stand $3a$ hat, $|a|^3 = |c^2 c'|^3$ (Abb. 7). Entsprechend geht die Parallele p der Verschwindungsgeraden w von ε im Abstand $3a'$, $|a'|^3 = |c c'^2|^3$, welche auf derselben Seite von w liegt wie l_1, immer durch den Punkt B_2'.

So eine Bewegung B ist als „Schleifschieberbewegung" bekannt.

Der Momentanpol P_0 von B ist der Schnittpunkt der Normale von q in B_2 mit der Normalen von p in B_2'. Ist P_0 vom Fixpunkt F von $B \circ \varkappa$ verschieden, so ist die Fixgerade f von $B \circ \varkappa$ eine Normale des Polstrahls FP_0, d.h. f ist die Bahntangente von F bei B. Dies ist auch noch für $F = P_0$ richtig; dann ist f eine isotrope Gerade. Da noch F der Schnittpunkt der Leitlinien l_1 und l_1' von k bzw. k' ist, kann das Fixlinienelement (F, f) von $B \circ \varkappa$ jederzeit leicht konstruiert werden.

Ist genau einer der Gegenpunkte von $\varkappa$ uneigentlich, etwa in ε', so entsteht B durch das Abrollen einer in ε' festen Parabel auf einer in ε festen kubischen Parabel. Hat $\varkappa$ genau zwei uneigentliche Gegenpunkte, so ist B eine kontinuierliche Drehung. Immer wenn $\varkappa$ einen eigentlichen Fixpunkt hat, ist $F = l_1 . l_1'$ der augenblickliche Fixpunkt von $B \circ \varkappa$ und die Bahntangente von F die augenblickliche Fixgerade. Hat $\varkappa$ einen uneigentlichen Fixpunkt F, zerstören Translationen in Richtung F, bei Grenzaffinitäten sogar krumme Schiebungen im allgemeinen die Grenzlage nicht.

Das aufgeworfene Problem wurde fast nur mit synthetischen Mitteln behandelt. Ein analytischer Ansatz ist etwa folgender: In projektiven Koordinaten $x = (x_0 : x_1 : x_2)$ wird eine Projektivität π durch $x' = xA$ mit einer regulären reellen dreizeiligen Matrix A beschrieben. Man geht von einer bestimmten Anfangslage von ε' auf ε aus und bestimmt eine Bewegung $\beta \ldots x = y' T$ so, dass $x' = y' TA$ eine Grenzprojektivität $\varkappa = \beta \circ \pi$ ist, d.h. TA muss einen dreifachen Eigenwert mit zugehörigem eindimensionalen Eigenlösungsraum haben. Dies liefert Bedingungen für T, woraus sich sowohl β als B ergeben, weil β noch von einem Parameter abhängt. Entsprechend kann T als eine allgemeine Kongruenz oder α-Kongruenz angesetzt werden. Allerdings scheint eine einfache Deutung der Bedingungen für T nur dann möglich zu sein, wenn man die oben mitgeteilten Resultate schon kennt.

ACOPERIRI CONGRUENTE ALE PLANELOR PROIECTIVE ÎN POZIȚIE LIMITĂ

Rezumat

Fie P o proiectivitate reală a unui plan euclidian închis P_2. Se caută transformările congruente β cu proprietatea că prin aplicarea necesară a lui β după π să se obțină o proiectivitate limită $\varkappa = \beta \circ \pi$, adică o proiectivitate cu o dreaptă fixă unică f și cu un punct fix unic F pe f.

SYMPLEKTISCHE TRANSFORMATIONEN UND ZWEIFACH ISOTROPE GEOMETRIE

VON

KURT PETER MÜLLER

Mitteilung an der A. Myller-Jubiläumstagung zu Jassy, 20-25 August 1970

Wenn man im dreidimensionalen projektiven Punktraum P^3 über dem Körper der reellen Zahlen nach Plücker die Determinanten

$$(1) \qquad p_{ik} = \begin{vmatrix} x_i & x_k \\ y_i & y_k \end{vmatrix}; \quad \begin{matrix} p_{01} = p_1, & p_{02} = p_2, & p_{03} = p_3 \\ p_{23} = p_4, & p_{31} = p_5, & p_{12} = p_6 \end{matrix}$$

als homogene Plücker-Koordinaten definiert, dann lautet die Gleichung eines regulären linearen Strahlkomplexes (Gewindes) o. B. d. A.

$$(2) \qquad G \equiv p_3 + p_6 = 0.$$

Diejenigen Kollineationen des P^3, die ein Gewinde, o. B. d. A. das Grundgewinde aus (2), als Ganzes fest lassen, bilden eine zehngliedrige Gruppe, die symplektische Gruppe S_{10}. Zu dieser Transformationsgruppe gehört im Sinne des Erlanger Programms eine Geometrie, die sinngemäss symplektische Geometrie zu nennen ist.

Während die symplektische Gruppe und deren Untergruppen in der Literatur hinreichend untersucht wurden, sind geometrische Deutungen der Untergruppen und der Invarianten noch wenig untersucht. Für den $(2n-1)$-dimensionalen Fall sind hier Arbeiten von Rozenfel'd, Geidel'man und nicht zuletzt Vaisman zu nennen. Vaisman behandelt ausführlich auch den dreidimensionalen Fall, und zwar besonders die Flächentheorie. Hier soll zunächst die Herstellung einer Produktdarstellung für die S_{10} behandelt werden, bei der die einzelnen Faktoren geometrisch deutbar sind. Um zu einer solchen Produktdarstellung zu kommen, betrachtet man zunächst

die schon bei Lie untersuchten infinitesimalen Transformationen der S_{10}. Es ergibt sich

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
V_1 f &= x_0 r_1 - x_2 r_3 & V_{10} f &= x_3 r_2 - x_1 r_0\\
V_2 f &= x_0 r_2 + x_1 r_3 & V_9 f &= x_3 r_1 + x_2 r_0\\
V_3 f &= x_0 r_3 & V_8 f &= x_3 r_0\\
V_4 f &= x_1 r_1 - x_2 r_2 & & \\
V_5 f &= x_1 r_2 & V_6 f &= x_2 r_1\\
& & V_7 f &= x_3 r_3 - x_0 r_0 .
\end{aligned}
$$

Dabei gilt

$$(4)\qquad r_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Die Transformation

$$(5)\qquad x_0' : x_1' : x_2' : x_3' := x_3 : x_2 : x_1 : x_0$$

führt

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
&V_j f \to V_{11-j} f \quad (j = 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 10)\\
&V_k f \to V_k f \quad (k = 4, 7)
\end{aligned}
$$

über. Ausserdem bleibt bei der Transformation (5) das Gewinde G aus (2) invariant. Man erkennt also schon hier eine Aufspaltung der S_{10} in zwei Teilmengen, die für das Folgende von Bedeutung sein wird.

Aus den Infinitesimalen Transformationen (3) ergeben sich die Poisson-Klammern

$$(7)\qquad (V_i f, V_k f) = V_i (V_k f) - V_k (V_i f),$$

mit deren Hilfe man entscheiden kann, welche Transformationen aus (3) man zu Untergruppen der S_{10} zusammenfassen kann.
Durch Integration der Differentialgleichungen in (3) kommt man zu endlichen Darstellungen dieser Transformationen. Auf diese Weise erhält man zehn eingliedrige Untergruppen der S_{10}, aus denen man die S_{10} ganz aufbauen kann. Eine geometrische Deutung dieser Untergruppen ist möglich, hilft aber wenig, wenn man den Aufbau der ganzen S_{10} untersuchen will. Da die S_{10} jeden Punkt des P^3 in jeden anderen überführen kann, liegt es nahe, zunächst automorphe Transformationen eines Punktes, ohne Beschränkung der Allgemeinheit des Punktes

$$(8)\qquad P = (0 : 0 : 0 : 1),$$

zu untersuchen. Aus (3) ergibt sich, dass die zu den

$$(9)\qquad V_k f \; (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

gehörigen Transformationen P fest lassen. Die Poisson-Klammern (7) lassen erkennen, dass die dazu gehörigen Transformationen eine siebengliedrige Gruppe bilden, die

$$(10)\qquad G_7^{1234567}$$

heissen soll. Dabei gibt der untere Index die Zahl der Parameter an. Die oberen Indizes kennzeichnen die Transformationen aus (3), die zur Bildung der Gruppe verwendet wurden.

Die Transformation (5) führt P aus (8) über in

$$(\overline{8})\qquad \overline{P} = (1 : 0 : 0 : 0).$$

Analog bilden die automorphen Transformationen von $\overline{P}$ eine Gruppe $G_7^{4567890}$, wobei der obere Index 0 für 10 steht, und es gilt

$$(11)\qquad S_{10} = G_7^{1234567} . G_7^{4567890}, \text{ kommutativ.}$$

Aber auch die beiden als Faktoren auftretenden Gruppen lassen sich noch in Produkte zerlegen. Eine genaue Untersuchung ergibt

$$(12)\qquad G_7^{1234567} = G_3^{123} . G_3^{456} G_1^7 \text{ kommutativ und assoziativ,}$$

und wegen (5) analog

$$(\overline{12})\qquad G_7^{4567890} = G_3^{456} . G_1^7 . G_3^{890} \text{ kommutativ und assoziativ.}$$

Aus (11) erhält man noch

$$(13)\qquad S_{10} = G_3^{123} . G_1^5 . G_2^{47} . G_1^6 . G_3^{890} \text{ assoziativ.}$$

Die Aufteilung in (3) legt aber nahe, eine Produktdarstellung

$$(14)\qquad S_{10} = G_6^{123457} . G_6^{467890}$$

zu suchen, die sich durch Nachrechnen auch bestätigen lässt.

Nun sollen die in (11), (12) und (13) vorkommenden Untergruppen geometrisch gedeutet werden. Dazu werden die aus (3) durch Integration gewonnenen endlichen Darstellungen herangezogen. Zunächst gilt:

$$(15)\qquad G_7^1 : x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 . e^{-a_1} : x_1 : x_2 : x_3 e^{a_1}.$$

Bei affiner Deutung ($x_0 = 0$ als Fernebene) ergibt sich, dass Bahnkurven dieser eingliedrigen Gruppe Parabeln durch den Ursprung O (0, 0, 0) in Ebenen durch die x_3-Achse sind, die zugleich Parabelachse ist. Bei projektiver Deutung handelt es sich um halbaxiale Kollineationen, in der Bezeichnung von Klein um projektive Drehungen.

$$G_3^{123}: x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : a_1 x_0 + x_1 : a_2 x_0 + x_2 : a_3 x_0 + a_2 x_1 - a_1 x_2 + x_3. \tag{16}$$

Eingliedrige kontinuierliche Untergruppen dieser Gruppe besitzen Geraden als Bahnkurven. Nach Strubecker und Brauner handelt es sich um projektive Schiebungen. G_3^{890} lässt sich wegen (5) analog deuten.

$$G_3^{456}: x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : a_4 x_1 + a_4 a_6 x_2 : (a_5/a_4) x_1 + [(1 + a_5 a_6)/a_4] x_2 : x_3. \tag{17}$$

Bei affiner Deutung ($x_0 = 0$ als Fernebene) liegen in den Ebenen $x_3 = \text{const.}$ unimodulare zentroaffine Transformationen, in der Bezeichnung von Schirokow äquizentroaffine Transformationen, vor.

Es bleibt übrig, die Faktoren der Produktdarstellung (13) geometrisch zu deuten.

$$G_2^{47}: x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = e^{-a_7} x_0 : e^{a_4} x_1 : e^{-a_4} x_2 : e^{a_7} x_3. \tag{18}$$

Bei diesen Transformationen bleiben die Flächen der Schar

$$x_0 x_3 - k x_1 x_2 = 0 \tag{19}$$

einzeln invariant. Nach Strubecker handelt es sich um nichteuklidische Schraubungen.

$$G_1^5: x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0 : x_1 : a_5 x_1 + x_2 : x_3. \tag{20}$$

Bei affiner Deutung ($x_0 = 0$ als Fernebene) liegen Scherungen in den Ebenen $x_3 = \text{const.}$ vor. $x_1 = 0$, $x_3 = \text{const.}$ ist die jeweilige Scherungsachse. Wegen (5) lässt sich G_1^6 analog affin deuten, wenn man nun $x_3 = 0$ als Fernebene nimmt.

Nun soll noch ein Zusammenhang zwischen der bisher untersuchten symplektischen Geometrie und der zweifach isotropen Geometrie aufgezeigt werden, der auch eine geometrische Deutung der Produktdarstellung (14) zulässt.

Nach Brauner bilden die regulären Kollineationen des P^3, die eine Fahne, die von der Ebene β, der mit ihr inzidierenden Geraden b und dem mit b inzidierenden Punkt B mit

$$\beta \equiv x_0 = 0;\ b \equiv x_0 = x_1 = 0;\ B = (0:0:0:1) \tag{21}$$

gebildet wird, fest lassen, eine neungliedrige Gruppe I_9, die zweifach isotropen Ähnlichkeiten. Ihre infinitesimalen Transformationen sind

$$\begin{aligned} I_1 f &= x_0 r_1 & I_7 f &= x_2 r_3 \\ I_2 f &= x_0 r_2 & I_8 f &= x_1 r_3 \\ I_3 f &= x_0 r_3 & I_9 f &= x_2 r_2. \\ I_4 f &= x_1 r_2 \\ I_5 f &= x_1 r_1 \\ I_6 f &= x_3 r_3 - x_0 r_0 \end{aligned} \tag{22}$$

Zweifach isotrope Transformationen, die zugleich symplektische Transformationen sind, die also ausser der oben genannten Fahne (21) auch das Grundgewinde G aus (2) invariant lassen, bilden eine sechsgliedrige Untergruppe sowohl der S_{10} als auch der I_9. Sie soll mit $\mathfrak{J}_6$ bezeichnet werden. Ein Vergleich der infinitesimalen Transformationen der S_{10} aus (3) mit denen der I_9 aus (22) ergibt, dass genau die $V_i f$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 7$) aus (3) in (22) vorkommen. Somit gilt also

$$\mathfrak{J}_6 = G_6^{123457}. \tag{23}$$

Da dies eine der in (14) als Faktoren der Produktdarstellung vorkommenden Gruppen ist und da G_6^{167890} aus G_6^{123457} durch Anwendung der symplektischen Transformation (5) hervorgeht, ist es nun sofort möglich, die Gruppe G_6^{167890} geometrisch zu deuten. Es ist die Gruppe, die das aus β, b und B durch Anwendung von (5) entstehende Gebilde invariant lässt. Die Rechnung ergibt, dass dabei

$$\bar{\beta} \equiv x_3 = 0;\ \bar{b} \equiv x_3 = x_2 = 0;\ \bar{B} = (1:0:0:0) \tag{24}$$

fest bleiben.

Automorphe Transformationen dieser Fahne werden, analog zu oben, ebenfalls als zweifach isotrope Transformationen bezeichnet. Nur liegt nun eine andere Metrik als oben vor, und daher gilt insgesamt:

Die Transformationen der symplektischen Gruppe im reellen dreidimensionalen projektiven Raum lassen sich darstellen als Produkt von zwei aufeinanderfolgenden symplektischen zweifach isotropen Ähnlichkeiten, von denen die eine die Fahne $[\beta, b, B]$, die andere die Fahne $[\bar{\beta}, \bar{b}, \bar{B}]$ als absolutes Gebilde besitzt.

LITERATUR

1. Brauner, H. — *Geometrie des zweifach isotropen Raumes* I. J. f. d. reine und angew. Math. 224 (1966), S. 118 — 146.
2. Geidel'man, R. M. — *Grundlagen der Theorie der Familien von symplektischen Räumen.* Mat. Sbornik 55 (97) 1961, S. 7–34 (Russisch).
3. Klein F. — *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie,* Berlin 1928.
4. Lie S. — *Theorie der Transformationsgruppen,* Leipzig. Bd I (1888), Bd II (1890), Bd III (1893).

5. Müller, K. P. — *Zur Geometrie der symplektischen Gruppe im reellen dreidimensionalen projektiven Raum* (Dissertation) Stuttgart 1970.
6. Rozenfel'd B. A. — *Nichteuklidische Geometrien*, Moskau 1955 (Russisch).
7. Rozenfel'd, B. A. — *Nichteuklidische Räume*, Moskau 1969 (Russisch).
8. Strubecker, K. — *Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes*. J. f. d. r. u. angew. Math. 178 (1938), S. 135–173.
9. Vaisman, I. — *Contributions à la géométrie différentielle projective-symplectique*. Analele ştiinţifice din Iaşi, Monografii 1 (1966).

TRANSFORMĂRI SIMPLECTICE ŞI GEOMETRIE DUBLU IZOTROPĂ

Rezumat

Transformările simplectice sînt automorfisme ale unui complex liniar regulat de drepte. În spaţiul proiectiv P^3 ele constituie un grup cu zece parametri S_{10}.

Asemănările dublu izotrope în P^3 sînt automorfisme ale unui steag constînd dintr-un plan β, o dreaptă b din β şi un punct B de pe b. Ele constituie un grup I_9 cu nouă parametri.

Transformările simplectice dublu izotrope formează un subgrup $\mathfrak{J}_6$ al lui S_{10} şi al lui I_9.

Compararea transformărilor lui I_9 şi S_{10} arată că elementele lui S_{10} pot fi scrise ca produs de două asemănări dublu izotrope, faţă de două steaguri diferite.

W-KURVEN DER ISOTROPEN MÖBIUSEBENE

VON

S. GRÜNER (Karlsruhe)

Mitteilung an der A. Myller-Jubiläumstagung zu Jassy, 20—25 August 1970

1. Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum P^3 liege die *symmetrische Bilinearform*

$$[X, Y] := x_1 y_1 - x_0 y_3 - x_3 y_0$$

vor. Die Nullstellenmenge der zugehörigen quadratischen Form ist eine einfach singuläre Fläche 2. Ordnung,

$$[X, X] := x_1^2 - 2x_0 x_3 = 0,$$

ein *Kegel* Γ mit der Spitze $F := (0:0:1:0)$. Wir projizieren die Punkte von Γ aus dem Zentrum $Z := (0:0:0:1) \in \Gamma$ auf die Γ-Tangentialebene $x_3 = 0$. Um diese Abbildung ausnahmslos eineindeutig zu machen, schliessen wir die Projektionsebene durch uneigentliche Punkte ab und erhalten so nach H. Brauner [4] die *isotrope Möbiusebene* M mit dem absoluten Linienelement F, f $(x_0 = x_3 = 0)$:

$\Gamma \setminus F$ —Stereogr. Projektion→	Ebene M $(x_3 = 0)$
$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \Gamma, x_0 \neq 0$	∞^2 eigentl. Punkte $(x_0 : x_1 : x_2 : 0)$
$(0:0:x_2:x_3) \in \Gamma$	∞^1 uneigentliche Punkte 1. Art, inzident mit F
$(0:0:0:1) = Z \in \Gamma$	der uneigentliche Punkt von M.