UNE EXTENSION DES BITOPOLOGIES

PAR

T. BÎRSAN

1. J. C. Kelly [3] a introduit la notion d'espace bitopologique en 1963 par la définition : un ensemble X est un espace bitopologique s'il est muni de deux topologies $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$. J. C. Kelly [3], E. P. Lane [4], W. J. Pervin [6] et autres ont effectué une série d'études sur les propriétés de ces espaces.

D'autre part N. Levine [5] et S. Ikenaga et I. Yoshioka [2] ont introduit les notions d'extension simple et, respectivement, d'extension infinie d'une topologie. Dans [5] et [2], ils ont établi les conditions qui doivent être satisfaites pour que certaines propriétés d'une topologie se transmettent à une extension.

Dans cette Note nous définirons l'extension (simple et infinie) d'une bitopologie et, en utilisant les mêmes moyens, nous nous occuperons de questions analogues à celles de [2] et [5].

2. Soient (X, τ) un espace topologique et A une partie arbitraire de X. L'extension simple de la topologie τ par rapport à A est la topologie $\tau(A)$ engendrée par la famille des ensembles $\{\tau \cup \{A\}\}$, c'est-à-dire la topologie $\tau(A) = \{U \cup (U' \cap A) ;\ U,\ U' \in \tau\}$. Dans [2] on remarque que pour tout point $x \notin A$ le système de τ-voisinages ouverts de x est une $\tau(A)$-base ouverte de x et pour tout point $x \in A$ la famille $\{U(x) \cap A ;\ U(x)$ étant un τ-voisinage de $x\}$ est une $\tau(A)$-base ouverte de x.

Définition. *Soit $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique, $A \subset X$ et $\mathfrak{P}(A)$, $\mathfrak{Q}(A)$ les extensions simples des topologies $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}$ respectivement. On appelle extension simple de la bitopologie $(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ la bitopologie $(\mathfrak{P}(A), \mathfrak{Q}(A))$.*

On remarquera que

$$(A, \mathfrak{P} \cap A, \mathfrak{Q} \cap A) = (A, \mathfrak{P}(A) \cap A, \mathfrak{Q}(A) \cap A) =$$
$$= (A, \mathfrak{P}(A) \cap A, \mathfrak{Q} \cap A) = (A, \mathfrak{P} \cap A, \mathfrak{Q}(A) \cap A),$$

où, par exemple, $\mathfrak{P} \cap A$ signifie la topologie induite sur A par la topologie $\mathfrak{P}$. La suite des égalités reste valable si on remplace A par $\complement A$.

3. Un espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est *réciproquement Hausdorff* [3] si pour toute paire de points x et y, $x \neq y$, il existe un $\mathfrak{P}$-voisinage U de x et un $\mathfrak{Q}$-voisinage V de y tels que $U \cap V = \Phi$. Il est évident que si $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement Hausdorff, alors $(X, \mathfrak{P}(A), \mathfrak{Q}(A))$ est réciproquement Hausdorff.

Dans un espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ on dit [3] que $\mathfrak{P}$ *est régulière par rapport à* $\mathfrak{Q}$ si pour tout point $x \in X$ et tout $\mathfrak{P}$-voisinage U de x il existe un $\mathfrak{P}$-voisinage V de x tel que $\overline{V}^{\mathfrak{Q}} \subset U$; $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est *réciproquement régulier* si $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{P}$.

En suivant la même voie que celle du théorème 1.1 de [2], on obtient le

Théorème 1. *Supposons que $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique et que $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$ (réciproquement régulier) et soit $A \subset X$. La condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{P}(A)$ soit régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$, ($(X, \mathfrak{P}(A), \mathfrak{Q}(A)$ soit réciproquement régulier) est que A soit ouvert dans l'espace topologique $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$ (A soit ouvert dans $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$ et $(\overline{A}^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{Q} \cap \overline{A}^{\mathfrak{P}})$).*

Nous démontrerons seulement la première partie du théorème.

Nécessité. Supposons que $\mathfrak{P}(A)$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$ et montrons que A est ouvert dans l'espace $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$. En effet, si A n'est pas ouvert dans $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$, il existe un point $x \in A$ tel que pour tout $\mathfrak{P}$-voisinage $V(x)$ on a $V(x) \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} \not\subset A$. Nous démontrerons que pour tout $\mathfrak{P}(A)$-voisinage $V(x) \cap A$ on a $\overline{V(x) \cap A}^{\mathfrak{Q}(A)} \not\subset A$. Puisque $V(x) \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} \not\subset A$, il existe un point $y \in V(x) \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} - A$. Donc $y \in A$ et alors le système des $\mathfrak{Q}$-voisinages de y est une base du système des $\mathfrak{Q}(A)$-voisinages de y. Puisque $y \in V(x)$ et $y \in \overline{A}^{\mathfrak{Q}}$, pour tout $\mathfrak{Q}(A)$-voisinage $U(y)$, on a $U(y) \cap V(x) \cap A \neq O$. Donc $y \in \overline{V(x) \cap A}^{\mathfrak{Q}(A)}$ et on a $y \in \overline{V(x) \cap A}^{\mathfrak{Q}(A)} - A$. C'est-à-dire $\mathfrak{P}(A)$ n'est pas régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$, en contradiction avec l'hypothèse.

Suffisance. Supposons que A est ouvert dans le sous-espace $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$. Soit $x \notin A$ et $V(x)$ un $\mathfrak{P}(A)$-voisinage arbitraire de x. Puisque $V(x)$ est un $\mathfrak{P}$-voisinage de x et $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$, il existe un $\mathfrak{P}$-voisinage $U(x)$ de sorte que $\overline{U(x)}^{\mathfrak{Q}} \subset V(x)$. Mais $\mathfrak{Q} \leqslant \mathfrak{Q}(A)$ et alors on a $\overline{U(x)}^{\mathfrak{Q}(A)} \subset \overline{U}^{\mathfrak{Q}}$, donc $x \in U(x) \subset \overline{U(x)}^{\mathfrak{Q}(A)} \subset V(x)$, c'est-à-dire $\mathfrak{P}(A)$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$. Soit maintenant $x \in A$ et $V(x) \cap A$ un $\mathfrak{P}(A)$-voisinage de x. Conformément à l'hypothèse, il existe un $\mathfrak{P}$-voisinage $U(x)$ de sorte que $U(x) \subset V(x)$ et $U(x) \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} \subset A$. Parce que $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$ il existe $W(x)$ de sorte que $\overline{W(x)}^{\mathfrak{Q}} \subset U(x)$. Alors $W(x) \cap A$ est un $\mathfrak{P}(A)$-voisinage de x et on a $\overline{W(x) \cap A}^{\mathfrak{Q}(A)} \subset \overline{W(x \cap A}^{\mathfrak{Q}} \subset \overline{W(x)}^{\mathfrak{Q}} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} \subset U(x) \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}} \subset U(x) \cap A \subset V(x) \cap A$; c'est-à-dire $\mathfrak{P}(A)$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$.

Remarque. Le fait que $\mathfrak{P}(A)$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$ n'implique pas que $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$.

En effet, soient $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q} = \tau : \{\{a, b\}, X, \Phi\}$ et $A = \{c, d\}$; alors $(X, \tau(A))$ est régulier, A est ouvert dans $(A^{\tau}, \tau \cap \overline{A}^{\tau})$, mais (X, τ) n'est pas régulier.

4. Soit $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique. On dit que $\mathfrak{P}$ *est complètement régulière par rapport à* $\mathfrak{Q}$ [4] si pour tout point $x \in X$ et pour tout $\mathfrak{P}$-voisinage V de x il existe une fonction f définie sur X à valeurs réelles $\mathfrak{P}$-semicontinue inférieurement et $\mathfrak{Q}$-semicontinue supérieurement et telle que $f(x) = 1$, $f(\complement V) = 0$, $0 \leqslant f \leqslant 1$.

On dit que $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est *réciproquement complètement régulier* [4] si $\mathfrak{P}$ est complètement régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}$ est complètement régulière par rapport à $\mathfrak{P}$.

On dit que l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est *réciproquement normal* [3] si pour tout couple d'ensembles F et G, disjoints, F étant $\mathfrak{P}$-fermé et G étant $\mathfrak{Q}$-fermé, il existe un ensemble U $\mathfrak{Q}$-ouvert et un ensemble V $\mathfrak{P}$-ouvert de sorte que $F \subset U$, $G \subset V$ et $U \cap V = \Phi$.

On constate facilement que: a) si $\mathfrak{P}$ est complètement régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$, alors $\mathfrak{P}$ est régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$, b) la propriété „$\mathfrak{P}$ est complètement régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$" est héréditaire, c) si $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement normal et $Y \subset X$ est un ensemble $\mathfrak{P}$-fermé, alors le sous-espace Y est réciproquement normal.

Avec ces remarques, on peut généraliser les théorèmes 1.2 de [2] et 5 de [5], en suivant la même voie dans les démonstrations.

Théorème 2. *Si $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique ayant la propriété que $\mathfrak{P}$ est complètement régulière par rapport à $\mathfrak{Q}$ ($(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est réciproquement complètement régulier) et A est une partie de X, la condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{P}(A)$ soit complètement régulière par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$ ($(X, \mathfrak{P}(A), \mathfrak{Q}(A)$ soit réciproquement complètement régulier) est que l'ensemble A soit ouvert dans $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$ (A soit ouvert dans $(\overline{A}^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{P} \cap \overline{A}^{\mathfrak{Q}})$ et $(\overline{A}^{\mathfrak{P}}, \mathfrak{Q} \cap \overline{A}^{\mathfrak{P}})$).*

Théorème 3. *Si $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique réciproquement normal et $A \subset X$ un ensemble $\mathfrak{P}$-fermé et $\mathfrak{Q}$-fermé la condition nécessaire et suffisante pour que $(X, \mathfrak{P}(A), \mathfrak{Q}(A))$ soit réciproquement normal est que le sous-espace bitopologique $(\complement A, \mathfrak{P} \cap \complement A, \mathfrak{Q} \cap \complement A)$, soit réciproquement normal.*

5. L'espace bitopologique $(X, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$ s'appelle *connexe* [6] si X ne peut pas s'exprimer comme une réunion de deux ensembles non vides, disjoints M et N de sorte que M est $\mathfrak{P}$-ouvert et N est $\mathfrak{Q}$-ouvert.

Théorème 4. *Si $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique et A un ensemble dense dans X (c'est-à-dire A est dense dans X par rapport à $\mathfrak{T}$ et aussi par rapport à $\mathfrak{Q}$) et si le sous-espace $(A, \mathfrak{T} \cap A, \mathfrak{Q} \cap A)$ est connexe, alors $(X, \mathfrak{T}(A), \mathfrak{Q}(A))$ est connexe.*

a) Montrons d'abord que l'espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est connexe. En effet, dans le cas contraire nous aurions $X = M \cup N$, $M \cap N = \emptyset$, M étant $\mathfrak{T}$-ouvert et N étant $\mathfrak{Q}$-ouvert. Comme A est connexe dans $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$, il suit, compte tenu du théorème E [6], que $A \subset M$ ou bien $A \subset N$. Ce fait est en contradiction avec l'hypothèse que A est dense dans X; donc $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est connexe.

b) Parce que $(A, \mathfrak{T} \cap A, \mathfrak{Q} \cap A) = (A, \mathfrak{T}(A) \cap A, \mathfrak{Q}(A) \cap A)$, il résulte que A est connexe dans $(X, \mathfrak{T}(A), \mathfrak{Q}(A))$. Comme A est dense dans cet espace — puisqu'il est dense dans $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ — on peut répéter le raisonnement de a) et il résultera que $(X, \mathfrak{T}(A), \mathfrak{Q}(A))$ est connexe.

Remarque. En prenant $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$ dans ce théorème, on obtient le théorème 9 [5].

L'exemple suivant montre que la proposition correspondante au théorème 2.1 [2] n'est pas vraie :

Soit $X = \{a, b, c, d\}$, $\mathfrak{T} : \emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X$ et $\mathfrak{Q} : \emptyset, \{b, d\}, X$.

Soit $A = \{a, d\}$. On constate facilement que $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est connexe et A est dense dans lui. Toutefois $(X, \mathfrak{T}(A), \mathfrak{Q}(A))$ n'est pas connexe.

6. Dans l'espace topologique (X, τ) soit $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles. Dans [2] on définit l'extension de τ par rapport à $\mathcal{A}$, notée par $\tau(\mathcal{A})$, de la manière suivante : la base de voisinages d'un $x \notin \bigcup_{i \in I} A_i$ est le système de voisinages ouverts de x dans τ et la base de voisinages d'un $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ est la famille des ensembles qui s'obtiennent en prenant toutes les intersections entre un voisinage ouvert de x dans τ et une intersection d'un nombre fini d'ensembles appartenant à $\mathcal{A}$ et contenant x. On constate que l'extension de τ par rapport à $\mathcal{A}$ peut être définie comme la topologie engendrée par la famille des ensembles $\{\tau \cup \mathcal{A}\}$.

La généralisation suivante du lemme 2 [5] sera utile plus loin :

Lemme. *Si (X, τ) est un espace topologique, $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles de X et $B \subset X$, alors :*

$$x \in \overline{B}^{\tau(\mathcal{A})} \Longleftrightarrow x \in \{(\bigcup_I A_i) \cap [\bigcap_{J \in F_x(I)} (\overline{\bigcap_J A_i) \cap B^\tau}]\} \cup [\overline{B}^\tau - \bigcup_I A_i],$$

où $F_x(I) = \{J : J \subset I,\ J$ fini, $i \in J \Rightarrow x \in A_i\}$.

En effet $x \in \overline{B}^{\tau(\mathcal{A})} \Longleftrightarrow$ (a) $x \in \overline{B}^{\tau(\mathcal{A})}$ et $x \in \bigcup_I A_i$ ou (b) $x \in \overline{B}^{\tau(\mathcal{A})}$ et $x \notin \bigcup_I A_i$. Occupons-nous successivement avec ces deux cas.

$$\text{(a)} \Longleftrightarrow (x \in \bigcup A_i) \wedge \{(\forall V(x) \in \tau)(\forall J \in F_x(I))[V(x) \cap \{(\bigcap_J A_i) \cap B\} \neq$$

$$\neq \emptyset]\} \Longleftrightarrow (x \in \bigcup A_i) \wedge \{(\forall J \in F_x(I))[x \in (\overline{\bigcap_{i \in J} A_i) \cap B^\tau}]\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x \in \bigcup A_i) \wedge (x \in \bigcap_{J \in F_x(I)} (\overline{\bigcap_J A_i) \cap B^\tau}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x \in (\bigcup_I A_i) \cap (\bigcap_{J \in F_x(I)} (\overline{\bigcap_J A_i) \cap B^\tau}).$$

$$\text{(b)} \Longleftrightarrow (x \notin \bigcup_I A_i) \wedge \{(\forall V(x) \in \tau)[V(x) \cap B = \emptyset]\} \Longleftrightarrow$$

$$(x \notin \bigcup A_i) \wedge (x \in B^\tau) \Longleftrightarrow x \in \overline{B}^\tau - \bigcup_I A_i.$$

Il résulte ainsi la conclusion du lemme.

Cas particulier. Si $B \cap (\bigcup_I A_i) = \emptyset$, c'est-à-dire $B \cap A_i = \emptyset$, $i \in I$, ce qui est équivalent à $\bigcup_{J \in F(I)} [B \cap (\bigcup_{i \in J} A_i)] = \emptyset$, où $F(I) = \{J : J \subset I,\ J$ fini$\}$, alors $x \in \overline{B}^{\tau(\mathcal{A})} \Longleftrightarrow x \in \overline{B}^\tau - \bigcup_I A_i$, donc $\overline{B}^{\tau(\mathcal{A})} = \overline{B}^\tau - \bigcup_I A_i$.

Définition. *Soient $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ un espace bitopologique et $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles. On appelle extension de la bitopologie $(\mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ par rapport à $\mathcal{A}$, la bitopologie $(\mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$.*

En vertu des théorèmes 1 et 2, on peut démontrer le

Théorème 5. *Si $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique et $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ une famille d'ensembles de X, si $\mathfrak{T}$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}$ et, pour tout $i \in I$, A_i est ouvert dans $(\overline{A}_i^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{T} \cap \overline{A}_i^{\mathfrak{Q}})$, alors l'espace $(X, \mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$ a la propriété que $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(\mathcal{A})$.*

En effet, dans les hypothèses du théorème, il résulte que les espaces $(X, \mathfrak{T}(A_i), \mathfrak{Q}(A_i))$, $i \in I$, ont la propriété que $\mathfrak{T}(A_i)$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(A_i)$. Mais $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ et $\mathfrak{Q}(\mathcal{A})$ sont, respectivement, les bornes supérieures des familles de topologies $\{\mathfrak{T}(A_i)\}_{i \in I}$ et $\{\mathfrak{Q}(A_i)\}_{i \in I}$. On démontre facilement que les bornes supérieures conservent la propriété des bitopologies $(\mathfrak{T}(A_i), \mathfrak{Q}(A_i))$, c'est-à-dire $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(\mathcal{A})$.

Corollaire. *Soit $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ réciproquement régulier (réciproquement complètement régulier) et, pour tout $i \in I$, A_i ouvert dans $(\overline{A}_i^{\mathfrak{Q}}, \mathfrak{T} \cap \overline{A}_i^{\mathfrak{Q}})$ et $(\overline{A}_i^{\mathfrak{T}}, \mathfrak{Q} \cap \overline{A}_i^{\mathfrak{T}})$. Alors $(X, \mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$ est réciproquement régulier (réciproquement complètement régulier).*

En utilisant le lemme précédent, démontrons le

Théorème 6. *Si $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est un espace bitopologique ayant la propriété que $\mathfrak{T}$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}$ et $\mathcal{A} = \{A_i\}_1^n$ est une famille finie telle que $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$, pour que $(X, \mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$ ait la propriété que $\mathfrak{T}(\mathcal{A})$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(A)$, il suffit que A_i soit ouvert dans le sous-espace $([\overline{A}_i^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j],$*

$\mathfrak{T} \cap [A_i^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_{j=0}^{i-1} A_j])$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (*on fait la convention que* $A_0 = \emptyset$).

Démontrons le théorème par induction. Pour $n = 1$, le théorème se réduit aux premières parties des théorèmes 1 et 2. Supposons qu'il est vrai pour $n = k - 1$. Soit $\mathcal{A}' = \{A_i\}_1^{k-1}$ et $\mathcal{A}'' = \{A_i\}_1^{k}$. D'abord on constate :

A_k ouvert dans $(\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')}, \mathfrak{T}(\mathcal{A}') \cap \bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')}) \Longleftrightarrow A_k$ est ouvert dans $([\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j], \mathfrak{T} \cap [\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_{j=0}^{k-1} A_j])$.

En effet

$$A_k \text{ ouvert dans } (\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')}, \mathfrak{T}(\mathcal{A}') \cap \bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')}) \Longleftrightarrow (\forall x \in A_k)$$

$$(\exists V(x) \in \mathfrak{T}(\mathcal{A}'))[V(x) \cap \bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')} \subset A_k] \Longleftrightarrow (\forall x \in A_k)(\exists V(x) \in \mathfrak{T})$$

$$[V(x) \cap (A_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_0^{k-1} A_j) \subset A_k] \Longleftrightarrow A_k$$

$$\text{ouvert dans } ([\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_0^{k-1} A_j], \mathfrak{T} \cap [\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_0^{k-1} A_j]).$$

Supposons maintenant que la condition du théorème est satisfaite pour $i = 1, 2, \ldots, k$. Ce fait implique que $\mathfrak{T}(\mathcal{A}')$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')$ et que A_k est ouvert dans $([\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_0^{k-1} A_j], \mathfrak{T} \cap [\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}} - \bigcup_0^{k-1} A_j])$, ce qui est équivalent à la propriété que $\mathfrak{T}(\mathcal{A}')$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')$ et A_k est ouvert dans $(\bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')}, \mathfrak{T}(\mathcal{A}') \cap \bar{A}_k^{\mathfrak{Q}(\mathcal{A}')})$, c'est-à-dire $\mathfrak{T}(\mathcal{A}'')$ est régulière (complètement régulière) par rapport à $\mathfrak{Q}(\mathcal{A}'')$. C.q.f.d.

En ce qui concerne la connexion nous démontrons le

Théorème 7. *Si* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ *est un espace bitopologique et* $\mathcal{A} = \{A_i\}$ *une famille d'ensembles de* X *telle que* $\bigcap_1^n A_i$ *est dense dans* $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$, *si le sous-espace* $(\bigcap_1^n A_i, \mathfrak{T} \cap (\bigcap_1^n A_i), \mathfrak{Q} \cap (\bigcap_1^n A_i))$ *est connexe, alors l'espace bitopologique* $(X, \mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$ *est connexe.*

On peut montrer, comme dans le théorème 4, que $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{Q})$ est connexe. De même, $\bigcap_1^n A_i$ est dense dans $(X, \mathfrak{T}(\mathcal{A}), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}))$ et $(\bigcap_1^n A_i, \mathfrak{T} \cap (\bigcap_1^n A_i), \mathfrak{Q} \cap (\bigcap_1^n A_i)) = (\bigcap_1^n A_i, \mathfrak{T}(\mathcal{A}) \cap (\bigcap_1^n A_i), \mathfrak{Q}(\mathcal{A}) \cap (\bigcap_1^n A_i))$. Alors on peut répéter le raisonnement du théorème 4 et on arrive à la conclusion

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Topologie générale*, livre III, Ed. Hermann, Paris, 1956.
2. Ikenaga S. and Yoshioka I. — *Extensions of Topologies*, Proc. Japan. Acad., 41 (1965), No 1, p. 11–16.
3. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., t. XII (1963), p. 71–89.
4. Lane E. P. — *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*, Proc. London Math.Soc., t. XVII (1967), p. 241–256.
5. Levine N. — *Simple extensions of topologies*, The American Math. Monthly, v. 71 (1964), p. 22–25.
6. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*, Proc. Koninklijke Nederlandse Acad. LXX (1967), p. 369–372.

ASUPRA EXTENSIUNII BITOPOLOGIILOR

Rezumat

Se definește noțiunea de extensiune simplă a unei bitopologii în mod analog cu definiția dată de N. Levine [5] în cazul unei topologii, precum și noțiunea de extensiune infinită.

Un număr de teoreme precizează în ce condiții anumite proprietăți ale unui spațiu bitopologic (reciprocă regularitate, completă regularitate, reciprocă normalitate, conexiune) se transmit spațiului bitolopogic extins.