SUR L'EXIS ENCE ES SOLU ONS PÉRIODIQUES OUR DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

PAR

C. AVRAMESCU

Dans ce travail nous nous proposons d'étudier le problème de l'existence des solutions périodiques pour des équations intégrales du type de Hammerstein ou de Fredholm.

Le problème de l'existence des solutions périodiques pour des équations différentielles a été étudié par plusieurs auteurs, comme par exemple, I. Barbălat — A. Halanay [1], G. Villari [2], A. Lasota — Z. Opial [3]. Dans leurs notes on démontre l'existence des solution périodiques en appliquant le théorème du point fixe de Schauder pour un opérateur défini d'une manière convenable, dans l'espace des fonctions périodiques.

Dans le même ordre d'idées, dans le présent travail nous allons démontrer l'existence des solution périodiques en utilisant le principe du point fixe. Dans ce but, nous allons considérer l'opérateur de Hammerstein comme une superposition d'un opérateur de Fredholm et d'un opérateur de Niemytzki, en faisant actionner l'opérateur de Niemytzki de l'espace C_ω des fonctions périodiques à un autre espace D, et l'opérateur de Fredholm de l'espace D à C_ω. On trouve l'idée d'une telle décomposition de l'opérateur de Hammerstein chez C. Corduneanu [4]; cette idée constitue le développement de certaines idées, utilisées pour le cas des équations différentielles ordinaires par Massera et Schäffer [5]. Dans le même ordre d'idées, mentionnons les notes [6], [7], [8], [11].

1. Désignons par J le demi-axe réel positif $t \geqslant 0$.

Par C_c nous allons désigner l'espace des fonctions continues sur J à valeurs dans l'espace euclidien R^n, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de J. Comme on sait [12], C_c est un espace localement convexe, métrisable et complet, sa topologie pouvant être définie à

l'aide de la famille dénombrable de semi-normes,

$$|x|_n = \sup\{\|x(t)\| : 0 \leqslant t \leqslant n\},$$

où par $\|\cdot\|$ on désigne la norme de R^n.

Soit C l'espace de Banach des fonctions continues et bornées sur J à valeurs dans R^n, la norme étant définie par,

$$|x| = \sup\{\|x(t)\| : t \in J\},$$

et soit C_ω le sous-espace de C formé par les fonctions périodiques de période ω. (Remarquons que C_ω est en même temps un sous-espace de C_c, bien que C n'est pas.)

Soit $g(t)$ une fonction continue et strictement positive sur J; désignons par C_g l'espace des fonctions continues sur J à valeurs dans R^n, telles que pour tout $x \in C_g$, il existe un nombre positif A, dépendant de x, de façon qu'on ait,

$$\|x(t)\| \leqslant A\, g(t), \quad t \in J.$$

Si l'on prend dans C_g la norme,

$$|x|_g = \sup\{\|x(t)\|/g(t) ; \quad t \in J\},$$

alors C_g devient un espace de Banach. En particulier, si $g \equiv 1$, alors $C_g = C$.

Soit $K(t, s) = (k_{ij}(t, s))$ une matrice carrée du type $n \times n$ de fonctions continues sur $J \times J$. Nous allons supposer que $K(t, s)$ est périodique de période ω par rapport à t pour tout s fixé de J; c'est-à-dire, nous allons supposer que,

$$K(t + \omega, s) = K(t, s), \tag{1}$$

pour tous $t, s \in J$. Posons alors,

$$k(s) = \sup\{\|K(t, s)\| ; \quad t \in J\}.$$

2. Considérons l'opérateur,

$$Tx = \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)\, ds.$$

(Si l'on veut mettre en évidence la dépendance de la fonction Tx par rapport à t, alors on pose $Tx(t)$ au lieu de $(Tx)(t)$.)

La condition (1) assure que, si la fonction $Tx(t)$ est définie sur J, alors elle est une fonction périodique. D'ailleurs, on peut montrer aisément que cette condition est nécessaire pour que la fonction $Tx(t)$ soit périodique, pour toute fonction x appartenant à l'espace des fonctions intégrables au sens de Riemann sur tout compact de J. En effet, si on prend pour x le

vecteur ayant la composante d'ordre j égale à $\operatorname{sgn}\{k_{ij}(t + \omega, s) - k_{ij}(t, s)\}$, t étant fixé, et les autres nulles, alors, comme $Tx(t + \omega) - Tx(t) = 0$, on obtient,

$$k_{ij}(t + \omega) - k_{ij}(t) = 0.$$

Comme t, i, j sont arbitraires, on obtient ainsi la condition (1).

Précisons que dans ce travail nous allons considérer le symbole

$$\int_0^\infty x(t)\, dt \text{ au sens } \lim_{h \to \infty} \int_0^h x(t)\, dt = \int_0^\infty x(t)\, dt.$$

Nous sommes intéressés seulement par les solutions périodiques et continues. Dans ce but le lemme qui suit est fondamental.

Lemme 1. *Supposons que,*

$$M \overset{\text{def}}{=} \int_0^\infty k(t)\, g(t)\, dt < +\infty. \tag{2}$$

Alors,

1) *on a :*

$$TC_g \subset C. \tag{3}$$

2) *l'opérateur T est continu de C_g à C_ω*

3) *l'opérateur T est complètement continu de C_g à C_c.*

Démonstration. Si la condition (2) est remplie, alors il résulte que $TC_g \subset C_c$; compte tenu de la condition (1), on obtient ainsi l'inclusion (3). Parce que,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\leqslant \int_0^\infty k(s)\, \|x(s)\|\, ds = \int_0^\infty k(s) \frac{\|x(s)\|}{g(s)} \cdot g(s)\, ds \leqslant \\ &\leqslant \left\{ \int_0^\infty k(s)\, g(s)\, ds \right\} \cdot |x|_g, \end{aligned} \tag{4}$$

il en résulte que,

$$|Tx| \leqslant M\, |x|_g, \tag{5}$$

d'où il s'ensuit, compte tenu du fait que T est un opérateur linéaire, qu'il est continu de C_g à C_ω. A plus forte raison, T est continu de C_g à C_c.

L'inégalité (5) nous montre que l'image par T d'un ensemble borné de C_g est un ensemble de fonctions uniformément bornées sur J.

Si $y(t) = Tx(t)$ est une fonction appartenant à cette image, alors on a,

$$\|y(t_1) - y(t_2)\| \leqslant \int_0^c \|K(t_1, s) - K(t_2, s)\| \cdot \|x(s)\| \, ds +$$

(6)

$$+ 2\int_c^\infty k(t) \cdot \|x(t)\| \, dt,$$

où $c \in J$. Par hypothèse on a

$$\|x(t)\| \leqslant a\, g(t), \quad t \in J.$$

Étant donné un nombre positif ε, on peut prendre c suffisamment grand, tel que l'on ait,

$$\int_c^\infty k(t)\, g(t)\, dt < \frac{\varepsilon}{4a}. \tag{7}$$

La fonction $K(t, s)$ étant uniformément continue sur $[0, \omega] \times [0, c]$, on peut trouver un nombre positif δ, tel que pour tous $t_1, t_2 \in [0, \omega]$, avec $|t_1 - t_2| < \delta$, l'on ait,

$$\|K(t_1, s) - K(t_2, s)\| \leqslant \varepsilon / \left(2a \int_0^c g(t)\, dt\right). \tag{8}$$

De (6), (7) et (8) il s'ensuit

$$\|y(t_1) - y(t_2)\| < \varepsilon, \tag{9}$$

quels que soient $t_1, t_2 \in [0, \omega]$, avec $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon, \omega)$, ce qui nous montre que l'image d'un ensemble borné de C_ε est un ensemble de fonctions équicontinues sur tout compact de J. La dernière partie du lemme se trouve ainsi démontrée.

3. Soit $F(t; x)$ un opérateur défini dans C_ω à valeurs dans C_ε. Nous allons considérer l'équation intégrale,

$$x(t) = \int_0^\infty K(t, s)\, F(s; x)\, ds + f(t), \tag{E}$$

où $f \in C_\varepsilon$; en particulier, si $F(t; x) = f(t, x(t))$, où $f(t, x)$ est une fonction définie sur $J \times R^n$ à valeurs dans R^n, l'équation (E) dévient une équation intégrale de Hammerstein habituelle.

Posons,

$$S_r = \{x;\ x \in C_\omega,\ \|x\| \leqslant r\}.$$

Nous allons démontrer maintenant deux théorèmes d'existence des solutions périodiques de l'équation (E).

Théorème 1. *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *$K(t, s)$ satisfait à la condition* (2),

2) *$F(t; x)$ est un opérateur défini sur S_r à valeurs dans C_ε, tel que*

$$\|F(t; x) - F(t; y)\|_\varepsilon \leqslant L\, \|x - y\|, \tag{10}$$

quels que soient $x, y \in S_r$.

3) *$f \in C_\omega$.*

4) *on a*

$$LM < 1; \tag{11}$$

5) *si l'on pose $x_0(t) = \int_0^\infty K(t, s)\, F(s; 0)\, ds + f(t)$, alors on a l'inégalité,*

$$\|x_0\| \leqslant (1 - LM) \cdot r. \tag{12}$$

Dans ces conditions l'équation (E) *admet une solution unique dans C_ω.*

Théorème 2. *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *$f \in C_\omega$*

2) *$F(t; x)$ est un opérateur défini sur C_ω à valeurs dans C_ε, tel que,*

$$\|F(t; x)\| \leqslant G(t, \|x\|), \tag{13}$$

où $G(t, r)$ est une fonction définie et continue sur $J \times J$ croissante par rapport à r pour tout t fixé

3) *il existe un nombre positif r, tel que,*

$$\|f\| + \int_0^\infty k(s)\, G(s, r)\, ds \leqslant r, \tag{14}$$

4) *l'opérateur $F(t; x)$ est continu de S_r dans C_ε, où $g(t) = G(t, r)$, r étant le nombre qui satisfait à la condition* (14).

Dans ces conditions, l'équation (E) *admet au moins une solution dans C_ω.*

Remarque. L'inégalité (14) implique en même temps l'existence de l'intégrale qu'y intervient.

Pour la démonstration du théorème 1, nous allons appliquer le théorème de Banach pour l'opérateur,

$$Hx = f(t) + \int_0^\infty K(t, s) F(s; x)\, ds = f(t) + TF(s; x),$$

qui est défini sur $S_r \subset C_\omega$. On a alors, d'après (5) et (10),

$$|Hx - Hy| \leqslant M\, |F(s; x) - F(s; y)|_c \leqslant ML\, |x - y|,$$

ce qui montre, compte tenu de (11), que l'opérateur H est contractant sur S_r.

Parce que,

$$\|Hx\| \leqslant \|Hx - H0\| + \|H0\| \leqslant LM \cdot |x| + |x_0|,$$

il résulte, d'après (12), l'inclusion $HS_r \subset S_r$. Le théorème 1 se trouve ainsi démontré, car un point fixe pour H sera évidemment une solution pour l'équation (E).

Pour la démonstration du théorème, 2, nous allons appliquer le théorème de Schauder pour l'opérateur H, considéré sur $S_r \subset C_c$, r étant le nombre qui vérifie l'inégalité (14).

Comme F est un opérateur continu de C_ω à C_g, $(g(t)) = G(t,r))$, et T est continu de C_g à C_ω, il résulte que H est continu de C_ω à C_ω. L'inégalité (14) nous montre qu'on a $HS_r \subset S_r$. Enfin, l'inégalité (13) nous montre que l'image de S_r par l'opérateur F est un ensemble borné de C_g, d'où il résulte, compte tenu du fait que T est complètement continu de C_g à C_c, la compacité de l'ensemble HS_r. Donc, toutes les conditions exigées par le théorème de Schauder étant satisfaites, il en résulte que l'opérateur H admet au moins un point fixe, ce qui achève la démonstration.

Remarque. On peut supposer dans le théorème 1 que $F(t; x)$ est défini sur C_ω; alors on n'a pas besoin de la condition (12), car on peut choisir r suffisamment grand, tel que (12) soit remplie.

4. On peut se poser la question de trouver des classes de fonctions $G(t, r)$, telles que (14) soit remplie.

Supposons par exemple que,

$$G(t, r) = g(t)\, h(r), \tag{15}$$

où $g(t)$ et $h(t)$ sont des fonctions continues et positives sur J, $h(t)$ étant de plus croissante. Si (2) a lieu, (avec $g(t)$ donné par (15)), et si,

$$\limsup_{r \to \infty} h(r)/r < 1/M, \tag{16}$$

alors (14) est valable. En effet, l'inégalité (16) nous permet de choisir r

suffisamment grand, tel que l'on ait,

$$h(r)/r \leqslant 1/M - |f|/r \tag{17}$$

Supposons maintenant que,

$$G(t, r) = g(t)\, r + h(t). \tag{15'}$$

Alors (14) devient,

$$|f| + r \int_0^\infty k(t)\, g(t)\, dt + \int_0^\infty k(t)\, h(t)\, dt \leqslant r, \tag{18}$$

et donc (14) sera remplie si,

$$\int_0^\infty k(t)\, g(t)\, dt < 1, \tag{19}$$

car dans ce cas on peut choisir r, tel que,

$$r \geqslant \frac{|f| + \int_0^\infty k(t)\, h(t)\, dt}{1 - \int_0^\infty k(t)\, g(t)\, dt} \tag{20}$$

5. Nous allons donner maintenant, à titre d'exemple, une application pour le théorème 1.

Corollaire 1. *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *$k(t)$ satisfait à la condition,*

$$\int_0^\infty k(t)\, dt < +\infty; \tag{21}$$

2) *$F(t, x)$ est une fonction définie et continue dans $J \times R^n$ à valeurs dans R^n, telle que,*

$$\|F(t, x) - F(t, y)\| \leqslant L\, \|x - y\|, \quad F(t, 0) = 0, \tag{22}$$

quels que soient $x, y \in R^n$;

3) *$f \in C_\omega$;*

4) *on a,*

$$L\int_0^\infty k(t)\,dt < 1. \tag{23}$$

Dans ces conditions, l'équation

$$x(t) = \int_0^\infty K(t,s)\,F(s,x(s))\,ds + f(t),$$

admet une solution périodique unique.

Pour obtenir ce corollaire du théorème 1, il suffira de prendre $g(t) \equiv 1$ et $F(t;x) = F(t,x(t))$.

6. Nous allons considérer maintenant l'équation,

$$x(t) = \int_0^\infty K(t,s)\,x(s)\,ds + F(t;x), \tag{T}$$

où $F(t;x)$ a la même signification que dans le paragraphe 3.

Nous allons supposer que,

$$M_1 \overset{\text{déf}}{=} \int_0^\infty k(t)\,dt < 1, \tag{24}$$

ce qui nous assure l'inclusion,

$$TC \subset C_\omega. \tag{25}$$

Si l'on considère l'équation,

$$x(t) = \int_0^\infty K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t), \tag{T,f}$$

où $f \in C_\omega$, alors on peut montrer aisément que cette équation admet une solution unique dans C_ω. En effet, nous n'avons qu'à appliquer le théorème de Banach dans C_ω pour l'opérateur $x \to y$, où,

$$y = \int_0^\infty K(t,s)\,x(s)\,ds + f(t).$$

Désignons par Uf la solution unique de (T,f); on peut montrer alors que l'opérateur U est linéaire et continu de C_ω à C_ω. En effet, de l'équation (T, f) on déduit immédiatement,

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{1-M_1}\,\|f\|. \tag{26}$$

On peut démontrer alors le théorème suivant:

Théorème 3. *Admettons les hypothèses suivantes:*

1) *l'inégalité* (24) *a lieu;*

2) *$F(t;x)$ est un opérateur de C_ω à C_ω, tel que,*

$$\|F(t;x) - F(t;y)\| \leqslant L_1\,\|x-y\| \tag{27}$$

quels que soient $x, y \in C_\omega$.

Alors si,

$$L_1 + M_2 < 1, \tag{28}$$

il résulte que l'équation (T) *admet une solution unique dans C_ω.*

Pour la démonstration du théorème 3, on applique le théorème de Banach à l'opérateur $x = UF(t;y)$. Les conditions (26), (27), (28) nous montrent que cet opérateur est contractant dans C_ω.

Remarque. Si $F(t;x)$ est défini seulement sur S_r, alors la conclusion du théorème 3 reste valable si l'on suppose de plus que,

$$\|F(t;0)\| \leqslant r\,(1-(L_1+M_1)). \tag{29}$$

On peut prendre dans le théorème 3 pour $F(t;x)$,

$$F(t;x) = F(t,x(t)),$$

où $F(t,x)$ est une application de $J \times R^n$ à R^n, telle que,

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leqslant L_1\,\|x-y\|, \tag{30}$$

$$F(t+\omega,x) = F(t,x), \text{ pour tout } (t,x) \in J \times R^n. \tag{31}$$

Si l'on prend,

$$F(t;x) = \int_0^\infty H(t,s,x(s))\,ds + f(t), \tag{32}$$

où $f \in C_\omega$ et $H(t,s,x_s)$ est une application continue de $J \times J \times R^n$ à R^n, alors l'équation (T) devient,

$$x(t) = \int_0^\infty \{K(t,s)\,x(s) + H(t,s,x(s))\}\,ds + f(t). \tag{T,H}$$

Les conditions exigées pour l'opérateur F seront satisfaites si,

(33) $$H(t+\omega, s, x) = H(t, s, x) \text{ pour tout } (t, s, x) \in J \times J \times R^n,$$

(34) $$\| H(t, s, x) - H(t, s, y) \| \leqslant h(t, s) \cdot \| x - y \|,$$

(35) $$\int_0^\infty h(t, s)\, ds < 1 - M_1.$$

7. Il est aisé de voir que l'opérateur U, considéré de C_c à C_c, est complètement continu. Alors on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème 4. *Admettons les hypothèses suivantes :*
1) *l'inégalité* (24) *est remplie ;*
2) *l'opérateur* $F(t; x)$ *est continu de* C_ω *à* C_ω *et tel que,*

(36) $$\| F(t; x) \| \leqslant G(t, \| x \|),$$

où $G(t, r)$ *est une fonction continue dans* $J \times J$, *croissante par rapport à* r *pour tout* t *fixé ;*
3) *il existe un nombre positif* r, *tel que,*

(37) $$G(t, r) \leqslant r \cdot (1 - M_1).$$

Dans ces conditions l'équation (T) *admet au moins une solution dans* C_ω.

Pour la démonstration du théorème 4, on applique le théorème de Schauder à l'opérateur UF, sur l'ensemble S_r, considéré dans C_c.

Remarquons que (37) a lieu si, par exemple,

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{G(t, r)}{r} < 1 - M_1,$$

uniformément par rapport à $t \in J$.

Université de Craiova
Séminaire Mathématique

BIBLIOGAPHIE

1. Barbălat I., Halanay A. — *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non-linéaires*, Rev. Math. pures et appl., 3, (1958).
2. Villari G. — *Contributi allo studio dell'esistenza di soluzioni periodiche per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie*. Ann. Mat. pura ed appl. (IV), LXIX, (1965).
3. Lasota A., Opial Z. — *Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*. Ann. Pol. Math., XVI, (1964).
4. Corduneanu C. — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*. Ann. Mat. pura ed appl., 67, (1965).
5. Massera J. L., Schaffer J. J. — *Linear differential equations and functions spaces*. Academic Press, New York, 1966.

6. Corduneanu C. — *Some perturbation problems in the theory of integral equations*. Math. Syst. Theory, vol. 1, no. 2, (1967).
7. Petrovanu D. — *Equations Hammerstein intégrales et discrètes*. Ann. Math. pura ed appl., (IV), LXXIV, (1966).
8. Barbu V. — *Sur une équation intégrale non-linéaire* — An. Univ. A. I. Cuza, Iaşi, IX (1964).
9. Halanay A. — *Sur le comportement asymptotique des solutions d'une équation intégrale non-linéaire*. Rev. Roum. Math. pures et appl. 10, (1965) (en russe)
10. Bihari I. — *Notes on a nonlinear integral equation*. Studia Sci. Math. Hun., II, 1—2, (1967).
11. Avramescu C. — *Sur le comportement asymptotique des solutions de certaines équations fonctionnelles*, An.Univ. Timişoara (sous presse), (en roumain).
12. Bourbaki N. — *Topologie générale*. Hermann, Paris, 1949.

ASUPRA EXISTENŢEI SOLUŢIILOR PERIODICE PENTRU ECUAŢII INTEGRALE

Rezumat

În această Notă se demonstrează teoreme de existenţă şi teoreme de existenţă şi unicitate ale soluţiilor periodice, pentru ecuaţiile (E) şi (T), utilizînd metoda punctului fix.