Note ajoutée à la correction des épreuves. M. Virgil Căzănescu m'a communiqué la démonstration suivante du lemme 11:

$$(\mathbf{A}) \Rightarrow (B \to C),\ (B, B \to C) \Rightarrow (CB),\ (B \to C, B) \Rightarrow (C)\ (\mathbf{A}, B) \Rightarrow (C).$$

Le premier schéma est l'hypothèse, le deuxième est $\mathrm{Pon}_{\mathrm{II}}$, le troisième provient du deuxième par $\mathrm{Perm}_{\mathrm{III}}$, le dernier du premier et du troisième par $\mathrm{Ench}_{\mathrm{III}}$.

DESPRE MODUL PONENDO PONENS

Rezumat

În lucrare se demonstrează echivalenţa între cinci forme de modus ponens:

$$(A, A \to B) \Rightarrow (B) \qquad (\mathrm{Pon}_{\mathrm{II}})$$

$$((\mathbf{A}) \Rightarrow (B), (\mathbf{C}) \Rightarrow (B \to D)) \Longrightarrow ((\mathbf{A}, \mathbf{C} \Rightarrow (D)) \qquad (\mathrm{Pon}\ 1_{\mathrm{III}})$$

$$((\mathbf{A}) \Rightarrow (B)) \Longrightarrow ((\mathbf{A}, \mathrm{B} \to C) \Rightarrow (C)) \qquad (\mathrm{Pon}\ 2_{\mathrm{III}})$$

$$((\mathbf{A}) \Rightarrow (B \to C)) \Longrightarrow ((\mathbf{A}, B) \Rightarrow (C)) \qquad (\mathrm{Pon}\ 3_{\mathrm{III}})$$

$$((\mathbf{A}) \Rightarrow (B), (C, \mathbf{D}) \Rightarrow (E)) \Longrightarrow ((B \to C, \mathbf{A}, \mathbf{D}) \Rightarrow (E)) \qquad (\mathrm{Pon}\ 4_{\mathrm{III}})$$

ALGÈBRES DE LIE, NON-DISTRIBUTIVES

PAR

ION CREANGĂ

Communication présentée à la session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 26-31 octobre 1970

On sait qu'une algèbre de Lie est définie dans un espace linéaire, par une seconde loi de composition binaire, autre que l'addition, notée quelquefois par $x \circ y$, soumise aux axiomes:

$$(1) \qquad \begin{aligned} &1^\circ \qquad x \circ y = -(y \circ x), \\ &2^\circ \quad (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x + (z \circ x) \circ y = 0. \end{aligned}$$

D'habitude, à cause de l'axiome de la distributivité, que l'on suppose remplie tacitement, l'axiome 1° s'écrit sous la forme:

$$(1') \qquad x \circ x = 0,$$

c'est-à-dire quand:

$$3^\circ \qquad x \circ (y + z) = x \circ y + x \circ z.$$

Nous avons déjà signalé dans [1], des structures algébriques qui sont des espaces linéaires munis d'un produit satisfaisant aux axiomes 1° et 2°, sans l'axiome 3°; à ces structures nous avons donné le nom d'algèbres Lie, non-distributives.

Dans cette étude nous allons présenter quelques précisions.

Prenons l'espace linéaire R_n, à n dimensions, sur le corps $\mathcal{K}$, commutatif et de caractéristique zéro; nous considérons des applications du produit cartésien $R_n \times R_n \to R_n$, déterminées dans une base $\{e_i\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ de R_n, par l'expression:

$$(2)\quad z = x \circ y = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \alpha^{i}_{p_1 p_2, \dots, p_r : p_{r+1}, \dots, p_m} \xi^{p_1} \xi^{p_2} \dots \xi^{p_r} \cdot \eta^{p_{r+1}} \dots \eta^{p_m} \right\} e_i ,$$

où nous avons utilisé la notation des indices muets pour $i, j, p_1, p_2, \dots, p_m$ et nous avons séparé les indices concernant les coordonnées de l'x de ceux concernant les coordonnées de l'y par point et virgule et où nous avons exprimé les vecteurs x et y, par:

$$(3)\qquad x = \xi^i e_i ,\quad y = \eta^j e_j .$$

On constate immédiatement que:

$$(4)\qquad 0 \circ y = x \circ 0 = 0$$

et ensuite on voit que:

$$(5)\qquad y \circ x = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \alpha^{i}_{p_m, p_{m-1}, \dots, p_{r+1} : p_r, p_{r-1}, \dots, p_2, p_1} \xi^{p_1} \xi^{p_2} \dots \xi^{p_r} \cdot \eta^{p_{r+1}} \dots \eta^{p_m} \right\} e_i .$$

Si l'on veut que l'axiome 1° soit rempli, il faut:

$$(6)\qquad \alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r : p_{r+1}, \dots, p_m} = - \alpha^{i}_{p_m, p_{m-1}, \dots, p_{r+1} : p_r, p_{r-1}, \dots, p_1}$$

et alors (2) a la forme $(r \geqslant m - r)$:

$$(7)\qquad x \circ y = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \left[\alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r : p_{r+1}, \dots, p_m} \xi^{p_{m-r+1}} \dots \xi^{p_r} - \alpha^{i}_{p_{m-r+1}, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} \eta^{p_{m-r+1}} \dots \eta^{p_r} \right] \xi^{p_1} \dots \xi^{p_{m-r}} \cdot \eta^{p_{r+1}} \dots \eta^{p_m} \right\} e_i .$$

Pour que le deuxième axiome 2° de (1) soit rempli, il faut encore que l'on ait:

$$(8)\qquad \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \sum_{r'=1}^{m-1} \dots \sum_{r^{(r)}=1}^{m-1} \alpha^{i}_{p_1, p_2 \dots p_r ; p_{r+1} \dots p_m} \alpha^{p_1}_{p'_1 \dots p'_{r'} ; p'_{r'+1} \dots p'_m} \dots \right.$$
$$\dots \alpha^{p^r}_{p^{(r)}_1 \dots p^{(r)}_{r(r)} ; p^{(r)}_{r(r)+1} \dots p^{(r)}_m} \cdot S \left(\xi^{p'_1} \cdot \xi^{p'_2} \dots \xi^{p'_{r'}} \dots \xi^{p^{(r)}_1}, \xi^{p^{(r)}_2} \dots \xi^{p^{(r)}_{r(r)}} \dots \eta^{p'_{r+1}} \dots \right.$$
$$\left. \left. \dots \eta^{p'_m} \eta^{p^{(r)}_{r^2+1}} \dots \eta^{p^{(r)}_{m'}} \dots \eta^{p^{(r)}_{r(r)+1}} \dots \eta^{p^{(r)}_m} \cdot \zeta^{p_{r+1}} \cdot \zeta^{p_{r+2}} \dots \zeta^{p_m} \right) \right\} e_i = 0 ,$$

où l'on a mis le symbole S pour la somme de toutes les permutations cycliques des lettres ξ, η, ζ.

(7) et (8) donnent des algèbres de Lie dont les coordonnées d'un produit, dans une base, sont des polynômes de deux suites de variables précisément les coordonnées des vecteurs x et y.

On prend $y = -x$ et on trouve:

$$(9)\qquad F(x) = x \circ (-x) = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} (-1)^{m-r} \xi^{p_1} \xi^{p_2} \dots \xi^{p_r} \xi^{p_{r+1}} \dots \xi^{p_m} \right.$$
$$\left. (\alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} - (-1)^{2r-m} \alpha_{p_m, \dots, p_{m-r+1} ; p_{m-r}, p_{r-1}, \dots, p_1}) \right\} e_i$$

et de même:

$$(10)\qquad G(x) = (-x) \circ x = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \xi^{p_1} \xi^{p_2} \dots \xi^{p_r} \xi^{p_{r+1}} \dots \xi^{p_m} ((-1)^{r} \right.$$
$$\left. \alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} - (-1)^{m-r} \alpha^{i}_{p_m, \dots, p_{m-r+1} ; p_{m-r}, \dots, p_1}) \right\} e_i .$$

On constate que $F(x) = G(x)$ quand tous les coefficients, qui ont en bas un nombre impair d'indices, sont nuls et $F(x) = -G(x)$ si les coefficients d'un nombre pair d'indices sont nuls.

On peut introduire aussi les expressions:

$$(11)\qquad x \underset{F}{\circ} y = F(x - y) - F(x) + F(y) = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \beta^{i}_{p_1 p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^{t} \xi^{p_1} \dots \xi^{p_{m-t}} \eta^{p_{m-t+1}} \dots \eta^{p_m} \right\} e_i$$

et

$$(12)\qquad x \underset{G}{\circ} y = G(x - y) - G(x) + G(y) = \left\{ \sum_{m=2}^{s} \sum_{r=1}^{m-1} \gamma^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} \sum_{t=1}^{m-1} (-1)^{t} \xi^{p_1} \dots \xi^{p_{m-t}} \xi^{p_{m-t+1}} \dots \xi^{p_m} \right\} e_i$$

où l'on a noté:

$$(13)\qquad \beta^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} = (-1)^{m-r} \alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} - (-1)^{r} \alpha^{i}_{p_m, \dots, p_{r+1}, p_r, p_{r-1}, \dots, p_{m-r+1} ; p_{m-r}, p_{m-r-1}, \dots, p_1} ,$$

$$(14)\qquad \gamma^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} = (-1)^{r} \alpha^{i}_{p_1, p_2, \dots, p_r ; p_{r+1}, \dots, p_m} - (-1)^{m-r} \alpha^{i}_{p_m, p_{m-1}, \dots, p_{r+1}, p_r, \dots, p_{m-r+1} ; p_{m-r}, \dots, p_1} .$$

Dans le cas des coefficients avec un nombre pair d'indices d'en bas, nuls, nous avons: $x \underset{F}{\circ} y = x \underset{G}{\circ} y$ et dans l'autre cas: $F(-x) = G(x) = -F(x)$ et:

$$x \underset{F}{\circ} y + y \underset{F}{\circ} x = F(x-y) + F(y-x) = 0. \tag{15}$$

On peut trouver par cette voie les liaisons entre les structures $x \circ y$, $x \underset{F}{\circ} y$, $x \underset{G}{\circ} y$.

Inversement, si l'on donne un opérateur $F(x)$ dans l'espace linéaire R_n, soumis aux conditions:

$$F(0) = 0, \quad F(-x) = -F(x), \tag{16}$$

on peut dire que dans R_n s'est installée une algèbre, par l'expression:

$$x \underset{F}{\circ} y = F(x-y) - F(x) + F(y)$$

pour laquelle:

$$x \underset{F}{\circ} y = -y \underset{F}{\circ} x.$$

Si l'on veut que cette algèbre soit d'un type de structure Lie, il faut encore que $F(x)$ soit soumis à être une solution de l'équation fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} &F[(x-y) - F(x) + F(y) - z] - F[F(x-y) - F(x) + F(y)] + F(z) + \\ &+ F[F(y-z) - F(y) + F(z) - x] - F[F(y-z) - F(y) + F(z)] + \\ &+ F(x) + F[F(z-x) - F(z) + F(x) - y] - F[F(z-x) - F(z) + \\ &F(x)] + F(y) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Nous allons appliquer les considérations précédentes premièrement dans le cas d'un espace R_n où les coordonnées du produit sont des polynômes du troisième degré; nous avons désigné ces algèbres comme des algèbres du troisième degré [1]. Nous particularisons ensuite certains résultats pour les espaces à deux dimensions.

Nous avons déjà vu [1] que les expressions du produit dans une algèbre du troisième degré sont condensées en:

$$z = x \circ y = \{(\alpha^i_{p,q} + \alpha^i_{pr,q}\xi^r - \alpha^i_{qr,p}\eta^r)\,\xi^p\,\eta^q\}e_i \tag{18}$$

où nous supposons:

$$\alpha^i_{p,q} = -\alpha^i_{q,p} \text{ et } \alpha^i_{pr,q} = -\alpha^i_{q,rp}, \tag{19}$$

afin que (6) soit remplie, la première condition d'une algèbre Lie. Nous avons donné dans [1], les conditions qui assurent l'axiome 2° de Jacobi; elles sont exprimées par les relations (26)-(31) de la Note citée. Seulement on peut préciser que dans le cas où l'on a, de plus:

$$\alpha^i_{pr,q} = \alpha^i_{qr,p}, \tag{20}$$

les trois systèmes (26), (27), (28) restent les mêmes, mais les trois suivants se simplifient (il en reste deux relations), comme il suit

$$\begin{aligned} &\alpha^p_{l,m}\,\alpha^i_{pr,q}\,\alpha^r_{uw,v} = 0, \\ &\alpha^i_{pr,q}\,\alpha^r_{uw,v}\,\alpha^p_{kk,l} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Les équations exposées comportent quelques remarques:

1° Nous avons:

$$\alpha^i_{p,q}\,\alpha^p_{u,v} = 0, \tag{22}$$

$$\alpha^i_{pr,s}\,\alpha^p_{u,u} = 0, \tag{23}$$

$$\alpha^i_{pr,s}\,\alpha^p_{ql,s} - \alpha^i_{pl,s}\,\alpha^p_{rq,s} = 0, \tag{24}$$

$$\alpha^i_{ps,q}\,\alpha^p_{ls,r} - \alpha^i_{ps,r}\,\alpha^p_{qs,l} = 0. \tag{25}$$

2° On peut construire des solutions pour le problème considéré en résolvant seulement les systèmes:

$$\alpha^i_{p,q}\,\alpha^p_{u,v} + \alpha^i_{p,u}\,\alpha^p_{v,q} + \alpha^i_{p,v}\,\alpha^p_{q,u} = 0, \tag{26}$$

$$\alpha^i_{p,q}\,\alpha^p_{uw,v} + \alpha^i_{v,p}\,\alpha^p_{qw,u} + \alpha^p_{q,v}\,\alpha^i_{pw,u} = 0, \tag{27}$$

$$\alpha^i_{pr,q}\,\alpha^r_{u,v}\,\alpha^p_{l,m} = 0, \tag{28}$$

$$\alpha^i_{pr,q}\,\alpha^r_{uw,v} = 0. \tag{29}$$

3° Pour les algèbres données par (18), nous avons:

$$x \circ (-x) = F(x) = -(\alpha^i_{pr,q} + \alpha^i_{qr,p})\,\xi^p\,\xi^r\,\xi^q = -G(x) = -[(-x) \circ x] \tag{30}$$

et:

$$\begin{aligned} x \underset{F}{\circ} y = F(x-y) - F(x) + F(y) = (\alpha^i_{pr,q} + \alpha^i_{qr,p})\,[\xi^p\,\eta^q\,(\xi^r - \eta^r) + \\ + \xi^r\,\eta^p\,(\xi^q - \eta^q) + \xi^q\,\eta^r\,(\xi^p - \eta^p)]\,e_i. \end{aligned} \tag{31}$$

Dans les hypothèses:

$$\alpha^i_{p,q} = 0 \text{ et } \alpha^i_{pr,q} = \alpha^i_{qr,p}, \tag{32}$$

pour tous les indices, on a:

$$x \underset{F}{\circ} y = 6\,(x \circ y). \tag{33}$$

4° Dans le cas $n=2$ et $\alpha^i_{p,q}=0$, pour tous les indices i, p, q, des systèmes (26)—(29) il reste:

$$\alpha^i_{p1,q}\,\alpha^1_{nx,x}+\alpha^i_{p2,q}\,\alpha^2_{nx,x}=0, \tag{34}$$

qui se traduit par:

$$\begin{gathered}\frac{\alpha^1_{11,1}}{\alpha^1_{12,1}}=\frac{\alpha^1_{11,2}}{\alpha^1_{12,2}}=\frac{\alpha^1_{21,1}}{\alpha^1_{22,1}}=\frac{\alpha^1_{21,2}}{\alpha^1_{22,2}}=\frac{\alpha^2_{11,1}}{\alpha^2_{12,1}}=\frac{\alpha^2_{11,2}}{\alpha^2_{12,2}}=\frac{\alpha^2_{21,2}}{\alpha^2_{22,2}}=\frac{\alpha^2_{11,1}}{\alpha^1_{11,2}}=\\ -\frac{\alpha^2_{12,2}}{\alpha^1_{12,2}}=-\frac{\alpha^2_{21,1}}{\alpha^1_{21,1}}=-\frac{\alpha^2_{21,2}}{\alpha^1_{21,2}}=-\frac{\alpha^2_{11,2}}{\alpha^1_{11,2}}=-\frac{\alpha^2_{12,1}}{\alpha^1_{12,1}}=-\frac{\alpha^2_{22,1}}{\alpha^1_{22,1}}=-\frac{\alpha^2_{22,2}}{\alpha^1_{22,2}}.\end{gathered} \tag{35}$$

En notant avec h la valeur commune de ces rapports, nous obtenons:

$$\begin{gathered}x\circ y=[h(\xi^1-\eta^1)+\xi^2-\eta^2][\alpha^1_{12,1}\xi^1\eta^1+\alpha^1_{22,1}(\xi^2\eta^1+\xi^1\eta^2)+\\ +\alpha^1_{22,2}\xi^2\eta^2](e_1-he_2);\end{gathered} \tag{36}$$

en supposant $h\neq 0$ et puis en changeant la base par:

$$e_1-he_2=f_1;\ e_1+he_2=f_2,\ \xi'^1+\xi'^2=\xi^1;\ -h(\xi'^1-\xi'^2)=\xi^2, \tag{37}$$

on a:

$$\begin{gathered}x\circ y=-h(\xi'^2-\eta'^2)[\beta_{11}\xi'^1\eta'^1+\beta_{12}(\xi'^1\eta'^2+\xi'^2\eta'^1)+\\ +\beta_{22}\xi'^2\eta'^2]f_1,\end{gathered} \tag{38}$$

avec:

$$\begin{aligned}\beta_{11}&=\alpha^1_{12,1}-2h\,\alpha^1_{22,1}+h^2\alpha^1_{22,2},\\ \beta_{12}&=\alpha^1_{12,1}-h^2\alpha^1_{22,2},\\ \beta_{22}&=\alpha^1_{12,1}+2h\,\alpha^1_{22,1}+h^2\alpha^1_{22,2},\\ \alpha^1_{12,2}&=\alpha^1_{22,1}.\end{aligned} \tag{39}$$

5° Si l'on prend n fonctions de deux suites de n arguments, qui sont les coordonnées, respectivement des vecteurs x et y de R_n, dans une base $\{e_i\}$, à savoir $\psi^i(\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n;\eta^1,\eta^2,\dots,\eta^n)$, $i=1,2,\dots,n$, le vecteur:

$$z=x\circ y=\psi^i(\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n;\eta^1,\eta^2,\dots,\eta^n)\,e_i \tag{40}$$

représente un produit des vecteurs x et y; nous désignons $\psi^i(\xi^1,\xi^2,\dots,\xi^n;\eta^1,\eta^2,\dots,\eta^n)$ par $\psi^i(\xi,\eta)$. Quand les fonctions $\psi^i(\xi,\eta)$ satisfont aux équations fonctionnelles:

$$\psi^i(0;\eta)=0, \tag{41}$$

$$\psi^i(\xi;\eta)=-\psi^i(\eta;\xi) \tag{42}$$

et:

$$\begin{gathered}\psi^i(\psi^1(\xi;\eta),\dots,\psi^n(\xi;\eta);\zeta^1,\dots,\zeta^n)+\psi^i(\psi^1(\eta;\zeta),\dots,\psi^n(\eta;\zeta);\xi^1,\dots,\\ \dots,\xi^n)+\psi^i(\psi^1(\zeta;\xi),\dots,\psi^n(\zeta;\xi);\eta^1,\dots,\eta^n)=0\end{gathered} \tag{43}$$

où, comme d'habitude ξ,η,ζ représentent les coordonnées des vecteurs x,y,z, alors (40) donne le produit d'une algèbre Lie, en général non-distributive.

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Sur les algèbres du troisième degré.* An. şt. Univ. Iaşi Matematică t. XIV, f. 2 (1968), pp. 229–234.
2. Creangă I. — *Alcune considerazioni sulle algebre associative di terzo grado.* Atti del Convegno Internazionale di Geometria Differenziale (Bologna, 28–30.IX.1957).
3. Creangă I. — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire.* An. şt. Univ. Iaşi, s. I a Matematică, t. XI, f. 1 (1965), pp

ALGEBRE LIE NEDISTRIBUTIVE

Rezumat

În această Notă se tratează structuri algebrice peste un spaţiu vectorial în care se introduc produse interne, binare, care satisfac axiomele unei algebre Lie, cu excepţia axiomei distributivităţii. Se dau cîteva exemple şi metode pentru construirea unor asemenea structuri în spaţiile vectoriale cu un număr finit de dimensiuni.