ASUPRA COMPORTĂRII ASIMPTOTICE A SISTEMELOR FUNCȚIONAL DIFERENȚIALE

Rezumat

În acest articol se studiază comportarea asimptotică a soluțiilor sistemelor funcțional diferențiale, cu ajutorul unui principiu nou de comparație. Folosind aceste rezultate, se studiază relațiile asimptotice între soluțiile unui sistem neliniar funcțional diferențial perturbat și acelea ale sistemului diferențial neperturbat. Aceste rezultate le generalizează pe acelea ale lui Brauer și Wong [2]. Se studiază apoi conceptul de „varietate asimptotică a soluțiilor", motivat de lucrarea lui Toroshelidze [6]. În sfîrșit se aplică unul din rezultate la o ecuație (22) de ordinul al II-lea.

CONDITIONS DE NON-OSCILLATION POUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE DEUX ET TROIS

PAR

N. VORNICESCU

Comunication présentée à la session scientifique jubilaire „A. Myller", Jassy, 20—25 août 1970

On considère l'équation différentielle d'ordre n:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

où

$$F :]a, b[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}.$$

Nous supposerons que pour cette équation il existe une solution unique qui vérifie des conditions initiales arbitraires dans l'intervalle ouvert $]a, b[$ (fini ou infini).

On dit que l'équation (1) est oscillatoire dans l'intervalle $]a, b[$ s'il existe deux solutions y_1, y_2 de (1) $(y_1 \neq y_2)$, telles que $y_2 - y_1$ a n racines dans l'intervalle $]a, b[$. Au cas contraire on dit que l'équation (1) est non-oscillatoire.

Nous considérons dans la suite deux cas particuliers:

$$y'' = -f(x, y) - q(x)y', \tag{2}$$

$$y''' = -p_1(x)y - p_2(x)y' - p_3(x)y''. \tag{3}$$

L'idée de base de cette Note est de ramener les équations (2) et (3) à des équations linéaires du premier ordre non-homogènes et d'ici à des inéquations différentielles linéaires du premier ordre pour lesquelles il y a des conclusions de non-oscillation. Cette idée apparaît dans [1], étant appliquée à un système de deux équations differentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 1. *Soit l'équation* (2) *et la fonction* $p :]a, b[\to \mathbf{R}$ *telle que*:

$$f(x, u_2) - f(x, u_1) \leqslant p(x)(u_2 - u_1), \tag{4}$$

pour

$$(x, u_1),\ (x, u_2) \in]a, b[\times \mathbf{R} \text{ et } u_2 \leqslant u_1.$$

S'il existe une fonction $\varphi \in C^1\,]a, b[$ *telle que*

$$\varphi' + \varphi^2 + q\varphi + q \leqslant 0, \tag{5}$$

alors l'équation (2) *est non-oscillatoire dans l'intervalle* $]a, b[$.

Démonstration. Supposons que l'équation (2) est oscillatoire. Alors il existe deux solutions y_1, y_2 de (2), telles que $y_2 - y_1$ admet deux racines dans $]a, b[$. Soit $x_1 > x_2$, $x_1, x_2 \in]a, b[$ deux racines consécutives de $y_2 - y_1$; nous avons: $y_1'(x_1) \neq y_2'(x_1)$ et $y_1'(x_2) \neq y_2'(x_2)$. (Au cas contraire y_1 coïncide avec y_2).

Cas i) $y_2'(x_1) - y_1'(x_1) < 0$;

Cas ii) $y_2'(x_1) - y_1'(x_1) > 0$.

Dans le cas i), $y_2(x) - y_1(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[$ et $y_2'(x_2) - y_1'(x_2) > 0$.

Posons:

$$\eta = -(y_2' - y_1') + \varphi(y_2 - y_1). \tag{6}$$

Alors:

$$\eta(x_1) > 0 \quad \text{et} \quad \eta(x_2) < 0. \tag{7}$$

Il existe donc $x_0 \in]x_1, x_2[$ tel que:

$$\eta(x_0) = 0.$$

On note avec x_0 la première racine de η aprés x_1. Donc:

$$\eta(x) > 0 \quad \text{pour} \quad x \in [x_1, x_0[.$$

Parce que:

$$\begin{aligned}\eta' &= f(x, y_2) - f(x, y_1) - (q + \varphi)\eta + (\varphi' + \varphi^2 + q\varphi)(y_2 - y_1) \geqslant \\ &\geqslant p(y_2 - y_1) - (q + \varphi)\eta + (\varphi' + \varphi^2 + q\varphi)(y_2 - y_1) = \\ &= -(q + \varphi)\eta + (\varphi' + \varphi^2 + q\varphi + p)(y_2 - y_1),\end{aligned}$$

il résulte que:

$$\eta' \geqslant -(q + \varphi)\eta \quad \text{pour } x \in [x_1, x_0[.$$

Si on divise par $\eta > 0$ et on intègre entre les limites x_1 et $x < x_0$ on obtient:

$$\eta(x_1) \leqslant \eta(x) \exp\left\{\int_{x_1}^{x} [q(t) + \varphi(t)]\, dt\right\}.$$

Si on passe à la limite pour $x \to x_0$ il résulte:

$$\eta(x_1) \leqslant 0,$$

ce qui est en contradiction avec (7).

Cas ii). D'une manière analogue à celle du cas i), il résulte qu'il existe $x_0' \in]x_1, x_2[$ tel que $\eta(x_0') = 0$, $\eta(x) > 0$ pour $x \in]x_0', x_2]$ et $\eta' \leqslant -(q + \varphi)\eta$. On obtient une contradiction qui démontre le théorème.

Remarque. Si $f(x, y) = p(x)y$, on trouve le résultat de A. Wintner [2], P. Hartman [3] sous la forme de l'existence d'une fonction $\varphi \in C^1]a, b[$ qui vérifie l'inégalité:

$$\varphi' + \varphi^2 + q\varphi + p \leqslant 0.$$

Théorème 2. *S'il y a des fonctions*

$$\varphi_i \in C^2]a, b[, \quad \psi_i \in C^1]a, b[, \quad (i = 1, 2) \text{ telles que}$$

$$\psi_i' + 2\varphi_i' + \psi_i^2 + \psi_i\varphi_i + \varphi_i^2 + p_3(\psi_i + \varphi_i) + p_2 \leqslant 0, \quad (i = 1, 2), \tag{8}$$

$$\varphi_1'' + p_3\varphi_1' + 3\varphi_1\varphi_1' + \varphi_1^3 + p_3\varphi_1^2 + p_2\varphi_1 + p_1 \geqslant 0, \tag{9}$$

$$\varphi_2'' + p_3\varphi_2' + 3\varphi_2\varphi_2' + \varphi_2^3 + p_3\varphi_2^2 + p_2\varphi_2 + p_1 \leqslant 0, \tag{10}$$

alors l'équation (3) *est non-oscillatoire.*

Démonstration. Supposons que l'équation (3) est oscillatoire. Alors, d'après le résultat de O. Aramă [4], il résulte qu'il existe une solution y, non-banale, de l'équation (3) pour laquelle il y a $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in]a, b[$, consécutives, telles que:

$$\text{cas i) } y(x_1) = y'(x_1) = 0,\ y(x_2) = 0, \tag{11}$$

$$\text{ou cas ii) } y(x_1) = 0,\ y(x_2) = y'(x_2). \tag{12}$$

Dans le cas i) on peut considérer que:

$$y''(x_1) < 0, \tag{13}$$

Alors

$$y'(x_2) \geqslant 0,\ y(x) < 0 \text{ pour } x \in]x_1, x_2[. \tag{14}$$

Soit

$$\eta = -y' + \varphi_2 y. \tag{15}$$

Il résulte que:

$$\eta' = -\varphi_2\eta - y'' + (\varphi_2' + \varphi_2^2)y, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}\eta'' = &-(\varphi_2 + p_3)\eta' - (2\varphi_2' + \varphi_2^2 + p_3\varphi_2 + p_2)\eta + \\ &+ (\varphi_2'' + 3\varphi_2\varphi_2' + p_3\varphi_2' + \varphi_2^3 + p_3\varphi_2^2 + p_2\varphi_2 + p_1)y,\end{aligned} \tag{17}$$

et

(18) $$\eta(x_1) = 0, \quad \eta'(x_1) > 0, \quad \eta(x_2) < 0.$$

Donc il existe $\alpha \in]x_1, x_2]$ tel que $\eta(\alpha) = 0$.

On note avec α, la racine de η la plus approchée de x_1. Il résulte que:

(19) $$\eta(x) > 0 \text{ pour } x \in]x_1, \alpha[,$$

et

(20) $$\eta'(\alpha) \leqslant 0.$$

Soit maintenant:

(21) $$\delta = \eta' - \psi_2 \eta.$$

Alors:

(22) $$\delta' = -(\psi_2 + \varphi_2 + p_3)\,\delta - [\psi_2' + 2\varphi_2' + \psi_2^2 + \varphi_2^2 + \varphi_2\psi_2 + p_3(\varphi_2 + \psi_2) + p_2]\eta + (\varphi_2'' + p_3\varphi_2' + 3\varphi_2\varphi_2' + \varphi_2^3 + p_1\varphi_2^2 + p_2\varphi_2 + p_1)y.$$

De (19) et (20) résulte que:

(23) $$\delta(x_1) > 0, \quad \delta(\alpha) \leqslant 0.$$

Donc il existe $\beta \in]x_1, \alpha]$, tel que $\delta(\beta) = 0$ et on note avec β la racine de δ la plus approchée de x_1. Cela signifie que

(24) $$\delta(x) > 0 \text{ pour } x \in [x_1, \beta[.$$

Il résulte de (8), (10), (14), et (19):

$$\delta' \geqslant -(\psi_2 + \varphi_2 + p_3)\delta \text{ pour } x \in [x_1, \beta[.$$

De là nous obtenons:

$$\delta(x_1) \leqslant \delta(x) \exp\left\{\int_{x_1}^{x} [\psi_2(t) + \varphi_2(t) + p_2(t)]dt\right\}.$$

Si $x \to \beta$, il résulte que:

$$\delta(x_1) \leqslant 0$$

ce qui est en contradiction avec (23).

Dans le cas ii) on peut considérer que

$$y''(x_2) < 0, \quad y(x) < 0 \text{ pour } x \in]x_1, x_2[\text{ et } y'(x_1) < 0.$$

D'une manière analogue à celle du cas i), en prenant φ_1 à la place de φ_2 dans (15), et ψ_1 à la place de ψ_2 dans (21) il résulte qu'il existe $\gamma \in [x_1, x_2[$ tel que $\delta(\gamma) = 0$, $\delta(x) > 0$ pour $x \in]\gamma, x_2[$ et

(25) $$\delta(x_2) > 0.$$

Alors:

$$\delta' \leqslant -(\psi_1 + \varphi_1 + p_3)\delta \text{ pour } x \in]\gamma, x_2].$$

D'où

$$\delta(x_2) \leqslant \delta(x) \exp\left\{-\int_{x}^{x_2} [\psi_1(t) + \varphi_1(t) + p_3(t)]dt\right\} \quad \text{pour} \quad x \in]\gamma, x_2].$$

Si $x \to \gamma$ il résulte que

$$\delta(x_2) \leqslant 0,$$

ce qui est en contradiction avec (2).

Remarque.. Hartman a démontré dans [3] un théorème général pour l'équation différentielle linéaire d'ordre n, qui pour l'équation (3) s'écrit sous la forme:

s'il y a des fonctions $\varphi_i \in C^2]a, b[$, $(i = 1, 2)$ de sorte que les conditions (9) et (10) sont vérifiées et $\varphi_1 < \varphi_2$, alors l'équation (3) est non-oscillatoire.

E. Lynn a démontré dans [5] que si pour l'équation (3) il existe une solution $u(x)$ de l'équation

(26) $$u'' = -3uu' - p_2u' - u^3 - p_3u^2 - p_2u - p_1$$

et une fonction r de sorte que

(27) $$r' + r^2 + (3u + p_3)r + (3u^2 + 3u' + 2p_3u + p_2) \leqslant 0$$

pour $x \in [a, b]$, alors l'équation (3) est non-oscillatoire dans $[a, b]$.

On voit immédiatement que (26) implique (9) et (10) avec $\varphi_1 = \varphi_2 = u$, et (27) implique (8) avec $\psi_1 = \psi_2 r + u$.

Institutul politehnic, Cluj
Catedra de matematică

BIBLIOGRAPHIE

1. Boltjanski — *Neoscillirujuscie optimal'nye systemy vtorogo porjadka.* Mat. zametki, 1, nr. 6 (1967), pp. 703–714.
2. Wintner A. — *On the existence of conjugate points.* Amer. Journ. of Math. 73 (1951) pp. 368–380.
3. Hartman P. — *Principal solutions of disconjugate n-th order linear differential equations.* Amer. Journ. of Math. 91 (1969) pp. 306–362.
4. Aramă O. — *Cercetări asupra distribuţiei rădăcinilor reale ale integralelor ecuaţiilor diferenţiale în legătură cu unele probleme polilocale.* Studii şi cercet. mat. Cluj, 11, nr. 2, (1960), pp. 241–259.
5. Lynn E. — *Disconjugacy conditions for the third order linear differential equation.* Canad. Math. Bull. 12, nr. 5 (1969) pp. 603–613.

CONDIŢII DE NEOSCILAŢIE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL DOI ŞI TREI

Rezumat

În lucrare se dau condiţii de neoscilaţie pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi neliniare de forma (2) şi pentru ecuaţiile de ordinul trei liniare. Demonstraţia se bazează pe reducerea acestor ecuaţii la inecuaţii diferenţiale de ordinul întîi liniare.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON-LINÉAIRES DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE MESURÉ

PAR

SENDER SOLOMON

On démontre un théorème de stabilité pour une équation intégrale considérée dans [3]. Puis on établit des liaisons entre cette équation et certains problèmes qui étendent, au cas des espaces topologiques mesurés, les équations pour les fonctions d'ensemble de A. Haimovici (voir par exemple [1], [2]) et on étend le théorème de stabilité à ces problèmes.

§ 1. **Notations.** X est un espace topologique avec une mesure positive μ telle que tout compact est μ-mesurable. Γ est la classe des parties relativement compactes et sommables de X. On donne une application $P: X \to \Gamma$ telle que $\lim_{y \to x} \mu(P_x \Delta P_y) = 0$ où Δ désigne la différence symétrique. Soit E un espace de Banach. $C(X; E)$ est l'espace des fonctions continues $X \to E$ muni de la topologie de la convergence compacte. $B_\omega(X; E)$ est l'espace de Banach des fonctions continues $u: X \to E$ telles que

$$|u|_\omega = \sup_{x \in X} \frac{|u(x)|}{\omega(x)} < \infty,$$

ω étant une fonction continue $X \to (0, \infty)$. Si $\omega = 1$ on obtient l'espace $B_1(X; E)$ des fonctions continues et bornées $X \to E$.

§ 2. L'équation que nous envisageons est

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy, \qquad dy = d\mu(y), \tag{1}$$

où f est une application continue $X \times X \times E \to E$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $$|f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z)| \leqq L |\bar{z} - z|,$$