FONCTIONS SPLINE D'APPROXIMATION POUR LES SOLUTIONS DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

PAR

GH. MICULA

Communication présentée à la session jubilaire „A. Myller", Jassy
20—25 août 1970

1. Introduction. Soit $[a, b] \subset R$ un intervalle de l'axe réel et notons avec $\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ une division de cet intervalle. Nous considérons l'opérateur différentiel linéaire.

$$L = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) D^{n-k}, \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k}$$

et son adjoint formel

$$L^* = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} D^{n-k} (a_k(x) \, .),$$

où les coefficients $a_i \in C^n[a, b]$, $a_0(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$, $i = \overline{0, n}$.

Définition. *On nomme fonction spline généralisée par rapport à l'opérateur différentiel L, sur la division Δ, une fonction S_Δ qui est soumise aux conditions suivantes :*

1. $$L^* L S_\Delta = 0, \quad x \in (x_{i-1}, x_i) \quad i = \overline{1, N},$$

2. $$S_\Delta \in C^{2n-2}[a, b].$$

L'étude détaillée des fonctions spline généralisées et leurs propriétés a été faite par plusieurs auteurs (v. [1]).

Un cas particulier important est celui de l'opérateur $L = D^n$. La fonction spline S_Δ est la solution de l'équation différentielle $D^{2n}S = 0$, donc $S_\Delta \in \pi_{2n-1}$, $x \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = \overline{1, N}$ où π_{2n-1} est l'espace linéaire des polynômes de degré $\leqslant 2n-1$. Une telle fonction spline est nommée fonction spline polynômiale et son expression analytique est

$$S_\Delta(x) = P_{2n-1}(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i (x - x_i)_+^{2n-1},$$

où $u_+ = u$ pour $u \geqslant 0$, et 0 pour $u < 0$.

Une fonction spline polynômiale de degré quelconque m sur la division Δ a l'expression suivante:

$$S_m(x) = P_m(x) + \sum_{i=1}^{N} c_i (x - x_i)_+^m.$$

Si le nombre des noeuds est zéro, alors la fonction spline se réduit à un polynôme de degré m, d'où il résulte que la fonction spline est une généralisation du polynôme.

2. La formulation du problème et la construction de l'approximante spline. Considérons le système non linéaire de n équations différentielles

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad i = \overline{1, n}, \tag{1}$$

où les fonctions $f_i : [0, B] \times R^n \to R$, $i = \overline{1, n}$ sont définies et continues dans ce domaine et satisfont à la condition de Lipschitz par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ c'est-à-dire il y a une constante A, telle que:

$$\begin{gathered} |f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, Y_1, \ldots, Y_n)| \leqslant A \sum_{j=1}^{n} |y_j - Y_j|, \\ (x, y_1, \ldots, y_n), \ (x, Y_1, \ldots, Y_n) \in [0, B] \times R^n; \ i = \overline{1, n}. \end{gathered} \tag{2}$$

Nous attachons au système (1) le problème de Cauchy

$$y_i(0) = y_{i,0} \quad i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Le problème de Cauchy (1), (3) a une solution unique; notons avec $[0, b]$ son intervalle d'existence.

Dans ce qui suit nous donnerons une méthode de construction d'une solution approximative du problème (1), (3) en utilisant les fonctions spline polynômiales et des théorèmes de point fixe.

La construction d'une approximante spline pour l'équation différentielle $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$ a été faite par R. F. Loscalzo et T. D. Talbot [4]. Nous avons donné dans [5] une extension de cette méthode pour des

systèmes de deux équations différentielles non linéaires. Nous construirons une solution spline approximative, globale pour des systèmes non linéaires de n équations différentielles, qui sont de degré $m \geqslant 2$, de classe $C^{m-1}[0, b]$,

Notons par $y_i = y_i(x)$, $i = \overline{1, n}$, $x \in [0, b]$, la solution exacte du problème (1), (3). Soit $q > m$ un nombre entier positif et $h = b/q$.

Nous approximerons la solution exacte $y_i(x)$ par une fonction spline polynômiale $S_i(x)$ de degré m, de classe $C^{m-1}[0, b]$, ayant les noeuds aux points $h, 2h, \ldots, (q-1)h$. Nous définissons la première composante de la fonction spline $S_i(x)$ sur l'intervalle $[0, h]$, de la façon suivante

$$S_i(x) = y_i(0) + y_i'(0)x + \ldots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} y_i^{(m-1)}(0) + \frac{x^m}{m!} a_i^0, \quad x \in [0, h], \ i = \overline{1, n}. \tag{4}$$

Les coefficients a_i^0 étant encore non déterminés, nous les déterminerons de façon que les fonctions S_i satisfassent au système (1) pour $x = h$, c'est-à-dire que

$$S_i'(h) = f_i(h, S_1(h), \ldots, S_n(h)), \quad i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Le système (5) détermine a_i^0 (comme on va le voir dans le théorème 1), donc les fonctions (4) étant complètement déterminées, nous répétons le même raisonnement dans l'intervalle $[h, 2h]$. Nous définissons la deuxième composante de la fonction spline S_i sur $[h, 2h]$ par:

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{S_i^{(j)}(h)}{j!} (x-h)^j + \frac{(x-h)^m}{m!} a_i^1, \quad h \leqslant x \leqslant 2h, \ i = \overline{1, n}.$$

Nous déterminons a_i^1 de façon que le système (1) soit satisfait par S_i pour $x = 2h$, c'est-à-dire:

$$S_i'(2h) = f_i(2h, S_1(2h), \ldots, S_n(2h)), \quad i = \overline{1, n}.$$

En continuant de la même manière sur chaque sous-intervalle $[kh, (k+1)h]$, $k = \overline{0, q-1}$, nous obtiendrons les fonctions spline S_i qui sont une approximation de la solution y_i du problème (1), (3) et qui satisfont aux égalités:

$$S_i'(kh) = f_i(kh, S_1(kh), \ldots, S_n(kh)), \quad i = \overline{1, n}, \ k = \overline{0, q}.$$

Théorème 1. *Si $h < m/nA$, où A est la constante de Lipschitz de (2), alors les fonctions spline S_i approximant la solution exacte y_i données par la construction ci-dessus existent et sont uniques.*

Démonstration. Considérons le sous-intervalle $[kh, (k+1)h] \subset [a, b]$, $k = \overline{0, q-1}$ où S_i a l'expression:

$$S_i(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{S_i^{(j)}(kh)}{j!} (x-kh)^j + \frac{(x-kh)^m}{m!} a_i^k = A_{k_i}(x) + \frac{(x-kh)^m}{m!} a_i^k, \ i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Nous devons démontrer qu'on peut déterminer de façon univoque a_i^k $(i=\overline{1,n})$ des conditions:

$$S_i'[(k+1)h] = f_i[(k+1)h, S_1((k+1)h),\dots, S_n((k+1)h)], \quad i=\overline{1,n}. \tag{7}$$

En remplaçant les expressions de S_i de (6) en (7) on obtient le système algébrique suivant pour a_i^k,

$$a_i^k = \frac{(m-1)!}{h^{m-1}}\left\{ f_i\left[(k+1)h, A_{k1}((k+1)h) + \frac{a_1^k}{m!}h^m,\dots, A_{kn}((k+1)h) + \frac{a_n^k}{m!}h^m\right] - A_{ki}((k+1)h)\right\}, \quad i=\overline{1,n}. \tag{8}$$

Notons de façon abrégée le système (8):

$$a_i^k = g_i(a_1^k, a_2^k,\dots, a_n^k), \quad i=\overline{1,n}. \tag{9}$$

Pour démontrer que le système (9) a une solution unique, notons avec G l'opérateur: $R^n \to R^n$ défini par

$$(a_1^k, a_2^k,\dots, a_n^k) \xrightarrow{G} (g_1(a_1^k,\dots, a_n^k), g_2(a_1^k,\dots, a_n^k),\dots, g_n(a_1^k,\dots, a_n^k)),$$
$$\forall\, (a_1^k, a_2^k,\dots, a_n^k) \in R^n.$$

Nous démontrerons que dans les conditions du théorème 1, l'opérateur G est de contraction et puisque R^n est un espace de Banach, il résultera l'existence et l'unicité de la solution $a_1^k, a_2^k,\dots, a_n^k$ du système algébrique (9).

Pour la commodité de la rédaction, nous noterons les points $(a_1^k, a_2^k,\dots, a_n^k)$ et $(a_1'^k,\dots, a_n'^k)$ par a, respectivement a'. Nous définissons la distance entre les éléments a et a' de R^n par

$$\rho(a, a') = \sum_{i=1}^{n} |a_i^k - a_i'^k|.$$

Alors

$$\rho(G(a), G(a')) = \sum_{i=1}^{n} |g_i(a) - g_i(a')|.$$

Calculons cette distance en tenant compte des expressions de g_i de (8) ainsi que des conditions (2). Nous obtenons

$$|g_i(a) - g_i(a')| =$$
$$= \frac{(m-1)!}{h^{m-1}}\left| f_i\left[(k+1)h, A_{k1}((k+1)h) + \frac{a_1^k}{m!}h^m,\dots, A_{kn}((k+1)h) + \frac{a_n^k}{m!}h^m\right] - \right.$$
$$\left. - f_i\left[(k+1)h, A_{k1}((k+1)h) + \frac{a_1'^k}{m!}h^m,\dots, A_{kn}((k+1)h) + \frac{a_n'^k}{m!}h^m\right]\right| \leqslant \frac{Ah}{m}\rho(a, a'),$$

c'est-à-dire

$$\rho(G(a), G(a')) \leqslant \frac{nAh}{m}\rho(a, a').$$

Donc si $nAh/m < 1$, $(h < m/nA)$, le système (9) a une solution unique et le théorème est démontré.

3. Relations de consistence pour les fonctions spline. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de fonctions spline de degré m, définies sur $[0, b]$ de classe $C^{m-1}[0, b]$ avec les noeuds $x_k = kh$, $k=\overline{0, q-1}$. Soit $s \in \mathcal{S}$. Sur l'intervalle $[0, (m-1)h]$, s a la forme

$$s(x) = P_m(x) + \sum_{k=1}^{m-2} C_k(x - x_k)_+^m,$$

donc s dépend linéairement de $2m-1$ paramètres. Les $2m$ quantités $s(kh)$, $s'(kh)$, $k=0,1,\dots,m-1$ ne sont pas linéairement indépendantes. On a le théorème suivant (I. J. Schoenberg, 1966 [4], p. 435).

Théorème 2. *Pour toute fonction spline $s \in \mathcal{S}$, il existe une seule relation linéaire entre $s(kh)$ et $s'(kh)$, $k=0,1,\dots,m-1$ donnée par*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} s(kh) = h\sum_{k=0}^{m-1} b_k^{(m)} s'(kh),$$

où

$$a_k^{(m)} = (m-1)!\,[Q_m(k) - Q_m(k+1)], \quad b_k^{(m)} = (m-1)!\,Q_{m+1}(k+1),$$

et

$$Q_{m+1}(x) = \frac{1}{m!}\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i C_{m+1}^i (x-i)_+^m,$$

qui est un B-spline.

Pour la démonstration de ce théorème voir [4], p. 435.

Nous donnons ci-dessous le tableau des coefficients des relations de consistence pour $m=2,3,4,5$ de [4], qui s'obtiennent directement du théorème 2.

m \ k	$a_k^{(m)}$ 0	1	2	3	4	$b_k^{(m)}$ 0	1	2	3	4
2	−1	1				1/2	1/2			
3	−1	0	1			1/3	4/3	1/3		
4	−1	−3	3	1		1/4	11/4	11/4	1/4	
5	−1	−10	0	10	1	1/5	26/5	66/5	26/5	1/5

Théorème 3. *Les valeurs $S_i(kh)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{0,q}$, obtenues dans la construction des approximantes spline du problème* (1), (3) *sont précisement les valeurs fournies par la méthode discrète des multipas donnée par les relations de récurrence :*

$$\sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} y_{i,j-m+1+k} = h \sum_{k=0}^{m-1} b_k^{(m)} y'_{i,j-m+1+k}, \quad j=\overline{m-1,q}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

si on emploie les valeurs initiales.

$$y_{i,0}=S_i(0),\ y_{i,1}=S_i(h),\dots,\ y_{i,m-2}=S_i[(m-2)h],\ i=\overline{1,n}. \tag{11}$$

Démonstration. Pour $h<m/nA$, une seule suite $\{y_{i,k}\}$, $k=\overline{m-1,q}$ satisfait aux relations (10) avec les conditions initiales (11). Mais la suite $\{S_i(kh)\}$ $k=\overline{m-1,q}$, satisfait aux relations (10), avec les conditions initiales (11). Donc $S_i(kh)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{m-1,q}$ doit coïncider avec les quantités $y_{i,k}$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{m-1,q}$, engendrée par la méthode correspondante des multipas.

Le théorème 3 nous fournit des solutions de la méthode discrète avec $m-1$ pas, par les relations (10).

Nous présenterons dans ce qui suit quelques cas importants pour certaines valeurs de m.

4. Fonctions spline du deuxième degré et la formule du trapèze. Nous appliquons le théorème 3 pour $m=3$. Nous trouverons la méthode des 1-pas qui est

$$y_{ik}-y_{i,k-1}=\frac{h}{2}[y'_{ik}+y'_{i,k-1}]=\frac{h}{2}[f_i(x_k,y_{1k},\dots,y_{nk})+f_i(x_{k-1},y_{1k-1},\dots,y_{nk-1})],$$

$$i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,q}.$$

C'est la formule du trapèze qui, selon le théorème 3, donnera la même solution discrète $S_i(kh)$, $i=\overline{1,n}$, $k=\overline{1,q}$ que la méthode du spline du deuxième degré. Étant donné qu'une fonction spline S de degré m n'a pas de derivée d'ordre m dans les noeuds x_k nous définirons la derivée de l'ordre m dans les noeuds $x_k=kh$, par la moyenne arithmétique habituelle:

$$S^{(m)}(x_k)=\frac{1}{2}\left[S^{(m)}\left(x_k-\frac{1}{2}h\right)+S^{(m)}\left(x_k+\frac{1}{2}h\right)\right], \quad k=1,2,\dots,q-1. \tag{12}$$

Nous étudierons la convergence des approximations spline S_i vers la solution exacte y_i quand $h\to 0$.

Nous noterons $y_{ik}=y_i(x_k)$ et analoguement pour $y'_i(x_k)$, $S_i(x_k)$, $S'_i(x_k)$.

Lemme 1. *Si $|S_i(x_k)-y_i(x_k)|<Kh^p$ et $S'_i(x_k)=f_i(x_k,S_1(x_k),\dots,S^n(x_k))$, $i=\overline{1,n}$, alors il existe une constante K_1, de façon que les relations*

$$|S_i(x_k)-y_i(x_k)|<K_1h^p,\ |S'_i(x_k)-y'_i(x_k)|<K_1h^p$$

soient valables.

Démonstration. En employant la condition de Lipschitz (2), nous avons

$$|S'_i(x_k)-y'_i(x_k)|=|f_i(x_k,S_1(x_k),\dots,S_n(x_k))-f_i(x_k,y_1(x_k),\dots,y_n(x_k)|\leqslant$$

$$\leqslant A\sum_{i=1}^{n}|S_i(x_k)-y_i(x_k)|\leqslant nAKh^p.$$

Alors

$$K_1=\max(K,nAK).$$

Lemme 2. *Soient $y_i\in C^{m+1}[0,b]$ et S_i, $i=\overline{1,n}$ les fonctions spline de degré m avec les noeuds x_k de façon que les conditions :*

$$|S_i^{(r)}(x_k)-y_i^{(r)}(x_k)|=O(h^{p_r}),\quad r=\overline{0,m-1},\ k=\overline{0,q-1}, \tag{13}$$

$$|S_i^{(m)}(x)-y_i^{(m)}(x)|=O(h),\quad x_k<x<x_{k+1},\ k=\overline{0,q-1}, \tag{14}$$

soient satisfaites.

Alors on a les relations suivantes :

$$|S_i(x)-y_i(x)|=O(h^p),\quad x\in[0,b], \tag{15}$$

où

$$p=\min_{r=\overline{0,m}}[r+p_r],\quad p_m=1, \tag{16}$$

et par conséquent

$$|S_i^{(m)}(x)-y_i^{(m)}(x)|=O(h),\ x\in[0,b]. \tag{17}$$

Démonstration. Soit $x_k < x < x_{k+1}$. Nous développons y_i et S_i d'après la formule de Taylor avec $t = x - x_k < h$:

$$y_i(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{t^r}{r!} y_i^{(r)}(x_k) + \frac{t^m}{m!} y_i^{(m)}(\xi), \tag{18}$$

$$S_i(x) = \sum_{r=0}^{m-1} \frac{t^r}{r!} S_i^{(r)}(x_k) + \frac{t^m}{m!} S_i^{(m)}(\xi), \quad x_k < \xi < x, \tag{19}$$

$S_i^{(m)}(x)$ sont constantes pour $x_k < x < x_{k+1}$.

En soustrayant (18) de (19) on obtient:

$$|S_i(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{r=0}^{m-1} \frac{h^r}{r!} |S_i^{(r)}(x_k) - y_i^{(r)}(x_k)| + \frac{h^m}{m!} |S_i^{(m)}(\xi) - y_i^{(m)}(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=0}^{m-1} \frac{h^r}{r!} O(h^{p_r}) + \frac{h^m}{m!} O(h) = O(h^p).$$

Ces inégalités ont lieu par suite des relations (13), (14), (16). Pour démontrer la relation (17), en vertu de (14), il suffit de la démontrer sur les noeuds $x_k, k = \overline{1, q-1}$. De (12) et (14) il résulte que:

$$S_i^{(m)}(x_k) = \frac{1}{2}\left[S_i^{(m)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) + S_i^{(m)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[y_i^{(m)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) + y_i^{(m)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right)\right] + O(h).$$

Mais puisque $y_i \in C^{m+1}[0, b]$, nous pouvons écrire:

$$y_i^{(m)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) = y_i^{(m)}(x_k) - \frac{h}{2} y_i^{(m+1)}(\xi_1), \quad x_k - \frac{h}{2} < \xi_1 < x_k,$$

$$y_i^{(m)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right) = y_i^{(m)}(x_k) + \frac{h}{2} y_i^{(m+1)}(\xi_2), \quad x_k < \xi_2 < x_k + \frac{h}{2}.$$

D'ici il résulte que

$$S_i^{(m)}(x_k) = \frac{1}{2}\, 2y_i^{(m)}(x_k) + O(h)$$

et le lemme est démontré.

Théorème 4. *Si $f_i \in C^2$ dans $[0, b] \times R^n$, alors il y a une constante K telle que pour tout $h < 2/nA$ et $x \in [0, b]$ les inégalités*

$$|S_i(x) - y_i(x)| < Kh^2, \; |S_i'(x) - y_i'(x)| < Kh^2, \; |S_i''(x) - y_i''(x)| < Kh, \; i = \overline{1, n},$$

aient lieu, à la condition que $S_i''(x)$ soient calculées d'après (12) pour $m = 2$.

Démonstration. D'après le théorème 3, les valeurs des fonctions spline du deuxième degré dans les noeuds sont les mêmes que les valeurs engendrées par la formule du trapèze, dont on sait qu'elle est une méthode discrète d'intégration approximative, du deuxième ordre (voir [2], pp. 199 et 248). Donc il y a une constante K_2 de façon que

$$|S_i(x_k) - y_i(x_k)| < K_2 h^2, \; i = \overline{1, n}.$$

Il résulte d'après le lemme 1, que:

$$|S_i'(x_k) - y_i'(x_k)| < Kh^2, \; i = \overline{1, n}.$$

Alors les inégalités (13) sont satisfaites pour $m = 2$, $p_0 = p_1 = 2$. D'après la formule de Taylor, on a

$$S_i'(x_{k+1}) = S_i'(x_k) + hS_i''(x), \; x \in (x_k, x_{k+1}),$$

$$y_i'(x_{k+1}) = y_i'(x_k) + hy_i''(\xi), \; \xi \in (x_k, x_{k+1}) \quad i = \overline{1, n}.$$

En soustrayant on trouve:

$$h|S_i''(x) - y_i''(\xi)| \leqslant |S_i'(x_k) - y_i'(x_k)| + |S_i'(x_{k+1}) - y_i'(x_{k+1})| \leqslant K_1 h^2,$$

en vertu du lemme 1.

Il résulte de là que:

$$S_i''(x) = y_i''(\xi) + O(h), \quad i = \overline{1, n}.$$

Mais étant donné $|x - \xi| < h$, on peut écrire:

$$S_i''(x) = y_i''(x) + O(h), \; x \in (x_k, x_{k+1}), \; k = \overline{0, q-1}.$$

Par conséquent l'hypothèse (14) du lemme 2 est vérifiée. En appliquant le lemme 2 pour S_i il résulte que

$$|S_i(x) - y_i(x)| < Kh^2, \quad x \in [0, b].$$

En appliquant le lemme 2 pour $S_i'(x)$ à la place de $S_i(x)$, il résulte que

$$|S_i'(x) - y_i'(x)| < Kh^2, \; x \in [0, b], \quad i = \overline{1, n}.$$

Les relations $|S_i''(x) - y_i''(x)| < Kh$ résultent des conditions (17) du lemme 2 vu que si $f_i \in C^2$ dans $[0, b] \times R^n$, il résulte que $y_i \in C^3[0, b]$, $i = \overline{1, n}$.

5. Fonctions spline cubiques et la formule de Simpson. Si $m=3$, du tableau on déduit les relations de récurrence

$$y_{ik}-y_{i,k-2}=\frac{h}{3}[y'_{i,k-2}+4y'_{i,k-1}+y'_{ik}]=\frac{h}{3}[f_i(x_{k-2},y_1(x_{k-2}),\dots,y_n(x_{k-2}))+$$

$$+4f_i(x_{k-1},y_1(x_{k-1}),\dots,y_n(x_{k-1}))+f_i(x_k,y_1(x_k),\dots,y_n(x_k))],\quad i=\overline{1,n},\quad k=\overline{2,q},$$

Ces relations sont identiques à la formule de quadrature de Simpson.

Sur la base du théorème 3, la formule de Simpson fournira la solution discrète $S_i(kh)$, $k=\overline{0,q}$, $i=\overline{1,n}$, la même que les fonctions spline cubiques, en prenant comme valeurs initiales $y_{i,0}$ et $y_{i,1}=S_i(h)$, $i=\overline{1,n}$.

La méthode basée sur la formule de Simpson a l'ordre d'exactitude 4 à la condition que les valeurs initiales aient l'ordre d'exactitude 4 (voir [2], p. 248).

Nous évaluerons l'erreur pour les valeurs initiales.

Lemme 3. *Soit $m=3$. Alors il y a une constante K_3 telle que*

$$|S_i(h)-y_i(h)|<K_3h^4,\quad i=\overline{1,n}.$$

Démonstration. Considérons les expressions.

$$S_i(h)=y_{i0}+hy'_{i0}+\frac{h^2}{2}y''_{i0}+\frac{h^3}{6}a\ ,$$

$$y_i(h)=y_{i0}+hy'_{i0}+\frac{h^2}{2}y''_{i0}+\frac{h^3}{6}y'''_{i0}+\frac{h^4}{24}y^{(4)}(\xi),\quad 0<\xi<h,\ i=\overline{1,n}.$$

En soustrayant ces relations on obtient:

$$|S_i(h)-y_i(h)|=\frac{h^3}{6}|(a_i^0-y'''_{i0})-\frac{h}{4}y_i^{(4)}(\xi)|,\quad i=\overline{1,n}. \tag{20}$$

La démonstration du lemme s'est réduite à montrer que

$$|a_i^0-y'''_{i0}|=O(h).$$

Nous démontrerons d'abord que les a_i^0 sont uniformément bornées comme fonctions de h. En écrivant le système (5) ou (8) $a_i^0=g_i(a_1^0,\dots,a_n^0)$ $i=\overline{1,n}$, pour $m=3$ nous obtenons

$$\begin{aligned}a_i^0=\frac{2}{h^2}\Big[f_i\Big(h,y_{10}+hy'_{10}+\frac{h^2}{2}y''_{10}+\frac{h^3}{6}a_1^0,\dots,y_{n0}+hy'_{n0}+\\+\frac{h^2}{2}y''_{n0}+\frac{h^3}{6}a_n^0\Big)-y'_{i0}-hy''_{i0}\Big],\quad i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{21}$$

L'opérateur $G:R^n\to R^n$ défini dans la démonstration du théorème 1 est de contraction si $h<3/nA$. Puisque

$$\rho(G(a),G(a'))\leqslant\frac{nAh}{3}\rho(a,a'),$$

pour $h<1/nA$, nous avons $\rho(G(a),G(a'))<\frac{1}{3}\rho(a,a')$. D'ici on obtient

$$\rho(G(a_1^0,a_2^0,\dots,a_n^0),G(0,0,\dots 0))<\frac{1}{3}\rho((a_1^0,a_2^0,\dots,a_n^0),(0,0,\dots,0)),$$

ou

$$\sum_{i=1}^n|g_i(a_1^0,\dots,a_n^0)-g_i(0,\dots,0)|<\frac{1}{3}\sum_{i=1}^n|a_i^0|.$$

Mais $g_i(a_1^0,\dots,a_n^0)=a_i^0$ et la relation antérieure devient

$$\sum_{i=1}^n|a_i^0-g_i(0,\dots,0)|<\frac{1}{3}\sum_{i=1}^n|a_i^0|.$$

Nous pouvons écrire alors

$$\sum_{i=1}^n|a_i^0|-\sum_{i=1}^n|g_i(0,\dots,0)|<\sum_{i=1}^n|a_i^0-g_i(0,\dots,0)|<\frac{1}{3}\sum_{i=1}^n|a_i^0|,$$

d'où il résulte que

$$\frac{2}{3}\sum_{i=1}^n|a_i^0|<\sum_{i=1}^n|g_i(0,\dots,0)|,\ \text{ou}\quad \sum_{i=1}^n|a_i^0|<\frac{3}{2}\sum_{i=1}^n|g_i(0,\dots,0)|.$$

Il est évident que nous avons

$$y_i(h)=y_{i0}+hy'_{i0}+\frac{h^2}{2}y''_{i0}+O(h^3),\ i=\overline{1,n}.$$

Il résulte de (21) que

$$g_i(0,0,\dots,0)=\frac{2}{h^2}\Big[f_i\Big(h,y_{10}+hy'_{10}+\frac{h^2}{2}y''_{10},\dots,y_{n0}+hy'_{n0}+\frac{h^2}{2}y''_{n0}\Big)-$$

$$-y'_{i0}-hy''_{i0}\Big],\quad i=\overline{1,n}.$$

D'ici il résulte que

$$g_i(0,\dots,0)=\frac{2}{h^2}[f_i(h,y_1(h)+O(h^3),\dots,y_n(h)+O(h^3))-y'_{i0}-hy''_{i0}]=$$

$$=\frac{2}{h^2}[y'_i(h)+O(h^3)-y'_{i0}-hy''_{i0}]=$$

$$=\frac{2}{h^2}[y'_{i0}+hy''_{i0}+O(h^2)-y'_{i0}-hy''_{i0}]<M.$$

Il résulte alors que:

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i^0|<\frac{3nM}{2}\quad\text{pour tout } h<\frac{1}{nA}.$$

D'une manière analogue on démontre que $\sum_{i=1}^{n}|a_i^0|$ est uniformément bornée pour tout $h<3/nA$, donc les a_i^0 sont uniformément bornées comme fonctions de h pour $i=\overline{1,n}$.

Les relations (20) nous donnent:

$$|S_i(h)-y_i(h)|=O(h^3),\quad i=\overline{1,n}.$$

En employant le lemme 1 pour $p=3$, on obtient:

$$S'_i(h)=y'_i(h)+O(h^3)=y'_{i0}+hy''_{i0}+\frac{h^2}{2}y'''_{i0}+O(h^3).$$

Mais de la définition de S_i nous avons

$$S_i(x)=y_{i0}+y'_i(0)x+\frac{y''_i(0)}{2}x^2+\frac{a_i^0}{6}x^3,\quad x\in[0,h],\ i=\overline{1,n},$$

et par conséquent

$$S'_i(h)=y'_{i0}+hy''_{i0}+\frac{a_i^0}{2}h^2,\quad i=\overline{1,n}.$$

En comparant avec les relations ci-dessus nous obtenons

$$a_i^0\frac{h^2}{2}-\frac{h^2}{2}y'''_i(0)=O(h^3)\ \text{ou}\ a_i^0-y'''_i(0)=O(h),\quad i=\overline{1,n}.$$

En remplaçant ce résultat dans les relations (20) nous obtenons:

$$|S_i(h)-y_i(h)|=O(h^4),\quad i=\overline{1,n}.$$

et le lemme est démontré.

Corollaire. *Soit $m=3$. On a les relations,*

(22) $$S_i(x_k)=y(x_k)+O(h^4),\ S'_i(x_k)=y'_i(x_k)+O(h^4),\ i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,q}.$$

Démonstration. Étant donné que $S_i(h)=y_i(h)+O(h^4)$, $i=\overline{1,n}$, il résulte que les valeurs initiales $S_i(h)$ sont des approximantes de $y_i(h)$, $i=\overline{1,n}$ avec l'erreur $O(h^4)$. Mais alors on sait (voir [2] p. 248), que la méthode basée sur la formule de Simpson a l'ordre d'exactitude 4, et ainsi la première égalité de (22) est démontrée. L'autre égalité de (22) résulte par suite du lemme 1 en prenant $p=4$.

Lemme 4. (Loscalzo, Talbot [4] p. 442). *Soit $y(x)\in C^4[0,b]$ et soit x_k et $x_{k+1}=x_k+h$ dans $[0,b]$. Nous supposons que $P(x)$ est l'unique polynôme du troisième degré qui satisfait aux conditions d'interpolation de Hermite:*

(23) $$P(x_k)=y(x_k),\ P'(x_k)=y'(x_k),\ P(x_{k+1})=y(x_{k+1}),\ P'(x_{k+1})=y'(x_{k+1}).$$

Alors il y a une constante K telle que

$$|P'''(x_k)-y'''(x_k)|<Kh.$$

Démonstration. Soit le polynôme du troisième degré

(24) $$P(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,$$

qui réalise les égalités (23). Le coefficient d_k de x^3 est caractérisé par la relation.

$$d_k=[x_k,x_k,x_{k+1},x_{k+1};y],$$

c'est-à-dire il est égal à la différence divisée de la fonction $y(x)$ sur les noeuds x_k et x_{k+1} doubles. Mais on connaît la propriété générale de la différence divisée (voir [3])

$$[x_k,x_k,x_{k+1},x_{k+1};y]=\frac{y'''(\xi)}{3!},\quad x_k<\xi<x_{k+1}.$$

Donc $P'''(x)=y'''(\xi)$, étant donné que $P'''(x)$ est constant, $P'''(x_k)=y'''(\xi)$. Alors

$$|P'''(x_k)-y'''(x_k)|=|y'''(\xi)-y'''(x_k)|=|\xi-x||y^4(\eta)|<Kh,\ x_k<\eta<\xi,$$

et ainsi le lemme est démontré.

Théorème 5. *Si $f_i\in C^4$ dans $[0,b]\times R^n$, alors il y a une constante K de façon que pour tout $h<3/nA$ on a les inégalités:*

$$|S_i^{(j)}(x)-y_i^{(j)}(x)|<Kh^{4-j},\quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{0,3},$$

si $x\in[0,b]$, à la condition que $S^m(x_k)$ soient calculées selon la formule (12) pour $m=3$.

Démonstration. Nous notons les composantes de l'approximation spline sur l'intervalle $[x_k,x_{k+1}]$ par:

(25) $$S_i(x)=a_k+b_k(x-x_k)+c_k(x-x_k)^2+d_k(x-x_k)^3,\quad x_k<x<x_{k+1}.$$

Le coefficient d_k du polynôme (24) peut être trouvé effectivement en écrivant le système (23) dont on obtient :

$$d_k = \frac{1}{h^3}[2y_k + hy'_k - 2y_{k+1} + hy'_{k+1}].$$

Compte tenu des relations (22), le coefficient d_k de (24) peut être écrit sous la forme:

$$d_k = \frac{1}{h^3}[2S_i(x_k) + hS'_i(x_k) - 2S_i(x_{k+1}) + hS'_i(x_{k+1})] + O(h) = \frac{1}{6}P'''_3(x_k) + O(h),$$

où $P_3(x)$ est l'unique polynôme du troisième degré interpolant les données $y_k, y'_k, y_{k+1}, y'_{k+1}$, prises pour $y(x)$. Soit $x_k < x < x_{k+1}$. Nous avons $S'''_i(x) = 6d_k$ et le lemme 5 implique

$$S'''_i(x) = P'''_3(x_k) + O(h) = y'''(x_k) + O(h) = y'''(x) + (x_k - x)y^{(4)}(\xi) + O(h).$$

En supposant que $|x_k - x| < h$, nous obtenons:

$$S'''_i(x) = y'''(x) + O(h), \quad x_k < x < x_{k+1}, \quad k = \overline{0, q-1}.$$

Si à la place de la fonction $y(x)$ du lemme 4 nous prenons la fonction $y_i(x)$ alors on obtient la relation

$$S'''_i(x) = y'''_i(x) + O(h), \quad x_k < x < x_{k+1}, \quad k = \overline{0, q-1}. \tag{26}$$

Donc les relations (14) sont satisfaites pour $m = 3$.

Les fonctions S'''_i sont des fonctions en escalier constantes sur (x_k, x_{k+1}) Nous pouvons écrire:

$$y_i(x_{k+1}) = y_{ik} + hy'_{ik} + \frac{h^2}{2}y''_{ik} + \frac{h^3}{6}y'''_i(\xi), \quad x_k < \xi < x_{k+1},$$

$$S_i(x_{k+1}) = S_{ik} + hS'_{ik} + \frac{h^2}{2}S''_{ik} + \frac{h^3}{6}S'''_i(\xi).$$

En soustrayant ces relations nous obtenons.

$$|S_i(x_{k+1}) - y_i(x_{k+1})| = |S_{ik} - y_{ik} + h(S'_{ik} - y'_{ik}) + \frac{h^2}{2}(S''_{ik} - y''_{ik}) + \frac{h^3}{6}(S'''_i(\xi) - y'''_i(\xi))|.$$

Les relations (26) et (22) permettent de déduire que:

$$S''_i(x_k) - y''_i(x_k) = O(h^2), \quad i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, q}. \tag{28}$$

Il résulte de (22) et de (28) que les relations (13) du lemme 2 sont satisfaites pour $m = 3$ $p_0 = p_1 = 4$, et $p_2 = 2$. Nous mentionnons aussi que $f_i \in C^3$ dans $[0, b] \times R^n$ implique que $y_i \in C^1[0, b]$, $i = \overline{1, n}$.

En appliquant successivement le lemme 2, il résulte que

$$|S_i^{(j)}(x) - y_i^{(j)}(x)| < Kh^{4-j}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{0, 3}$$

et le théorème est démontré.

Remarques. 1. La méthode de construction de l'approximante spline pour la solution du problème (1), (3) indiquée dans cette Note présente un avantage sur les méthodes discrètes par ce qu'elle donne une approximante globale de la solution et de ses dérivées.

2. La grandeur du pas h peut être changée à chaque étape.

3. Les approximantes spline S_i construites sont identiques par l'interpolation Hermite sur les points respectifs.

6. La non-convergence de la méthode pour fonctions spline de degré supérieur à trois. Le problème se pose si les approximantes de type spline convergent vers la solution exacte du problème (1), (3), pour $m = 3$. Nous avons le résultat négatif suivant:

Théorème 6. *La solution approximative S_i, $i = \overline{1, n}$ est divergente si $h \to 0$, pour $m \geqslant 4$* (v. [4]).

Démonstration. Nous démontrerons que la méthode des multipas donnée par le théorème 3 est instable et donc divergente pour $m \geqslant 4$.

Nous notons avec $P(z)$ le polynôme associé à la méthode des multipas à savoir

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} z^k.$$

D'après le théorème de Dahlquist (voir [2], T 5.5. p. 218), la méthode des multipas discrète (10) est convergente seulement si les zéros du polynôme associé $P(z)$ ont le module qui ne dépasse l'unité, et celles avec le module égal à l'unité soient simples. En employant les expressions de $a_k^{(m)}$ données par le théorème 2 il résulte que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} z^k = \sum_{k=0}^{m-1} (m-1)![Q_m(k) - Q_m(k+1)]z^k =$$

$$= (z-1)(m-1)! \sum_{k=0}^{m-1} Q_m(k) z^{k-1} =$$

$$= (z-1)(m-1)![z^{m-2} + (2^{m-1} - m)z^{m-3} + \ldots + 1] = (z-1)P_1(z)(m-1)!$$

où nous avons noté par $P_1(z)$ le polynôme:

$$P_1(z) = z^{m-2} + (2^{m-1} - m)z^{m-3} + \ldots + 1.$$

La somme des zéros de $P_1(z)$ est

$$\sum_{k=2}^{m-1} z_k = m-2^{m-1}.$$

Il résulte d'ici que:

$$\sum_{k=2}^{m-1} |z_k| \geqslant \left|\sum_{k=2}^{m-1} z_k\right| = 2^{m-1}-m > m-1 \text{ pour } m \geqslant 4.$$

Nous notons avec $z_M = \max_k |z_k|$. Alors $(m-2)z_M > m-1$, d'où il résulte que

$$z_M > \frac{m-1}{m-2} > 1 \text{ pour } m \geqslant 4.$$

Il résulte d'ici que les approximantes spline S_i, $i=\overline{1,n}$, ne convergent pas vers la solution exacte pour $m \geqslant 4$, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ahlberg J. H., Nilsod E. N., Walsh J. L. — *The Theory of splines and their applications*, New York, Academic Press, 1967.
2. Henrici P. — *Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations*, John Willey, New York, 1962.
3. Ionescu D. V. — *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, Editura tehnică 1957.
4. Loscaizo F. R., and Talbot T. D. — *Spline functions approximations for solutions of ordinary differential equations*, SIAM J. Num. Anal. Vol. 4, nr. 3, 1967.
5. Micula Gh. — *Approximate Integration of Systems of Differential Equations by Spline Functions*. Studia Univ. Babeş-Bolyai fascicula 2, 1971.
6. Micula M. et Micula Gh. — *Sur la formule de quadrature de Tricomi*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie, Tom 12(60), nr. 2(1968). pp. 95–105.
7. Schechter E. — *Error Bounds in the Numerical integration of differential equations*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Cluj, Series Mathematica-Mechanica, Fasc. 1, 1970, pp. 47–53.
8. Schoenberg I. J. and Curry H. B. — *On Polya frequency functions and their limits*, J. Analyse Math., 17(1966), pp. 71–107.
9. Schoenberg I. J. — *On spline functions*. Tech. Summary Rep. 625, M. R. S., Univ., of Wisconsin, Madison, 1966.
10. Schoenberg I. J. — *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. 4, (1946), pp. 45–99. and pp. 112–141.

Faculté de Mathématique et Mécanique
Université de Cluj (Roumanie)

FUNCŢII SPLINE DE APROXIMARE PENTRU SOLUŢIILE SISTEMELOR DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

Rezumat

În [5] am studiat problema integrării aproximative a unui sistem neliniar de două ecuaţii diferenţiale cu ajutorul funcţiilor spline. În lucrarea prezentă se extinde metoda de construire a aproximantei spline pentru sisteme neliniare de n ecuaţii diferenţiale, utilizînd teoreme de punct fix. De asemenea se studiază convergenţa soluţiei spline aproximative către soluţia exactă.