

KONGRUENTE VERLAGERUNG PROJEKTIVER EBENEN IN GRENZLAGE

VON
LOTHAR PROFKE

Mitteilung an der A. Myller-Jubiläumstagung zu Jassy, 20-25 August 1960

Sei π eine reelle Projektivität einer projektiv abgeschlossenen euklidischen Ebene P^2 auf sich. Gesucht sind kongruente Transformationen β derart, dass durch das Hintereinanderausführen von β nach π eine Grenzprojektivität $\alpha = \beta \circ \pi$ entsteht, d. h. eine Projektivität mit genau einer Fixgeraden f und genau einem Fixpunkt F auf f .

Ein analoges Problem ist die Herstellung perspektiver Lage projektiver Felder, in dem man die kongruent transformierten (gleichstreckigen) Geraden punktweise zur Deckung bringt.

Einige Bezeichnungen (Abb. 1): ϵ sei das Feld der Originalpunkte, ϵ' das der Bildpunkte. I_1, I_2 seien die absoluten Kreispunkte in ϵ , J_1, J_2 die in ϵ' . Die Punkte $J_1^{\pi^{-1}}, J_2^{\pi^{-1}}, I_1, I_2$ heißen die Gegenpunkte und $B_1 = I_1 J_1, I_2 J_2, B_2 = I_1 J_2, I_2 J_1, B_1, B_2$ die Brennpunkte von π . Die Büschel entsprechender Geraden in B_i und B_i' sind zueinander kongruent. Denkt man sich ϵ und ϵ' von einander gelöst, müssen beide Ebenen so gegeneinander verschoben werden, dass das Fixgebilde aus einem Linienelement (F, f) besteht.

Hierzu gehen wir von einer Grenzprojektivität α aus und versuchen, die Lage von (F, f) metrisch zu charakterisieren. Dabei seien o. B. d. A. $I_1 = J_1'$ und $I_2 = J_2'$:

1. Sowohl die von α auf der Fixgeraden f induzierte Projektivität π_f , als auch die im Büschel um den Fixpunkt F induzierte Projektivität π_F sind parabolisch, d. h. sie haben genau ein Fixelement. Umgekehrt ist eine Projektivität mit dieser Eigenschaft eine Grenzprojektivität. Von diesem Satz lässt man sich leiten.

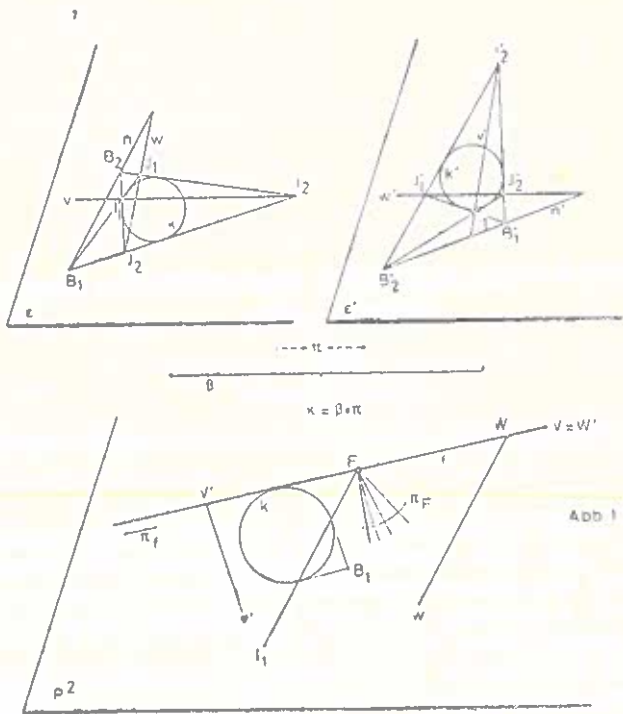


Abb 1

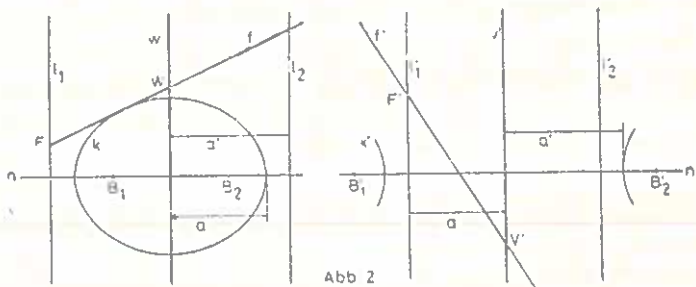


Abb 2

2. Ist $V = W'$ der Fernpunkt von f , so ist π_f genau dann parabolisch, wenn mit den Gegenpunkten V' und W gilt: $V'F = FW$. Dabei liegen V' und W auf dem Bild bzw. Urbild der Ferngeraden von P^2 , d. h. auf der Fluchtgeraden bzw. Verschwindungsgeraden von κ .

3. Wir betrachten den Kegelschnitt k mit den Brennpunkten B_1 und B_2 , welcher f berührt. k hat ausser f die isotropen Geraden durch B_1 und B_2 zu Tangenten und ist hierdurch eindeutig bestimmt. Man stellt fest, dass die Leitlinie l_1 von k , das ist die Polare von B_1 bezüglich k , durch den Fixpunkt F geht und umgekehrt: Ist (F, f) ein Fixlinienelement einer Projektivität π , k ein wie oben definierter Kegelschnitt, F ein Punkt der Leitlinie l_1 von k und schliesslich noch π_F gleichsinnig, so ist π_F auch parabolisch.

Der Beweis dieses Satzes ist besonders einfach, wenn man P^2 als isotrope Ebene mit dem absoluten Gebilde (F, f) deutet (vergl. K. Strubecker: *Geometrie in einer isotropen Ebene*, z. B. in MNU 15, 1962/63). k ist dann eine Parabel und die Forderung an π_F , parabolisch zu sein, ist im wesentlichen äquivalent zu der Parabeleigenschaft, dass die Tangenten einer Parabel auf zwei festen Tangenten ähnliche Punktreihen ausschneiden.

4. k und k' liegen zur Verschwindungs- bzw. Fluchtgeraden symmetrisch (Abb. 2), insbesondere die Leitlinien von k und k' . Wegen 2. schneiden die Leitlinien auf bei κ entsprechenden Tangenten von k und k' gleichlange Strecken aus. Dadurch sind k und k' unter den Kegelschnitten mit den Brennpunkten B_1 und B_2 und ihren Bildkegelschnitten ausgezeichnet (bei ihnen ist das Verhältnis jener Strecken konstant): Mit den Parametern $2c = \overline{B_1 B_2}$ und $2c' = \overline{B_1' B_2'}$ von κ erhält man nämlich für die Hauptachsenlängen $2a$ und $2a'$ von k bzw. k' :

$$a^3 = c^2 c' \quad a'^3 = c c'^2.$$

Die Leitlinien von k haben den Abstand $2a'$, die von k' den Abstand $2a$.

5. Wir fassen zusammen: Ist κ eine Grenzprojektivität mit dem Fixlinienelement (F, f) , so gilt:

a) F halbiert die Strecke zwischen dem Verschwindungspunkt W und dem Fluchtspunkt V' auf f .

b) Die von κ im Geradenbüschel durch F induzierte Projektivität π_F ist parabolisch und daher gleichsinnig.

c) f ist Tangente jenes Kegelschnitts k mit den Brennpunkten B_1 und B_2 , dessen Hauptachsenlänge $2a = 2^3 \sqrt{c^2 c'}$ ist, das ist gleich dem Abstand der Leitlinien von k' .

d) F liegt auf der zu B_1 gehörenden Leitlinie von k .

e) Die Leitlinien von k und k' schneiden auf bei κ entsprechenden Tangenten gleichlange Strecken aus.

Diese notwendigen Bedingungen sind nun auch hinreichend für die Herstellung von Grenzlagen:

Seien k und k' die gemäss 3. definierten Kegelschnitte, $B_1 = I_1 \mathcal{F}_1$, $I_2 \mathcal{F}_2$ und B_2 ihre Brennpunkte, l_1 die Polare von B_1 bezüglich k . Wir

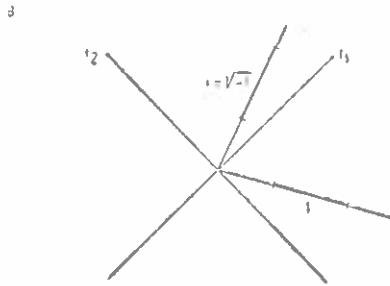


Abb 3

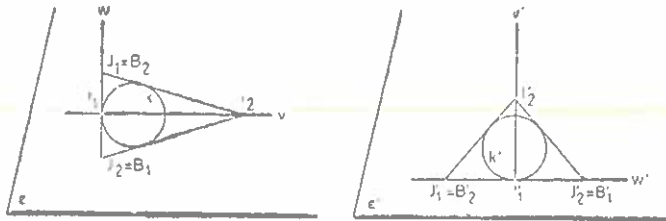


Abb 4

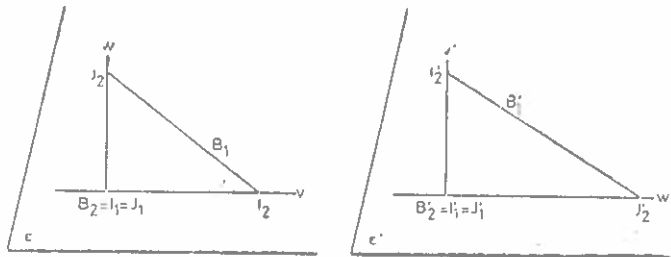


Abb 5

greifen eine allgemeine, d.h. nicht zur Verschwindungsgeraden parallele Tangente f heraus. f schneidet l_1 in F und habe den Verschwindungspunkt W . Durch Bewegung von ε gegen ε' bringen wir f und f' derart zur Deckung, dass $F = F'$ und F die Strecke zwischen W und dem Fluchtunkt V' halbiert. Nach 2. ist dann die Projektivität π_f auf f parabolisch. Macht man jetzt die Projektivität π_F um F gleichsinnig, so sind die Voraussetzungen des Satzes aus 3. erfüllt: k hat die Brennpunkte B_1, B_2 und berührt f , der Fixpunkt F liegt auf einer Leitlinie von k und π_F ist gleichsinnig; also ist auch π_F parabolisch und die aus π so erhaltene Projektivität π nach 1. eine Grenzprojektivität. Für die Wahl von f haben wir unendlich viele Möglichkeiten, Grenzlage ist daher auf ∞^1 Arten herstellbar, und zwar, wie sich zeigt, sowohl mittels Bewegungen als auch mittels Umlegungen.

Bei $c = c'$ zerfällt k in die Geradenbüschel in B_1 und B_2 . Die bisherigen Ableitungen bleiben aber richtig, wenn man die Leitlinien von k als die kongruent transformierten Geraden definiert; diese gehen durch B_2 bzw. B_1 .

Wir wollen jetzt die Fragestellung auch auf projektiv abgeschlossene pseudo-euklidische Ebenen ausdehnen. Die ebene euklidische Geometrie unterscheidet sich von der ebenen pseudo-euklidischen Geometrie in der Realität des absoluten Gebildes: Im ersten Fall besteht es aus einem konjugiert komplexen Punktepaar, im zweiten Fall aus einem reell getrennten Punktepaar. Kommt es nicht auf die Realitätsverhältnisse an, gewinnt man aus jedem Satz der einen Geometrie den entsprechenden Satz in der anderen Geometrie, indem man die Realität des absoluten Punktepaars umkehrt.

Zählt man zu den kongruenten Transformationen nur die längentreuen Ähnlichkeiten, kann man zwei Geraden dann nicht durch eine Bewegung zur Deckung bringen, deren Richtungen die absoluten Punkte trennen, da die Strecken auf der einen Geraden reelle, auf der anderen imaginäre Längen haben (Abb. 3). Abhilfe schafft die Einführung von „ α -Kongruenzen“; das seien jene Ähnlichkeiten, welche zwar die Realität, aber nicht den Betrag von Längen ändern. Sie entstehen aus den kongruenten Transformationen durch Multiplikation mit einer involutorischen perspektiven Affinität mit isotroper Achse und von dieser verschiedener isotroper Affinitätsstrahlrichtung.

Man kann jetzt dieselben Schlüsse wie im euklidischen Fall durchführen, muss allerdings unterscheiden, ob bei einer Projektivität die Hauptgeraden $n = B_1 B_2$ und n' die absoluten Punkte trennen oder nicht. Bei einer Grenzprojektivität gehört in ε zu jedem der beiden Fälle ein eigener wie oben ausgezeichneter Kegelschnitt $k:k_1$ und k_2 . Trennen n und n' die absoluten Punkte nicht, schneiden $k = k_1$ und n einander reell, andernfalls nicht.

Entsprechend sind die weiteren Aussagen abzuändern:

$$|a|^3 = |c^2 c'| \quad |a'|^3 = |c c'^2|,$$

wobei a auf $B_1 B_2$ und a' auf $B'_1 B'_2$ liegt. Die Leitlinien sind in beiden Fällen die Polaren von B_1, B_2 bezüglich k_1 und k_2 . Grenzlage ist jetzt

mit Hilfe von ∞^1 Kongruenzen und ∞^1 α -Kongruenzen herstellbar. Bei $|c| = |c'|$ zerfällt k_1 wie im euklidischen Fall, während k_2 regulär bleibt.

Da wir uns auf reelle Transformationen beschränkt haben, sind bei nichtaffinen Projektivitäten im euklidischen Fall die Gegenpunkte stets eigentlich. Im pseudoeuklidischen Fall kann dagegen ein Gegenpunkt oder können zwei Gegenpunkte Fernpunkte sein. Man erhält den ersten Fall (Abb. 4) etwa durch jenen Grenzübergang in ε , bei welchem n so gegen die Verschwindungsgerade strebt, dass der Verschwindungspunkt von n zusammen mit dem Fernpunkt der Verschwindungsgeraden die Punkte \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 stets harmonisch trennt. In ε' ist der bei der Projektivität entsprechende Grenzübergang durchzuführen. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs lassen sich fast alle Ergebnisse des allgemeinen Falls auf diesen Sonderfall übertragen: z. B. werden aus k_1 und k_2 Hyperbeln mit den Brennpunkten \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 , welche die Verschwindungsgerade in ihrem Fernpunkt I_1 berühren; k_1 und k_2 gehen in Parabeln mit dem Brennpunkt I_2 und dem Fernpunkt I_1 über. Diese Kegelschnitte sind unter jenen mit denselben Eigenschaften dadurch ausgezeichnet, dass der Radius der Leitkreise von k_1 und k_2 dem Betrag nach gleich ist der Sperrung von k_1 und k_2 . Wieder ist Grenzlage mit Hilfe von ∞^1 Kongruenzen und ∞^1 α -Kongruenzen herstellbar.

Das Letzte gilt auch noch bei den nichtaffinen Projektivitäten mit genau zwei uneigentlichen Gegenpunkten (Abb. 5): Die möglichen Fixgeraden liegen in zwei Geradenbüscheln, die möglichen Fixpunkten auf zwei Geraden.

Dagegen gibt es nur zu den flächentreuen, nichtäquiformen Affinitäten π kongruente und α -kongruente Transformationen β , sodass $\beta \circ \pi$ eine Grenzaffinität ist, dann sogar ∞^2 solche Transformationen: Die Fixgerade f ist nämlich die Ferngerade. Da bei einer äquiformen Affinität entweder $I_1 = I_1'$ und $I_2 = I_2'$ oder $I_1 = I_2'$ und $I_2 = I_1'$, ist π_f nicht parabolisch, sondern hyperbolisch oder involutorisch im Gegensatz zu unserer Forderung in 1. Durch eine geeignete Translation von ε gegen ε' kann eine Grenzaffinität immer in eine parabolisch perspektive Affinität überführt werden (Abb. 6), und umgekehrt erhält man aus einer solchen durch Translationen Grenzaffinitäten. Eine parabolisch perspektive Affinität ist aber flächentreu, d. h. eine Scherung, und zwar auch im pseudoeuklidischen Fall.

Wir haben gesehen: kann aus einer Projektivität eine Grenzprojektivität durch Bewegung hergestellt werden, dann sogar auf unendlich viele Arten. Dies gilt insbesondere für eine Grenzprojektivität selbst. Man kann sogar zeigen, dass mit jeder Grenzprojektivität α ein gegenüber der Grenzlage invarianter kinematischer Zwanglauf B verknüpft ist, d. h. zu jedem Zeitpunkt ist $B \circ \alpha$ eine Grenzprojektivität. Wir beschreiben B zunächst im allgemeinen Fall, bei dem alle Gegenpunkte eigentlich sind:

Stets liegt der Punkt $B_2 = I_1 \mathcal{F}_2 \cdot I_2 \mathcal{F}_1$ von ε auf jener Parallelen q der Fluchtgeraden v' von ε' , welche auf derselben Seite von v' liegt wie die zu B_1 gehörende Leitlinie l_1 von k' (bzw. k_1' oder k_2') und von v' den Ab-

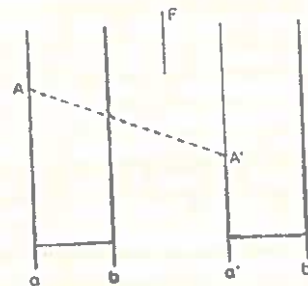


Abb. 6

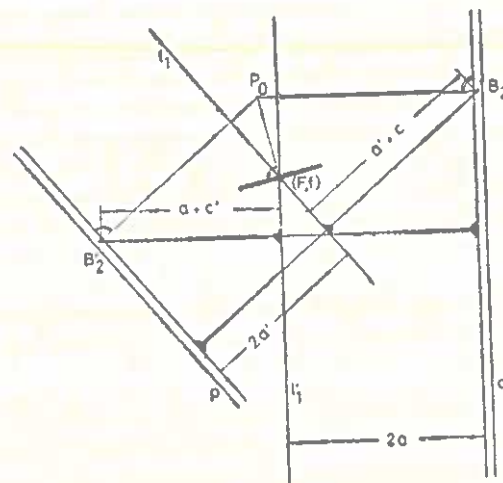


Abb. 7

stand $3a$ hat, $|a|^3 = |c^2 c'|^3$ (Abb. 7). Entsprechend geht die Parallele p der Verschwindungsgeraden w von ε im Abstand $3a'$, $|a'|^3 = |c c'^2|^3$, welche auf derselben Seite von w liegt wie l_1 , immer durch den Punkt B_2 .

So eine Bewegung B ist als „Schleifschieberbewegung“ bekannt.

Der Momentanpol P_0 von B ist der Schnittpunkt der Normale von q in B_2 mit der Normalen von p in B_2 . Ist P_0 vom Fixpunkt F von $B \circ \alpha$ verschieden, so ist die Fixgerade f von $B \circ \alpha$ eine Normale des Polstrahls $F P_0$, d. h. f ist die Bahntangente von F bei B . Dies ist auch noch für $F = P_0$ richtig; dann ist f eine isotrope Gerade. Da noch F der Schnittpunkt der Leitlinien l_1 und l_1' von k bzw. k' ist, kann das Fixlinienelement (F, f) von $B \circ \alpha$ jederzeit leicht konstruiert werden.

Ist genau einer der Gegenpunkte von α uneigentlich, etwa in ε' , so entsteht B durch das Abrollen einer in ε' festen Parabel auf einer in ε festen kubischen Parabel. Hat α genau zwei uneigentliche Gegenpunkte, so ist B eine kontinuierliche Drehung. Immer wenn α einen eigentlichen Fixpunkt hat, ist $F = l_1 \cdot l_1'$ der augenblickliche Fixpunkt von $B \circ \alpha$ und die Bahntangente von F die augenblickliche Fixgerade. Hat α einen uneigentlichen Fixpunkt F , zerstören Translationen in Richtung F , bei Grenzaffinitäten sogar krumme Schiebungen im allgemeinen die Grenzlage nicht.

Das aufgeworfene Problem wurde fast nur mit synthetischen Mitteln behandelt. Ein analytischer Ansatz ist etwa folgender: In projektiven Koordinaten $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ wird eine Projektivität π durch $x' = xA$ mit einer regulären reellen dreizeiligen Matrix A beschrieben. Man geht von einer bestimmten Anfangslage von ε' auf ε aus und bestimmt eine Bewegung $\beta \dots x = y'T$ so, dass $x' = y'TA$ eine Grenzprojektivität $\alpha = \beta \circ \pi$ ist, d. h. TA muss einen dreifachen Eigenwert mit zugehörigem eindimensionalen Eigenlösungsraum haben. Dies liefert Bedingungen für T , woraus sich sowohl β als B ergeben, weil β noch von einem Parameter abhängt. Entsprechend kann T als eine allgemeine Kongruenz oder α -Kongruenz angesetzt werden. Allerdings scheint eine einfache Deutung der Bedingungen für T nur dann möglich zu sein, wenn man die oben mitgeteilten Resultate schon kennt.

ACOPERIRI CONGRUENTE ALE PLANELOR PROJECTIVE ÎN POZIȚIE LIMITĂ

Rezumat

Fie P o proiectivitate reală a unui plan euclidian închis P_2 . Se caută transformările congruente β cu proprietatea că prin aplicarea necesară a lui β după π să se obțină o proiectivitate limită $\alpha = \beta \circ \pi$, adică o proiectivitate cu o dreaptă fixă unică f și cu un punct fix unic F pe f .

SYMPLEKTISCHE TRANSFORMATIONEN UND ZWEIFACH ISOTROPE GEOMETRIE

VON

KURT PETER MÜLLER

Mitteilung an der A. Myller-Jubiläumstagung zu Jassy, 20-23 August 1970

Wenn man im dreidimensionalen projektiven Punktraum P^3 über dem Körper der reellen Zahlen nach Plücker die Determinanten

$$(1) \quad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}; \quad p_{01} = p_{12}, \quad p_{02} = p_{13}, \quad p_{03} = p_{23}$$

als homogene Plücker-Koordinaten definiert, dann lautet die Gleichung eines regulären linearen Strahlkomplexes (Gewindes) o. B. d. A.

$$(2) \quad G \equiv p_3 + p_6 = 0.$$

Diejenigen Kollineationen des P^3 , die ein Gewinde, o. B. d. A. das Grundgewinde aus (2), als Ganzes fest lassen, bilden eine zehngliedrige Gruppe, die symplektische Gruppe S_{10} . Zu dieser Transformationsgruppe gehört im Sinne des Erlanger Programms eine Geometrie, die sinngemäss symplektische Geometrie zu nennen ist.

Während die symplektische Gruppe und deren Untergruppen in der Literatur hinreichend untersucht wurden, sind geometrische Deutungen der Untergruppen und der Invarianten noch wenig untersucht. Für den $(2n-1)$ -dimensionalen Fall sind hier Arbeiten von Rozenfeld, Geidel'man und nicht zuletzt Vaisman zu nennen. Vaisman behandelt ausführlich auch den dreidimensionalen Fall, und zwar besonders die Flächentheorie. Hier soll zunächst die Herstellung einer Produktdarstellung für die S_{10} behandelt werden, bei der die einzelnen Faktoren geometrisch deutbar sind. Um zu einer solchen Produktdarstellung zu kommen, betrachtet man zunächst