D. — *Descompunerea funcţiilor booleene în funcţii unate pe bază de anticonsens.* An. şt. Univ. Iaşi, Tomul XIV, pp. 163—167.
8. Sheng C. L. — *A method for testing and realization of threshold functions.* I.R.E. Tr. on Electronic Comp. vol. EC—13 nr. 3, iunie 64; pp. 232—239.
9. Sheng C. L. — *A graphical interpretation of realization of symmetrical Boolean logic functions with threshold logic elements.* I.E.E.E. Tr. on Electronic Comp. vol. EC—14, pp. 8—18.
10. Sheng C. L. and Hwa H. P. — *Testing and realization of threshold logic functions by succesive higher ordering of incremental weights.* I.E.E.E. Tr. on Electronic Comp. vol. EC—15, nr. 2, 1966; pp. 212—220.

11. Torng H. C. — *An approach for the realization of linearly-separable switching functions.* I.E.E.E. Tr. on Electronic Comp. vol. EC—15 nr. 1, 1966; pp. 18—21.
12. Yajima S. and Ibaraki T. — *A lower bound of the number of threshold functions.* I.E.E.E. Tr. on Electronic Comp. vol. EC—14 nr. 6, 1965; pp. 926—929.

OBSERVATIONS SUR LA CORRÉLATION ENTRE LES FONCTIONS UNATES ET LES FONCTIONS LOGIQUES À SEUIL

Résumé

On étudie quelques aspects de la corrélation entre les fonctions unates et les fonctions logiques à seuil, en utilisant une méthode algébrique. On établit d'abord que toute fonction unate de trois variables est en même temps une fonction logique à seuil [9] c'est-à-dire est physiquement réalisable avec un seul element logique à seuil. De même, on étudie l'ensemble des fonctions logique à seuil isobares en trouvant le degré d'arbitrariété des poids et du seuil de la fonction. Puis on donne un théorème général de réalisabilité pour les fonctions unates à n variables qui permet de retrouver certains résultats, déjà connus dans le cas de quatre et cinq variables.