FONCTIONS ET SUITES ASYMPTOTIQUEMENT PRESQUE-PÉRIODIQUES AVEC DES VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

PAR

A. PRECUPANU

Dans cette Note, on présente quelques résultats concernant les fonctions et les suites asymptotiquement presque-périodiques (abrégé a.p.p.) avec des valeurs dans un espace de Banach ; on trouve quelques propriétés de liaison entre les fonctions et les suites a.p.p. et on introduit la notion de fonction faiblement asymptotiquement presque-périodique (abrégé f.a.p.p.) Après une brève introduction où on indique quelques notations et notions à caractère général, la Note contient trois parties.

Dans le § 1, après la considération des principales propriétés des fonctions et suites a.p.p avec les valeurs dans un espace de Banach X, on donne des propriétés topologiques pour les espaces $AP^{\infty}(X)$ de toutes les fonctions a.p.p et $ap^{\infty}(X)$ de toutes les suites a.p.p.

Dans le § 2, on démontre deux théorèmes : l'un qui caractérise les fonctions a.p.p à l'aide des suites a.p.p. et l'autre qui caractérise les suites a.p.p. à l'aide des fonctions a.p.p.

Le § 3 est consacré à l'introduction des notions de fonction et suite f.a.p.p. avec leurs principales propriétés.

Notations. X — espace de Banach sur le corps des nombres complexes avec des éléments x de norme $\|x\|$; R — l'ensemble des nombres réels ; I — l'ensemble des nombres entiers non-négatifs ; R_α — la demi-droite $t \geqslant \alpha$; $C(R_\alpha ; X)$ — l'ensemble des fonctions continues définies sur R_α avec les valeurs dans X. $\mathcal{F}(I ; X)$ — l'ensemble des fonctions définies sur I avec des valeurs dans X.

Définition 1. *On dit que la fonction $f \in C(R_\alpha ; X)$ est asymptotiquement presque-périodique* (a.p.p.) *si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres*

positifs l et M tels que chaque intervalle de R_α de longueur l contienne au moins un point τ, nommé presque-période asymptotique, de façon que :

$$\|f(t+\tau)-f(t)\| < \varepsilon, \text{ pour } t > M \text{ et } t+\tau > M. \tag{1}$$

On remarque que si une fonction est a.p.p. sur R_α, chaque translatée a le même caractère sur la demi-droite obtenue par la translation de R_α.

Définition 1'. *On dit que la fonction $\varphi \in \mathcal{F}(I\,;X)$ est une suite asymptotiquement presque-périodique* (a.p.p.) *si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe deux nombres entiers et positifs L et M tels que parmi L entiers consécutifs se trouve au moins un entier p tel que*

$$\|\varphi(n+p)-\varphi(n)\| < \varepsilon, \text{ pour } n > M \text{ et } n+p > M. \tag{2}$$

Nous dirons que p est une presque-période asymptotique de la suite φ.

Désignons maintenant par $AP^{\infty}_{\alpha}(X)$ l'espace des fonctions a.p.p. définies sur la même demi-droite R_α, par $AP^{\infty}(X)$ l'espace de toutes les fonctions a.p.p. et par $ap^{\infty}(X)$ l'espace des suites a.p.p. $(n \geqslant 0)$.

Définition 2. *Nous dirons qu'une famille $\mathcal{F} \subset AP^{\infty}_{\alpha}(X)$ de fonctions a.p.p. définies sur une même demi-droite R_α est également a.p.p. si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe deux nombres positifs l et M tels que chaque intervalle de R_α, de longueur l, contienne au moins un point τ pour lequel* (1) *est remplie pour chaque $f \in \mathcal{F}$.*

Définition 3. *Un ensemble E de nombres réels est dit relativement dense s'il existe un nombre $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur supérieure à l contienne au moins un point de E* (2).

En utilisant la définition 3, nous pouvons donner une autre forme pour la définition 2.

Définition 2-bis. *Nous dirons que la famille $\mathcal{F} \subset AP^{\infty}_{\alpha}(X)$ est également a.p.p. si l'ensemble*

$$E(\varepsilon\,;\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} E(\varepsilon\,;f)$$

des presque-périodes asymptotiques communes à toutes les fonctions f de $\mathcal{F}$ est relativement dense quel que soit $\varepsilon > 0$.

Définition 2'. *Nous dirons que la famille $\Phi \subset ap^{\infty}(X)$ est également a.p.p. si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe deux nombres entiers, positifs L et M tels que parmi L entiers consécutifs se trouve au moins un entier p pour lequel* (2) *est remplie pour chaque $\varphi \in \Phi$.*

Définition 4. *On dit qu'une fonction $f \in C(R_\alpha\,;X)$ est asymptotiquement normale si de toute suite de nombres réels $h_n \to +\infty$, on peut extraire une suite k_n pour laquelle la suite $\{f(t+k_n)\}_{n \in I}$ converge uniformément sur chaque demi-droite R_β.*

Remarque. Il suffit que la suite $\{f(t+k_n)\}_{n \in I}$ converge uniformément sur une demi-droite arbitraire R_β, pour converger sur chaque demi-droite, parce que la normalité asymptotique est conservée par les translations.

Définition 4'. *On dit que la suite $\varphi \in ap^{\infty}(X)$ est asymptotiquement normale si de toute suite d'entiers positifs $m_k \to +\infty$ on peut extraire une sous-suite m'_k pour laquelle la suite $\{\varphi(n+m'_k)\}_{k \in I}$ converge uniformément par rapport à n.*

§ 1. En utilisant les définitions des fonctions a.p.p. avec des valeurs dans X et en poursuivant les démonstrations de [8], on trouve sans difficulté les propriétés suivantes :

I. Une fonction a.p.p. sur R_α avec les valeurs dans X est bornée par rapport à la norme sur X.

II. Une fonction a.p.p. sur R_α avec les valeurs dans X est uniformément continue sur R_α.

III. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f \in C(R_\alpha\,;X)$ soit a.p.p. est que f soit asymptotiquement normale

IV. Si une suite de fonctions $\{f_n\}_{n \in I}$ asymptotiquement presque-périodiques avec des valeurs dans X converge uniformément sur R_α, la limite f est une fonction a.p.p.

V. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f \in C(R_\alpha\,;X)$ soit a.p.p. est que cette fonction peut être représentée uniquement sous la forme

$$f(t) = p(t) + \omega(t), \tag{3}$$

où p est une fonction presque-périodique avec des valeurs dans X et ω est une fonction continue sur R_α qui tend vers 0 par rapport à la norme de X pour $t \to +\infty$.

VI. L'ensemble des valeurs d'une fonction a.p.p. $f(t)$ sur R_α est relativement compact.

En utilisant, maintenant, ces propriétés nous pouvons étudier la structure topologique de l'espace des fonctions a.p.p.

En vertu des propriétés I et V, on peut organiser $AP^{\infty}_{\alpha}(X)$, l'ensemble des fonctions a.p.p. sur R_α, comme un espace linéaire normé par rapport à la norme

$$\|f\|_1 = \sup_{t \geqslant \alpha} \|f(t)\|. \tag{4}$$

On remarque que sur $AP^{\infty}_{\alpha}(X)$ on peut introduire encore une autre norme, en utilisant aussi la propriété V ; c'est la norme donnée par :

$$\|f\|_2 = \sup_{t \in R} \|p(t)\| + \sup_{t \geqslant \alpha} \|\omega(t)\|. \tag{5}$$

Proposition 1. *Les normes données par* (4) *et* (5) *sont équivalentes.*

Démonstration. On sait de [8] que pour la construction de $p(t)$, la partie presque-périodique de la décomposition (3), on utilise le fait que $f(t)$ étant a.p.p. est aussi asymptotiquement normale et donc, en prenant

une suite de nombres réels $k_n \to +\infty$, on peut extraire une sous-suite k_n pour laquelle il existe $\lim_{k\to\infty} f(t+k_n)$; cette limite est justement la fonction $p(t)$, définie sur R. On a alors

$$\sup_{t\in R} \|p(t)\| \leqslant \sup_{t\in R_\alpha} \|f(t)\|$$

et après des calculs élémentaires il résulte

$$|f|_1 \leqslant |f|_2 \leqslant 3|f|_1, \tag{6}$$

qui entraîne l'équivalence des normes.

Désignons par $C_0^\infty(R_\alpha; X)$ l'espace de Banach des fonctions continues sur R_α qui tendent vers 0 pour $t \to +\infty$. On aura alors

Corollaire 1. *$AP_\alpha^\infty(X)$ est un espace de Banach, somme directe des espaces de Banach $AP(X)$ et $C_0^\infty(R_\alpha; X)$*

$$AP_\alpha^\infty(X) = AP(X) \oplus C_0^\infty(R_\alpha; X). \tag{7}$$

Démonstration. En effet, la norme (4) est équivalente à la norme (5), la norme de la somme directe des espaces $AP(X)$ et $C_0^\infty(R_\alpha; X)$ ce qui démontre l'affirmation du corollaire 1.

Par conséquent, nous pourrons déduire les propriétés topologiques de $AP_\alpha^\infty(X)$ des propriétés topologiques des espaces composants $AP(X)$ et $C_0^\infty(R_\alpha; X)$. En caractérisant la convergence pour les deux normes et en utilisant la propriété V, il résulte :

Corollaire 2. Une suite de fonctions a.p.p. est uniformément convergente si et seulement si les suites respectives $\{p_n(t)\}$ des parties presque-périodiques et $\{\omega_n(t)\}$ des parties qui tendent vers 0 pour $t \to \infty$ sont uniformément convergentes.

Soit

$$F_{\alpha\beta} : AP_\alpha^\infty(X) \to AP_\beta^\infty(X) \tag{8}$$

une fonction définie par $F_{\alpha\beta}(f) = g$, où $g(t) = f(t + \alpha - \beta)$. On remarque que cette application est un isomorphisme isométrique d'où il résulte que α n'est pas essentiel dans les propriétés topologiques de l'espace $AP_\alpha^\infty(X)$; par conséquent, nous pourrons opérer avec les fonctions de $AP_\alpha^\infty(X)$ en gardant toute la généralité des résultats. Plus précisément, si on introduit sur l'ensemble $AP^\infty(X) = \bigcup_{\alpha\in R} AP_\alpha^\infty(X)$ la relation d'équivalence ρ définie par $f \rho g$ si et seulement si g est une translatée de f, alors l'espace quotient $AP^\infty(X)/\rho$ est isomorphe avec chaque espace $AP_\alpha^\infty(X)$.

En utilisant le corollaire 1, la relation (7), on peut démontrer sans peine un théorème analogue du théorème 3 de [6] pour la relative compacité d'une famille de fonctions a.p.p.

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille $\mathcal{F} \subset AP_\alpha^\infty(X)$, de fonctions a.p.p. avec les valeurs en X soit relativement compacte au sens d'Arzelà est que cette famille soit équicontinue, également asymptotiquement presque-périodique et pour chaque $t \in R_\alpha$, l'ensemble des valeurs des fonctions de la famille soit relativement compact en X.*

Démonstration. Évidemment, $C_\alpha^\infty(R_\alpha; X)$ peut être identifié avec l'espace $C_0(\overline{R}_\alpha; X)$ de toutes les fonctions continues sur la compactification $\overline{R}_\alpha$ de la demi-droite R_α, qui prennent la valeur 0 au point de l'infini de $\overline{R}_\alpha$. Désignons par $\mathcal{P}$ la famille des parties presque-périodiques et par $\mathcal{Q}$ la famille des parties qui s'annulent dans le point de l'infini des fonctions $f \in \mathcal{F} \subset AP_\alpha^\infty(X)$.

En vertu du corollaire 1, il résulte que $\mathcal{F}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{P}$, respectivement $\mathcal{Q}$, sont relativement compactes dans $AP(X)$, respectivement dans $C_0^\infty(R_\alpha; X)$ (ou dans $C_0(\overline{R}_\alpha; X)$). Mais, de [6], il résulte que $\mathcal{P}$ est relativement compacte si et seulement si $\mathcal{P}$ est équicontinue, également presque-périodique et pour chaque $t \in R$ l'ensemble des valeurs des fonctions de la famille est relativement compact en X. D'autre part, en utilisant la remarque faite au début de la démonstration, la famille $\mathcal{Q}$ est relativement compacte si et seulement si les conditions du théorème d'Ascoli [7] sont remplies. En composant les deux conditions de relative compacité pour $\mathcal{P}$ respectivement $\mathcal{Q}$ et en utilisant le fait que chaque ε-presque-période asymptotique de f est une ε-presque-période pour sa partie presque-périodique p il résulte immédiatement l'affirmation demandée.

On peut donner encore une autre démonstration pour ce résultat en utilisant la même méthode comme en [6].

Sans aucune difficulté on peut démontrer des résultats similaires pour les suites a.p.p.

Ainsi on a :

I'. Une suite a.p.p. avec les valeurs dans X est bornée par rapport à la norme.

III'. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit a.p.p. est qu'elle soit asymptotiquement normale.

IV'. Si la suite $\{\varphi_k(n)\}_{k\in I}$ de suites a.p.p. converge uniformément par rapport à n vers une suite $\varphi(n)$, alors $\varphi(n)$ est une suite a.p.p.

V'. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite soit a.p.p. est qu'elle puisse être représentée uniquement de la façon

$$\varphi(n) = \pi(n) + \omega(n), \quad n \in I, \tag{3'}$$

où $\pi \in ap(X)$ (l'espace de Banach des suites p.p.) et $\omega(n) \to 0$, pour $n \to \infty$.

VI'. L'ensemble des valeurs d'une fonction a.p.p. de variable entière non-négative est relativement compact.

En utilisant les mêmes remarques que pour $AP_\alpha^\infty(X)$, il résulte immédiatement que l'espace $ap^\infty(X)$ peut être organisé comme un espace linéaire normé par rapport à la norme

$$(4') \qquad |\varphi|_1 = \sup_{n \geq 0} \|\varphi(n)\|.$$

De la même façon que pour les fonctions a.p.p., on peut introduire aussi une autre norme $|\varphi|_2$, l'analogue de (5), qui est équivalente à $|\varphi|_1$, d'où, en donnant des propriétés similaires aux propriétés des corollaires 1 et 2, il résulte facilement la structure d'espace de Banach de $ap^\infty(X)$ ($ap^\infty(X)$ est la somme directe entre $ap(X)$ et $c_0(X)$)

$$(7') \qquad ap^\infty(X) = ap(X) \oplus c_0(X).$$

On a aussi pour les suites a.p.p. un théorème de relative compacité donné par le

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de suites a.p.p. avec les valeurs en X soit relativement compacte au sens d'Arzelà est que cette famille soit également a.p.p. et pour chaque entier $n \geq 0$, l'ensemble des valeurs des suites soit relativement compact en X.*

§ 2. Dans ce paragraphe nous tâchons de mettre en évidence la liaison entre les suites et les fonctions a.p.p. avec les valeurs dans X. Ces résultats sont synthétisés dans les théorèmes 3 et 4.

Soit $\varphi \in ap^\infty(X)$. Désignons par $\bar{\varphi}(t)$ une fonction sur $[0, +\infty)$ définie par

$$(9) \qquad \bar{\varphi}(t) = \varphi(n) + (t - n)[\varphi(n+1) - \varphi(n)], \text{ où } t \in [n, n+1),$$

pour $n \in I$, appelée la *fonction polygonale* associée à $\varphi(n)$.

En utilisant ces fonctions polygonales, nous pourrons établir un résultat important par lequel les suites a.p.p. peuvent être caractérisées à l'aide des fonctions a.p.p.; pour cela on donne la

Proposition 2. *Si $\varphi \in ap^\infty(X)$, alors $\bar{\varphi} \in AP_0^\infty(X)$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in ap^\infty(X)$ une suite a.p.p. et $\bar{\varphi}$ sa fonction polygonale associée définie par (9). Par l'hypothèse φ est a.p.p., donc, grâce à la propriété caractéristique V', elle admet une décomposition de la forme (3')

On a alors

$$(10) \qquad \bar{\varphi}(t) = \bar{\pi}(n) + \bar{\omega}(n) + (t - n)[\bar{\pi}(n+1) - \bar{\pi}(n)] + (t - n)[\bar{\omega}(n+1) - \bar{\omega}(n)] = \bar{\pi}(t) + \bar{\omega}(t),$$

$$\text{pour } t \in [n, n+1) \text{ et } n \in I,$$

où $\bar{\pi}(t)$ est la fonction polygonale associée à $\pi(n)$ et $\bar{\omega}(t)$ la polygonale associée à $\omega(n)$.

Mais $\pi(n)$, étant une suite presque-périodique, il résulte que sa polygonale $\bar{\pi}(t)$ est aussi une fonction presque-périodique [3].

D'autre part, évidemment, $\bar{\omega}(t)$ est une fonction continue et la relation

$$(11) \qquad \|\bar{\omega}(t)\| = \|\omega(n) + (t - n)[\omega(n+1) - \omega(n)]\| \leq \|\omega(n)\| + \|\omega(n+1)\| + \|\omega(n)\| < \varepsilon, \text{ pour } n > M,$$

prouve que $\|\bar{\omega}(t)\| \to 0$, pour $t \to +\infty$ (si $t \to +\infty$, il résulte aussi que $n \to +\infty$, d'où il résulte que $\|\omega(n)\| \to 0$ pour $n \to +\infty$).

A l'aide de la proposition 2 on peut démontrer le

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite φ soit a.p.p. est l'existence d'une fonction $g \in AP_\alpha^\infty(X)$ telle que $\varphi(n) = f(n)$ pour $n \in I$, où $f = F_{\alpha 0}(g)$.*

Démonstration. Le fait que la condition est nécessaire résulte immédiatement de la proposition 1, en prenant comme $g \in AP_0^\infty(X)$, la fonction polygonale $\bar{\varphi}(t)$, associée à $\varphi(n)$, qui évidemment coïncide avec $\varphi(n)$ pour $t = n$, $n \in I$.

Réciproquement, s'il existe $g \in AP_\alpha^\infty(X)$ avec la propriété donnée par le théorème 3, soit $f(t) = g(t + \alpha)$, f étant obtenue par l'application de $F_{\alpha 0}$ donnée par (8) à g; f est maintenant définie sur la demi-droite $t \geq 0$. Mais $f(t)$ est a.p.p., donc grâce à la propriété caractéristique IV, elle est asymptotiquement normale. Alors de chaque suite de nombres entiers $m_k \to +\infty$ on peut extraire une sous-suite m_k' telle que $\{f(t + m_k')\}_{k \in I}$ converge uniformément par rapport à t pour $t \geq 0$. D'autant plus $\{f(n + m_k')\}_{k \in I}$ est uniformément convergente par rapport à n pour $k \to +\infty$. Par conséquence, la suite $f(n)$ est asymptotiquement normale et, grâce à la propriété III', f est a.p.p.

Remarque. Si $g(t)$ est une fonction a.p.p. sur R_α, $g(t\delta)$ avec $\delta > 0$ est aussi une fonction a.p.p. sur $R_{\alpha/\delta}$, d'où conformément au théorème 3, $f(n\delta) = (F_{\alpha 0} \circ g)(n\delta)$ est une suite a.p.p. en même temps que $g(t)$ sur R_α.

Théorème 4. *Pour que la fonction f définie sur R_α soit a.p.p. il faut et il suffit que cette fonction soit uniformément continue sur R_α et qu'il existe une suite de nombres positifs $\{\delta_k\}_{k \in I}$ avec $\lim_{k \to \infty} \delta_k = 0$, telle que $\varphi_k(n) = f(n\delta_k)$ soit a.p.p. pour chaque $k = 1, 2, \ldots$*

Démonstration. La nécessité résulte de la propriété II des fonctions a.p.p. et de la remarque faite à l'occasion du théorème 3.

Réciproquement, si $f(t)$ est uniformément continue sur R_α, grâce à (8), nous pourrons supposer $f(t)$ définie sur R_0 ($t \geq 0$) et alors pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$(12) \qquad \|f(t') - f(t'')\| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour } |t' - t''| < \delta.$$

D'autre part, par hypothèse, il existe une suite δ_k de nombres positifs pour

laquelle $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$, telle que la suite $\varphi_k(n) = f(n\delta_k)$ soit a.p.p. pour chaque $k = 1, 2, \ldots$ Donc pour δ donné par l'uniforme continuité de f on peut fixer δ_k tel que $\delta_k < \delta$. Par hypothèse, la suite $\{f(n\delta_k)\}_{n\in I}$ avec ce k fixé est a.p.p. et donc on a

$$f(n\delta_k) = \varphi_k(n) = \pi_k(n) + \omega_k(n), \tag{13}$$

avec $\pi_k \in ap(X)$ et $\omega_k \in c_0(X)$, conformément à la propriété V'.

Mais, grâce au théorème 1 de [6], si $\pi_k \in ap(X)$, il existe une fonction $\pi(t)$ presque-périodique, telle que chaque $\frac{\varepsilon}{3}$-presque-période de $\pi_k(n)$ soit une ε-presque-période pour $\pi(t)$. Soit $\omega(t) = f(t) - \pi(t)$. Mais $f(t)$ et $\pi(t)$ sont uniformément continues, d'où il résulte que $\omega(t)$ est aussi uniformément continue pour $t \geqslant 0$ et de plus pour $t = n\delta_k$, $\omega(n\delta_k) = \omega_k(n)$.

Montrons ensuite que $\|\omega(t)\| \to 0$, pour $t \to +\infty$. On observe que pour chaque $t \geqslant 0$ il existe toujours deux entiers consécutifs, n, $n+1$, tels que :

$$n\,\delta_k \leqslant t < (n+1)\,\delta_k. \tag{14}$$

Or, d'autre part, en (13), $\omega(n\delta_k) = \omega_k(n) \to 0$, pour $n \to \infty$, c'est-à-dire, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe M tel que pour $n > M$, $\|\omega_k(n)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant (12), (14) et l'uniforme continuité pour $\omega(t)$, il résulte quand $t > M\delta_k$:

$$\|\omega(t) - \omega(n\delta_k)\| < \tfrac{\varepsilon}{2}, \text{ parce que } |t - n\delta_k| < \delta. \tag{15}$$

De (13) et (15), on a :

$$\|\omega(t)\| = \|\omega(t) - \omega(n\delta_k) + \omega(n\delta_k)\| \leqslant$$

$$\|\omega(t) - \omega(n\delta_k)\| + \|\omega(n\delta_k)\| < \varepsilon, \text{ pour } t > M\delta_k,$$

c'est-à-dire justement le fait que $\|\omega(t)\| \to 0$ pour $t \to +\infty$.

Ceci étant, le théorème est complètement démontré, parce que, grâce à la propriété V la fonction $f(t)$ est a.p.p.

§ 3. En ce qui suit, nous allons introduire les notions de fonction et suite faiblement-asymptotiquement presque-périodiques, abrégé f.a.p.p., en utilisant la même méthode qui a été utilisée par Amerio en [1] pour l'introduction de la notion de fonction faiblement presque-périodique et Gheorghiu en [5] pour la notion de suite faiblement presque-périodique.

Désignons par $C(R_\alpha; X_{lc})$ l'espace des fonctions continues définies sur R_α avec les valeurs dans un espace X, localement convexe, séparé, avec une famille dirigée et suffisante de semi-normes $\{p\}$.

Définition 5. *On dit qu'une fonction $f \in C(R_\alpha; X_{lc})$ est asymptotiquement presque-périodique si pour chaque semi-norme p et $\varepsilon > 0$ il existe $l > 0$ et*

$M > 0$, tels que chaque intervalle de la demi-droite R_α, de longueur l, contienne au moins un point τ, de façon à ce que

$$p(f(t+\tau) - f(t)) < \varepsilon, \text{ pour } t > M \text{ et } t + \tau > M. \tag{16}$$

Si dans la définition 5, la topologie localement convexe est une topologie faible W par rapport à une norme complète sur X, alors nous obtiendrons la définition des fonctions faiblement-asymptotiquement presque-périodiques.

En utilisant des démonstrations analogues à celles de Amerio [1] et Corduneanu [3], nous obtiendrons les propriétés suivantes des fonctions f.a.p.p.

1) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $f \in C(R_\alpha; X_w)$ soit f.a.p.p. est que pour chaque fonctionnelle linéaire et continue $\Phi \in X^*$, la fonction composée $\Phi \circ f$ soit une fonction numérique a.p.p. [3].

2) Si $f(t)$ est f.a.p.p. sur R_α, $f(t)$ est bornée au sens de la norme sur R_α, et la trajectoire H_f de la fonction f est séparable [1].

3) Si $\{f_n(t)\}_{n\in I}$ est une suite faiblement uniformément convergente de fonctions f.a.p.p. sur R_α vers $f(t)$, alors $f(t)$ est f.a.p.p. [1].

4) Si l'espace X est faiblement complet et f est une fonction faiblement continue sur R_α avec les valeurs en X, alors la condition nécessaire et suffisante pour que f soit f.a.p.p. est que f soit faiblement asymptotiquement normale [3].

5) La condition nécessaire et suffisante pour qu'une function $f: R_\alpha \to X$ soit a.p.p. est que f soit f.a.p.p. et la trajectoire H_f de f soit relativement compacte.

6) Si X est un espace de Banach faiblement complet, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction faiblement continue $f: R_\alpha \to X_w$ soit f.a.p.p. est que cette fonction puisse être représentée uniquement sous la forme (3) où $p(t)$ est une fonction faiblement presque-périodique avec les valeurs en X et $\omega(t)$ est une fonction faiblement continue qui tend faiblement vers 0, pour $t \to +\infty$.

On peut donner aussi la définition suivante pour les suites f.a.p.p.

Définition 5. *On dit qu'une fonction $\varphi: I \to X$ est une suite faiblement-asymptotiquement presque-périodique si, quelle que soit $\Phi \in X^*$, $\Phi \circ \varphi$ est asymptotiquement presque-périodique au sens de la définition I'.*

En suivant les démonstrations données dans [5], les propriétés I'—VI' des suites a.p.p. et les deux théorèmes qui font la liaison entre les suites et fonctions a.p.p. données dans le § 2, peuvent être transposées sans aucune difficulté pour les fonctions et suites f.a.p.p.

BIBLIOGRAPHIE

1. Amerio Luigi — *Funzioni debolmente quasi-periodiche*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, XXX, 1960, p. 288–301.
2. Bertrandias Jean-Paul — *Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotiques d'ordre p*. Bull. Soc. Math. de France. Suppl. Mars 1966, Mémoire No. 5.
3. Corduneanu C. — *Almost periodic functions*. John Wiley, New York. (Sous presse)
4. Fan Ky — *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques d'une variable entière et leur application à l'étude de l'itération des transformations continues*. Math Zts. 48, 1942/1943, p. 685–711.
5. Gheorghiu N. — *Șiruri slab aproape-periodice*. An. șt. Univ. Iași, t. XIII, 1966, p. 283–285.
6. Gheorghiu N. et Costinescu A. — *Observations sur les fonctions et les suites presque-périodiques avec des valeurs dans un espace de Banach*. Rev. Roum. de Math. pures et appl., tome XI, No. 3, 1955, p. 341–344.
7. Grothendieck A. — *Espaces vectoriels topologiques*. Cours São Paulo, 1958.
8. Halanay A. — *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. Ed. tehnică, București, 1956.
9. Левитан Б. М. — *Почти периодические функции*. Москва, 1963

FUNCȚII ȘI ȘIRURI ASIMPTOTIC APROAPE-PERIODICE CU VALORI ÎNTR-UN SPAȚIU BANACH

Rezumat

Nota de față are drept scop prezentarea unor rezultate cu privire la funcțiile și șirurile asimptotic-aproape-periodice (prescurtat a.p.p.) cu valori într-un spațiu Banach X, stabilirea unor proprietăți de legătură între funcțiile și șirurile a.p.p. precum și introducerea noțiunilor de funcție și șir slab asimptotic-aproape-periodic (prescurtat f.a.p.p.). După o scurtă introducere, în care sînt indicate unele notații și noțiuni cu caracter general, Nota conține 3 paragrafe.

În § 1, după ce se face o scurtă trecere în revistă a principalelor proprietăți ale funcțiilor și șirurilor a.p.p. cu valori în X, se insistă mai mult asupra proprietăților topologice atît ale spațiului $AP^{\infty}(X)$ al funcțiilor a.p.p. cît și ale spațiului $ap^{\infty}(X)$ al șirurilor a.p.p.

În § 2 se demonstrează două teoreme care permit pe de o parte să se caracterizeze funcțiile a.p.p. cu ajutorul șirurilor a.p.p. iar pe de altă parte șirurile a.p.p. cu ajutorul funcțiilor a.p.p.

Ultimul paragraf e dedicat introducerii noțiunilor de funcție și șir f.a.p.p. cu principalele lor proprietăți.

FORMULAE FOR JACOBI POLYNOMIALS

BY

B. L. SHARMA

1. Introduction: This paper is in continuation to my previous papers [2, 3, 5, 6, 7]; in these papers the author has obtained some interesting generating functions of Jacobi polynomials. The object of this paper is to give new generating functions of Jacobi polynomials. The results obtained are believed to be new.

We require the following formulae [2], [5] and [8] in the investigation.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{m} P_{n+m}^{(\alpha-n,\,\beta-n)}(x)\, t^n = \tag{1.1}$$

$$= \left[1+\frac{1}{2}(x+1)t\right]^{\alpha}\left[1+\frac{1}{2}(x-1)t\right]^{\beta} P_m^{(\alpha,\beta)}\left[x+\frac{1}{2}(x^2-1)t\right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(m+n)!\,(\lambda)_n}{n!\,(\mu)_n} P_{m+n}^{(\alpha-m-n,\,\beta-m-n)}(x)\, t^n = (-\alpha-\beta)_m\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{m-\alpha}$$

$$F_2\left[m-\alpha-\beta,\ -\alpha,\ \lambda;\ -\alpha-\beta,\ \mu;\ \frac{2}{1+x},\ \frac{x-1}{2}t\right] \tag{1.2}$$

and

$$F_F\,[a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_2;\ c_1, c_2, c_3;\ x, y, z] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_{n+p}}{(c_1)_m\,(c_2)_n\,(c_3)_p\, m!\, n!\, p!}\, x^m y^n z^p, \tag{1.3}$$

$$F_G\,[a_1, a_1, a_1, b_1, b_2, b_3;\ c_1, c_2, c_2;\ x, y, z] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{m+n+p}\,(b_1)_m\,(b_2)_n\,(b_3)_p}{(c_1)_m\,(c_2)_{n+p}\, m!\, n!\, p!}\, x^m y^n z^p. \tag{1.4}$$