ASUPRA ECUAȚIILOR ALGEBRICE ÎN ALGEBRA GRUPALĂ A UNUI GRUP ABELIAN FINIT PESTE CORPUL COMPLEX

DE

SANDA DRUȚĂ

Fie G un grup abelian finit de ordin n cu elementele

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \tag{1}$$

$g_1 = e$ fiind elementul unitate al grupului G.

Se consideră algebra grupală KG a grupului G peste corpul complex K, care este o algebră asociativă, comutativă, de ordin finit n și are ca unitate principală elementul e. Tabela de înmulțire a algebrei KG este tabela de înmulțire a elementelor grupului G, deci

$$g_i g_j = \gamma_{ij}^k g_k; \quad \gamma_{ij}^k \in K \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Pentru i și j fixați, numerele γ_{ij}^k din (2) iau toate valoarea zero cu excepția unuia care ia valoarea 1.

Considerăm ecuația algebrică de grad m cu o necunoscută în algebra KG, de forma

$$ex^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0 = 0, \tag{3}$$

unde $a_i \in KG$, x — o nedeterminată.

În Nota de față se pune problema de a vedea dacă această ecuație are soluții în algebra KG și cîte soluții are în general.

Vom demonstra

Teorema: *Orice ecuație algebrică de grad m de forma (3) în algebra grupală KG a unui grup abelian finit de ordin n peste corpul complex admite* m *n soluții în KG.*

Vom arăta că găsirea elementului x din ecuația (3) se reduce la rezolvarea a n ecuații algebrice de grad m cu o necunoscută, avînd coeficienți complecși și apoi la rezolvarea unor sisteme liniare neomogene cu n ecuații, avînd drept coeficienți rădăcini ale unității de anumite ordine care depind de descompunerea grupului G în produs direct de grupuri ciclice.

1. Vom demonstra mai întîi teorema pentru cazul cînd grupul G este ciclic de ordin n cu elementele (1), g_2 fiind elementul generator al grupului.

Fie $x = \xi^i g_i$, $a_j = \alpha_j^i g_i$, $\xi^i, \alpha_j^i \in K$ $(j = 0, 1, 2, \dots, m-1;$

$$i = 1, 2, \dots, n)$$

Tabela de înmulțire a algebrei va fi în acest caz:

$$g_i g_j = g_{i+j-1} \bmod n \tag{4}$$

Demonstrația teoremei enunțate se face prin inducție după m din ecuația (3).

a) Presupunem întîi $m = 2$ (pentru $m = 1$, avem $x = -a_0$). Ecuația (3) va fi:

$$a_0 + a_1 x + e x^2 = 0, \tag{5}$$

sau înlocuind pe x și a_j avem

$$\alpha_0^i g_i + \alpha_1^{i_1} g_{i_1} \xi^{i_2} g_{i_2} + \xi^{i_1} g_{i_1} \xi^{i_2} g_{i_2} = 0 \tag{5_1}$$

sau

$$\alpha_0^i g_i + \alpha_1^{i_1} \xi^{i_2} \gamma^i_{i_1 i_2} g_i + \xi^{i_1} \xi^{i_2} \gamma^i_{i_1 i_2} g_i = 0. \tag{5_2}$$

Deci avem

$$\alpha_0^i + \alpha_1^{i_1} \xi^{i_2} \gamma^i_{i_1 i_2} + \xi^{i_1} \xi^{i_2} \gamma^i_{i_1 i_2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{5_3}$$

Înmulțind pe rînd ecuațiile (5_3) respectiv cu elementele coloanelor matricei $U = \|\alpha_{ij}\|_{n \times n}$ unde $\alpha_{ij} = \varepsilon^{(i-1)(j-1)}$, ε fiind o rădăcină primitivă de ordinul n a unității și adunînd între ele ecuațiile obținute prin înmulțirea cu elementele unei coloane vom obține:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_0^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)} + \alpha_1^{i_1} \xi^{i_2} \sum_{i=1}^{n} \gamma^i_{i_1 i_2} \varepsilon^{(i-1)(j-1)} + \xi^{i_1} \xi^{i_2} \sum_{i=1}^{n} \gamma^i_{i_1 i_2} \varepsilon^{(i-1)(j-1)} = 0 \tag{6}$$

$$(\text{unde } j = 1, 2, \dots, n).$$

Prima ecuație din (6) va fi

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_0^i + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i\right)^2 = 0,$$

deoarece $\sum_{i=1}^{n} \gamma^i_{i_1 i_2} = 1$ pentru i_1, i_2 fixați.

Analog, ecuația a doua, ținînd seama de (4) va fi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_0^i \varepsilon^{i-1} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \varepsilon^{i-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{i-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{i-1}\right)^2 = 0$$

și așa mai departe.

În acest fel, obținem sistemul echivalent cu (6):

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_0^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right) + \tag{6_1}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right)^2 = 0 \quad (\text{unde } j = 1, 2, \dots, n).$$

Dacă notăm

$$\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)} = u_j, \tag{7}$$

atunci membrii întîi ai sistemului (6_1) sînt polinoame de gradul al doilea cu coeficienți complecși respectiv în nedeterminatele $u_1, u_2, \dots, u_n$. Rezolvînd fiecare ecuație în parte din (6_1) și înlocuind în (7) pe u_j găsiți, sistemul (7) va deveni un sistem liniar și omogen în $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$ avînd determinantul coeficienților un determinant Vandermonde diferit de zero și deci admite soluții.

În acest fel am arătat că ecuația (5) admite soluții și anume exact 2^n soluții, dacă polinoamele din (6_1) admit rădăcini simple.

b) Să demonstrăm că vom obține un sistem analog pentru ecuația de grad m.

Vom presupune că pentru ecuația de grad $m - 1$ obținem un sistem analog cu (6_1) în care membrii întîi sînt polinoame de grad $m - 1$, și vom dovedi că pentru ecuația de grad m se obține un sistem de același fel avînd membrii întîi polinoame de grad m.

Fie ecuația

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{m-2} x^{m-2} + e x^{m-1} = 0 \tag{8}$$

din care obținem sistemul

$$\alpha_0^i + \alpha_1^{i_1} \xi^{i_1} \gamma^i_{i_1 i_2} + \alpha_2^{i_1} \xi^{i_2} \xi^{i_3} \gamma^{k_1}_{i_1 i_2} \gamma^i_{k_1 i_3} + \dots + \xi^{i_1} \dots \xi^{i_{m-1}} \gamma^{k_1}_{i_1 i_2} \gamma^{k_2}_{k_1 i_3} \dots \gamma^i_{k_{m-3} i_{m-1}} = 0 \tag{8_1}$$

$$(\text{unde } i = 1, 2, \dots, n).$$

Presupunem că am obținut sistemul:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_0^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)} + \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right) + \dots + \tag{9}$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i \varepsilon^{(i-1)(j-1)}\right)^{m-1} = 0 \qquad (\text{unde } j = 1, 2, \dots, n)$$

Din ecuația (3) vom obține sistemul:

$$(10)\quad \alpha_0^i + \alpha_1^i \xi^{i_1}\gamma^i_{i_1 i_2} + \dots + \xi^{i_1}\dots\xi^{i_{m-1}}\gamma^{k_1}_{i_1 i_2}\dots\gamma^{k_{m-2}}_{k_{m-3} i_{m-1}}\,\xi^{i_m}\gamma^i_{k_{m-2} i_m} = 0$$

$$(\text{unde } i = 1, 2, \dots, n).$$

Înmulțind pe rînd ecuațiile sistemului (10) cu elementele coloanelor matricei U, sumînd membru cu membru și ținînd seama de (8_1) și (9), obținem un sistem analog cu (9), în care membrii întîi sînt polinoame de gradul m în nedeterminatele $u_1, \dots, u_n$. Rezolvînd fiecare ecuație din acest sistem și înlocuind valorile găsite în (7) vom găsi m^n soluții ale ecuației (3) (căci putem forma m^n sisteme liniare de forma (7) dacă polinoamele în $u_1, \dots, u_n$ respectiv au rădăcini distincte). Deci teorema enunțată este demonstrată în cazul grupului ciclic.

2. Fie G un grup abelian finit oarecare. Din teorema fundamentală a grupurilor abeliene cu număr finit de generatori, rezultă că grupul G se descompune în produs direct de grupuri ciclice finite pe care le putem considera primare [1].

Deci fie $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_r$, unde H_i $(i = 1, 2, 3, \dots, r)$ sînt subgrupuri ciclice ale lui G. Atunci

$$K(G) = K(H_1) \times K(H_2) \times \dots \times K(H_r)$$

este produs direct de subalgebre grupale ale factorilor direcți [3]. Teorema enunțată poate fi demonstrată în mod analog și în acest caz.

Putem arăta că rezolvarea ecuației (3) se reduce la găsirea rădăcinilor a n polinoame de grad m în o nedeterminată peste corpul complex și la rezolvarea unor sisteme liniare neomogene de n ecuații, avînd drept coeficienți, rădăcini ale unității de ordin egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor factorilor direcți din descompunerea grupului G.

a) Fie mai întîi $r = 2$. Deci $G = H_1 \times H_2$, unde H_1 are elementele: $e_1, \dots, e_h$ iar H_1 are elementele: $f_1, \dots, f_q$ și $n = hq$. Putem aranja elementele din baza algebrei KG: $e_i f_j$ $(i = 1, 2, \dots, h;\ j = 1, 2, \dots, q)$ în q grupe de cîte h elemente, iar în tabela de înmulțire a algebrei KG vom avea q^2 blocuri de cîte h elemente care se permută ciclic.

Fie ε și η rădăcini primitive de ordin h și q respectiv. Cu matricele $V = ||\alpha_{ij}||_{h \times h}$ și $W = ||\beta_{ij}||_{q \times q}$ unde $\alpha_{ij} = \varepsilon^{(i-1)(j-1)}$, $\beta_{ij} = \eta^{(i-1)(j-1)}$ formăm matricea $\mathfrak{G}_{h,q}$ [3] care are q^2 submatrice de tip $h \times h$, de forma:

	$e_1 f_j,\ e_2 f_j,\ \dots,\ e_h f_j$
$e_1 f_k$	
$e_2 f_k$	$\beta_{kj} V$
$\vdots$	
$e_h f_k$	

în care submatricea de tip $h \times h$ care apare în linia k și coloana j de blocuri se obține înmulțind elementul β_{kj} al matricei W cu matricea V. Această matrice se numește produsul Kronecker sau direct al matricelor V și W [2]. Utilizînd matricea $\mathfrak{G}_{h,q}$, în locul matricei U, demonstrația teoremei se face la fel ca pentru cazul grupului ciclic, ținînd seama de permutabilitatea elementelor din tabela de înmulțire a algebrei ([3] unde este tratat detaliat pentru ecuația $x^r = a$, iar aici calculele sînt asemănătoare).

Sistemele liniare de forma (7) vor avea drept matrice a coeficienților matricea $\mathfrak{G}_{h,q}$ care are determinantul diferit de zero [3].

b) Apoi prin extindere se trece la cazul a r subgrupuri în descompunerea grupului G și demonstrația se face la fel. Elementele care apar în matricea $\mathfrak{G}_{h,q}$ vor fi rădăcini ale unității de ordin egal cu cel mai mic multiplu comun al lui h și q [3]. La fel pentru mai mulți factori direcți

Observația 1. Numărul soluțiilor distincte ale ecuației (3) va fi m^n dacă polinoamele complexe în nedeterminatele $u_1, \dots, u_n$ admit rădăcini simple, sau mai mic în caz contrar.

Observația 2. În cazul particular al ecuației binome de grad m, $x^m = a$, obținem exact m^n soluții distincte, întrucît rădăcina de indice m dintr-un număr complex are m valori distincte.

Observația 3. În particular, ecuația $x^m = 0$ are soluția unică $x = 0$, deci algebra grupală KG nu are elemente nilpotente și rezultă și pe această cale că este o algebră semisimplă.

BIBLIOGRAFIE

1. Kuroș A. G. — *Teoria grupurilor*. București, 1959.
2. Curtis C. W. and Reiner I. — *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. New York, Interscience Publ. 1962.
3. Druță Sanda — *Asupra algebrei grupale a unui grup abelian finit*. An. șt. Univ. Iași secț. I a, t. XI A (1965), p. 259—272.

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES DANS L'ALGÈBRE D'UN GROUPE ABÉLIEN FINI SUR LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES

Résumé

On considère l'algèbre d'un groupe KG, où G est un groupe abélien d'ordre n sur le corps des nombres complexes K. On démontre que toute équation algébrique (3) d'ordre m à coefficients en KG admet m^n solutions en KG. On démontre notamment que la résolution de l'équation (3) dans l'algèbre KG se réduit à la résolution de n équations algébriques à une indéterminée sur le corps des nombres complexes et ensuite, à la résolution de certains systèmes linéaires non homogènes de n équations ayant comme coefficients des racines de l'unité d'ordre égal au plus petit multiple commun des ordres des facteurs directs du groupe G.