CONDIŢII DE NEOSCILAŢIE PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL DOI ŞI TREI

Rezumat

În lucrare se dau condiţii de neoscilaţie pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul doi neliniare de forma (2) şi pentru ecuaţiile de ordinul trei liniare. Demonstraţia se bazează pe reducerea acestor ecuaţii la inecuaţii diferenţiale de ordinul întîi liniare.

SUR CERTAINES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON-LINÉAIRES DANS UN ESPACE TOPOLOGIQUE MESURÉ

PAR

SENDER SOLOMON

On démontre un théorème de stabilité pour une équation intégrale considérée dans [3]. Puis on établit des liaisons entre cette équation et certains problèmes qui étendent, au cas des espaces topologiques mesurés, les équations pour les fonctions d'ensemble de A. Haimovici (voir par exemple [1], [2]) et on étend le théorème de stabilité à ces problèmes.

§ 1. **Notations.** X est un espace topologique avec une mesure positive μ telle que tout compact est μ-mesurable. Γ est la classe des parties relativement compactes et sommables de X. On donne une application $P: X \to \Gamma$ telle que $\lim_{y \to x} \mu(P_x \Delta P_y) = 0$ où Δ désigne la différence symétrique. Soit E un espace de Banach. $C(X; E)$ est l'espace des fonctions continues $X \to E$ muni de la topologie de la convergence compacte. $B_\omega(X; E)$ est l'espace de Banach des fonctions continues $u: X \to E$ telles que

$$|u|_\omega = \sup_{x \in X} \frac{|u(x)|}{\omega(x)} < \infty,$$

ω étant une fonction continue $X \to (0, \infty)$. Si $\omega = 1$ on obtient l'espace $B_1(X; E)$ des fonctions continues et bornées $X \to E$.

§ 2. L'équation que nous envisageons est

$$u(x) = u_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, u(y))\, dy, \qquad dy = d\mu(y), \tag{1}$$

où f est une application continue $X \times X \times E \to E$ qui vérifie les conditions suivantes :

(i) $$|f(x, y, \bar{z}) - f(x, y, z)| \leqq L |\bar{z} - z|,$$

(ii) $|f(x,y,0)| \leqq a(y)$ où l'application $a: X \to R$ est sommable,

(iii) $u_0 \in C(X;E)$.

Un de nos résultats ([3], Prop. 5.4) peut être formulé de la manière suivante:

Théorème I. *Admettons qu'il existe un nombre $t > L$ tel que l'équation*

$$\omega(x) = 1 + t\int_{P_x} \omega(y)\,dy \tag{2}$$

ait une solution continue et positive $\omega: X \to R$.

Alors, si $u_0 \in B_\omega(X;E)$, l'équation (1) *a une solution et une seule dans $B_\omega(X;E)$. De plus cette solution est normale* (cela veut dire qu'elle s'obtient dans $C(X;E)$ par la méthode des approximations successives à partir de u_0).

On voit que le problème de l'unicité dans $C(X;E)$ de la solution de l'équation (1) est resté ouvert. Si X est un espace compact, alors toute solution continue et bornée est donc unique: $B_1(X;E) \subset B_\omega(X;E)$ puisque $\omega \geqq 1$. Plus généralement, l'unicité est assurée par la condition que l'application P soit *majorée* par une application $Q: X \to \Gamma$ *monotone*, c'est-à-dire:

(i) $P_x \subset Q_x, \ \forall x \in X,$

(ii) $Q_y \subset Q_x, \ \forall y \in Q_x, \ \forall x \in X.$

En effet, une solution continue, u, pour (1) est une solution bornée pour (1) sur Q_{x_0} pour chaque $x_0 \in X$ car si $x \in Q_{x_0}$, alors $P_x \subset Q_x \subset Q_{x_0}$. En même temps ω est une solution de l'équation (2) sur Q_{x_0}. D'après le Théorème I, la solution est unique sur chaque Q_{x_0}, donc sur chaque P_{x_0} et, en vérifiant l'équation (1), elle est unique sur X.

Après ces préliminaires voici le premier résultat:

Théorème II. *Soit l'application P majorée par l'application monotone $Q: X \to \Gamma$. Supposons que les conditions du théorème I soient remplies et que l'équation*

$$\tau(x) = 1 + L\int_{Q_x} \tau(y)\,dy \qquad \tau \in C(X;R) \tag{3}$$

admette la solution normale τ. Soit Sv la solution de l'équation (1) *pour $u_0 = v \in B_1(X;E)$.*

Alors S est une application continue de $B_1(X;E)$ dans $C(X;E)$.

Démontrons d'abord le

Lemme. *Supposons que l'équation*

$$\gamma(x) = \alpha(x) + L\int_{P_x} \gamma(y)\,dy \qquad (\gamma \text{ et } \alpha \text{ sont dans } C(X;R)) \tag{4}$$

admette la solution normale. Alors

$$\gamma(x) \leqq \bar{\alpha}(x)\,\tau(x), \quad \forall x \in X,$$

où $\bar{\alpha}(x) = \max\{0, \alpha(x), \sup_{y \in Q_x} \alpha(y)\}$.

Démonstration. Soit γ_n la suite des approximations successives pour l'équation (4), la première approximation étant α; soit τ_n la suite analogue pour l'équation (3), à partir de la constante 1. Nous vérifierons par induction l'inégalité $\gamma_n(x) \leqq \bar{\alpha}(x)\,\tau_n(x)$. Si $n = 1$ la relation est vraie comme suite de la définition de la fonction $\bar{\alpha}$; supposons que l'inégalité est vraie pour un certain n; alors

$$\sup_{y \in Q_x} \bar{\alpha}(y) = \sup_{y \in Q_x} \{0, \alpha(y), \sup_{z \in Q_y} \alpha(z)\} \leqq \sup_{y \in Q_x} \{0, \sup_{z \in Q_x} \alpha(z), \sup_{z \in Q_x} \alpha(z)\} \leqq \bar{\alpha}(x).$$

Donc, pour $y \in Q_x \supset P_x$

$$\gamma_n(y) \leqq \bar{\alpha}(y)\,\tau_n(y) \leqq \bar{\alpha}(x)\,\tau_n(y)$$

d'où

$$\gamma_{n+1}(x) = \alpha(x) + t\int_{P_x} \gamma_n(y)\,dy \leqq \bar{\alpha}(x) + t\int_{P_x} \bar{\alpha}(x)\,\tau_n(y)\,dy \leqq$$

$$\leqq \bar{\alpha}(x) + t\int_{Q_x} \bar{\alpha}(x)\,\tau_n(y)\,dy = \bar{\alpha}(x)\,\tau_{n+1}(x).$$

Il résulte que pour tout n, $\gamma_n(x) \leqq \bar{\alpha}(x)\,\tau_n(x)$ et en passant à la limite pour $n \to \infty$, on obtient la relation cherchée.

Démonstration du théorème. Soient:

$$(Sv_0)\,x = v_0(x) + \int_{P_x} f(x, y, (Sv_0)\,y)\,dy,$$

$$(Sv)\,x = v(x) + \int_{P_x} f(x, y, (Sv)\,y)\,dy.$$

On peut écrire

$$|(Sv)\,x - (Sv_0)\,x| \leqq |v(x) - v_0(x)| + L\int_{P_x} |(Sv)\,y - (Sv_0)\,y|\,dy.$$

Si $u \in B_\omega(X;E)$ et on définit $h(x) = \int_{P_x} |u(y)|\,dy$ alors $h \in B_\omega(X;R)$.

En effet, a) l'application h est continue :

$$|h(x)-h(x_0)| = \left|\int_{P_x} |u(y)|\,dy - \int_{P_{x_0}} u(y)|\,dy\right| =$$

$$= \left|\int_{P_x \cap P_{x_0}} |u(y)|\,dy + \int_{P_x - P_{x_0}} |u(y)|\,dy - \int_{P_{x_0} \cap P_x} |u(y)|\,dy - \int_{P_{x_0} - P_x} |u(y)|\,dy\right| \leqq$$

$$\leqq |u|_\omega \left[\int_{P_x - P_{x_0}} \omega(y)\,dy + \int_{P_{x_0} - P_x} \omega(y)\,dy\right] = |u|_\omega \left[\int_{P_x} \omega(y)\,dy - \int_{P_{x_0}} \omega(y)\,dy + \right.$$

$$\left. + 2\int_{P_{x_0} - P_x} \omega(y)\,dy\right] = |u|_\omega \left[\frac{\omega(x)-\omega(x_0)}{t} + 2\int_{P_{x_0} - P_x} \omega(y)\,dy\right],$$

b) l'application h/ω est bornée :

$$\int_{P_x} |u(y)|\,dy \leqq |u|_\omega \frac{\omega(x)-1}{t} \qquad (\omega(x) \geqq 1).$$

Sv et Sv_0 sont dans l'espace $B_\omega(X;E)$ par suite du théorème I ; de la remarque précédente il suit que l'application $x \to \int_{P_x} |(Sv)y - (Sv_0)y|\,dy$ ppartient à $B_\omega(X;R)$; il résulte l'existence d'une application positive $\in B_\omega(X;R)$, telle que

$$|(Sv)x - (Sv_0)x| = |v(x) - v_0(x)| - \beta(x) + L\int_{P_x} |(Sv)y - (Sv_0)y|\,dy.$$

D'après le théorème I, l'application $x \to |(Sv)x - (Sv_0)x|$ est la solution normale de l'équation (4) où $\alpha(x) = |v(x) - v_0(x)| - \beta(x)$. En appliquant le Lemme on trouve que

$$|(Sv)x - (Sv_0)x| \leqq \tau(x)\,|v - v_0|_1,$$

d'où il résulte la continuité de l'opérateur $S: B_1(X;E) \to C(X;E)$.

Remarque. Si $\lim_{y \to x} \mu(Q_x \Delta Q_y) = 0$, alors, d'après le théorème I, l'existence de la solution normale pour l'équation (3) est assurée s'il existe un nombre $s > L$ tel que l'équation

$$\tau(x) = 1 + s\int_{Q_x} \tau(y)\,dy$$

ait une solution continue et positive.

§ 3. On peut étendre ce résultat aux équations différentielles pour les fonctions d'ensemble introduites par A. Haimovici. Soit Φ l'espace des fonctions additives d'ensemble $\varphi: \Gamma \to E$ telles que l'application $X \to E$ de la forme $x \to \varphi(P_x)$ soit continue et, pour chaque ensemble $A \in \Gamma$,

$$|\varphi|_A = \sup_{\substack{B \in \Gamma \\ B \subset A}} |\varphi(B)| < \infty; \tag{5}$$

Φ est un espace localement convexe défini par la famille de semi-normes $|\cdot|_A$.

Soit Φ_1 l'espace de Banach des fonctions $\nu \in \Phi$ telles que

$$|\nu| = \sup_{A \in \Gamma} |\nu(A)| < \infty. \tag{6}$$

Nous disons que $\varphi'(x)$ est la dérivée de la fonction $\varphi: \Gamma \to E$ au point x si pour tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V_x de x tel que

$$\left|\frac{\varphi(A)}{\mu(A)} - \varphi'(x)\right| < \varepsilon \text{ pour tout } A \in \Gamma,\ A \subset V_x \text{ et } \mu(A) > 0. \tag{7}$$

(Nous supposons que de tels ensembles A existent pour chaque V_x et chaque $x \in X$.)

Soit f une application continue $X \times E \to E$. On considère le problème suivant : étant donné $\nu \in \Phi_1$, on cherche $\varphi \in \Phi$ telle que

$$(\varphi - \nu)'(x) = f(x, \varphi(P_x)), \tag{8}$$

$\varphi - \nu =$ *absolument continue.*

(Nous disons qu'une application $\varphi: \Gamma \to E$ est absolument continue si elle s'annule pour tout élément de mesure zéro de Γ.)

Le problème (8) est équivalent au suivant :

$$\varphi(A) = \nu(A) + \int_A f(y, \varphi(P_y))\,dy, \qquad (A \in \Gamma). \tag{9}$$

L'équivalence résulte de deux remarques simples :

Remarque 1. Pour toute fonction continue $g: X \to E$ on a

$$\left(\int_A g(y)\,dy\right)'(x) = g(x).$$

Remarque 2. Si la dérivée d'une fonction d'ensemble $\varphi: \Gamma \to E$, additive et absolument continue, est nulle alors la fonction φ est nulle.

Voici la démonstration de la dernière proposition. En supposant $\varphi'(x)=0$ pour tout $x\in X$ alors pour chaque nombre positif ε, il existe un voisinage V^ε de x tel que

$$\frac{|\varphi(B)|}{\mu(B)}<\varepsilon \text{ si } B\in\Gamma,\ B\subset V^\varepsilon \text{ et } \mu(B)>0. \tag{10}$$

Soit A un élément arbitraire de Γ et K un compact tel que $A\subset K$. Nous recouvrons K avec une famille finie de voisinages du type V^ε, $\{V_i : 1\leqq i\leqq p\}$. En étant un sous-espace compact, K est un sous-espace régulier; on peut alors supposer que les ensembles $V_i\cap K$ sont fermés dans K, donc compacts, donc mesurables. Les ensembles

$$A_1=A\cap V_1,\ A_2=A\cap(V_2-V_1),\ \dots,\ A_p=A\cap(V_p-\bigcup_{i=1}^{p-1}V_i)$$

sont sommables et constituent une partition de A. Si $\mu(A_i)>0$ alors l'inégalité (10) est vraie pour $B=A_i$; si $\mu(A_i)=0$ alors $\varphi(A_i)=0$. Il résulte que

$$|\varphi(A)|=|\sum_i\varphi(A_i)|\leqq\sum_i|\varphi(A_i)|\leqq\varepsilon\sum_i\mu(A_i)=\varepsilon\mu(A);$$

donc $\varphi(A)=0$. La proposition est démontrée.

D'après la remarque 1, toute solution du problème (9) est un solution du problème (8). Soit maintenant φ une solution du problème (8) et soit

$$\bar\varphi(A)=\nu(A)+\int_A f(y,\varphi(P_y))\,dy.$$

Alors $(\bar\varphi-\varphi)$ est absolument continue et $(\bar\varphi-\varphi)'(x)\equiv 0$ donc $\bar\varphi=\varphi$ est une solution du problème (9).

On peut démontrer maintenant aisément que les problèmes (8) et (9) sont équivalents, du point de vue de l'existence et de l'unicité de la solution, avec l'équation:

$$u(x)=v(x)+\int_{P_x}f(y,u(y))\,dy,\qquad (u\in C(X;E)) \tag{11}$$

où $v(x)=\nu(P_x)$.

En effet, si φ est une solution de (9) alors

$$\varphi(P_x)=\nu(P_x)+\int_{P_x}f(y,\varphi(P_y))\,dy,$$

c'est-à-dire $u(x)=\varphi(P_x)$ est une solution de (11). Si (11) a une solution u, soit alors

$$\varphi(A)=\nu(A)=\int_A f(y,u(y))\,dy.$$

Nous avons

$$\varphi(P_x)=\nu(P_x)+\int_{P_x}f(y,u(y))\,dy=v(x)+\int_{P_x}f(y,u(y))\,dy=u(x),$$

c'est-à-dire

$$\varphi(A)=\nu(A)+\int_A f(y,\varphi(P_y))\,dy,$$

donc φ est une solution de (9) ou (8).

Supposons que (11) a une seule solution et que (9) a deux solutions φ et ψ. Alors, $\varphi(P_x)=u(x)=\psi(P_x)$ donc:

$$\varphi(A)=\nu(A)+\int_A f(y,u(y))\,dy=\psi(A).$$

Supposons que (9) a une seule solution φ et que (11) a deux solutions u et w. Alors

$$\nu(A)+\int_A f(y,u(y))\,dy=\nu(A)+\int_A f(y,w(y))\,dy=\varphi(A)$$

donc $u(x)=w(x)=\varphi(P_x)$.

L'équivalence, dans le sens indiqué, est démontrée. Il résulte alors, dans les conditions du théorème II que le problème (8) ou (9) a une solution et une seule. De plus, l'application $T:\Phi_1\to\Phi$ de la forme $\nu\to\varphi$ est continue.

Démontrons la dernière proposition. Soit A un élément de Γ et $B\subset A$, $B\in\Gamma$. Alors

$$|(T\nu)(B)-(T\nu_0)(B)|=|\nu(B)-\nu_0(B)|+|\int_B f(y,(T\nu)(P_y))\,dy-$$

$$-\int_B f(y,(T\nu_0)(P_y)\,dy\,|\leqq|\nu-\nu_0|+L\int_B|(T\nu)(P_y)-(T\nu_0)(P_y)|\,dy.$$

Soient $v(x) = \nu(P_x)$, $v_0(x) = \nu_0(P_x)$ et K un compact de X tel que $A \subset K$. Alors

$$|T\nu - T\nu_0|_A \leqq |\nu - \nu_0| + L\mu(A)\,|Sv - Sv_0|_K.$$

Il reste à apliquer le théorème II.

BIBLIOGRAPHIE

1. Haimovici A. — *Sur une équation différentielle pour une fonction d'ensemble.* Revue Roum. Math. pures et appl., IX, no 3, 1964, p. 207–210.
2. Haimovici A. — *Équations différentielles linéaires pour des fonctions d'ensemble.* Ann. di Mat. Pura ed Appl., 73, 1966, p. 1–10.
3. Solomon S. — *Sur une généralisation de l'équation de Volterra.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, XV, f. 1, 1969, p. 71–82.

ASUPRA UNOR ECUAŢII INTEGRALE NELINIARE ÎNTR-UN SPAŢIU TOPOLOGIC CU MĂSURĂ

Rezumat

Se demonstrează o teoremă de stabilitate pentru o ecuaţie integrală considerată în [3]. Se stabilesc legături strînse dintre această ecuaţie şi nişte probleme pentru funcţii de mulţime care extind, la cazul unui spaţiu topologic cu măsură, ecuaţiile studiate de A. Haimovici în [1], [2]. Se extinde teorema de stabilitate la cazul acestor probleme.

ON THE H-FUNCTION OF TWO VARIABLES (II)

BY

R. U. VERMA

§ 1. **Introduction.** The H-function of Fox and special cases of it occur at various places in literature. The H-function of two variables defined by the author includes most of the known functions of two variables as particular cases. The G-function of two variables (1965), a particular case of it, has been frequently used by the author [3—13] in various papers.

Following Agarwal [1], we have defined (unpublished)

$$H^{n,\nu_1,\nu_2,m_1,m_2}_{p,[r:r'],s,[q:q']}\left[\begin{array}{c|l} & (\varepsilon_p, a_p) \\ x & (\gamma_r, r_r);\ (\gamma'_{r'}, r'_{r'}) \\ y & (\delta_s, d_s) \\ & (\beta_q, b_q);\ (\beta'_{q'}, b'_{q'}) \end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{-i\infty}^{+i\infty}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \Phi\{A(\xi+\eta)\} \times \Psi(B\xi, C\eta)\, x^{\xi} y^{\eta}\, d\xi\, d\eta, \tag{1.1}$$

where

$$\Phi\{A(\xi+\eta)\} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-\varepsilon_j+a_j\xi+a_j\eta)}{\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(\varepsilon_j-a_j\xi-a_j\eta)\prod_{j=1}^{s}\Gamma(\delta_j+d_j\xi+d_j\eta)},$$