5. M ü l l e r, K. P. — *Zur Geometrie der symplektischen Gruppe im reellen dreidimensionalen projektiven Raum* (Dissertation) Stuttgart 1970.
6. R o z e n f e l'd B. A. — *Nichteuklidische Geometrien*, Moskau 1955 (Russisch).
7. R o z e n f e l'd, B. A. — *Nichteuklidische Räume*, Moskau 1969 (Russisch).
8. S t r u b e c k e r, K. — *Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes*, J. f. d. r. u. angew. Math. 178 (1938), S. 135–173.
9. V a i s m a n, I. — *Contributions à la géométrie différentielle projective-symplectique*. Analele ştiinţifice din Iaşi, Monografii 1 (1966).

TRANSFORMĂRI SIMPLECTICE ŞI GEOMETRIE DUBLU IZOTROPĂ

Rezumat

Transformările simplectice sînt automorfisme ale unui complex liniar regulat de drepte. În spaţiul proiectiv P^3 ele constituie un grup cu zece parametri S_{10}.

Asemănările dublu izotrope în P^3 sînt automorfisme ale unui steag constînd dintr-un plan β, o dreaptă b din β şi un punct B de pe b. Ele constituie un grup I_9 cu nouă parametri.

Transformările simplectice dublu izotrope formează un subgrup J_6 al lui S_{10} şi al lui I_9.

Compararea transformărilor lui I_9 şi S_{10} arată că elementele lui S_{10} pot fi scrise ca produs de două asemănări dublu izotrope, faţă de două steaguri diferite.

W-KURVEN DER ISOTROPEN MÖBIUSEBENE

VON

S. GRÜNER (Karlsruhe)

Mitteilung an der A. Myller-Jubiläumstagung zu Jassy, 20—25 August 1970

1. Im reellen dreidimensionalen projektiven Raum P^3 liege die *symmetrische Bilinearform*

$$[X, Y] := x_1 y_1 - x_0 y_3 - x_3 y_0$$

vor. Die Nullstellenmenge der zugehörigen quadratischen Form ist eine einfach singuläre Fläche 2. Ordnung,

$$[X, X] := x_1^2 - 2x_0 x_3 = 0,$$

ein *Kegel* Γ mit der Spitze $F := (0:0:1:0)$. Wir projizieren die Punkte von Γ aus dem Zentrum $Z := (0:0:0:1) \in \Gamma$ auf die Γ-Tangentialebene $x_3 = 0$. Um diese Abbildung ausnahmslos eineindeutig zu machen, schliessen wir die Projektionsebene durch uneigentliche Punkte ab und erhalten so nach H. B r a u n e r [4] die *isotrope Möbiusebene* M mit dem absoluten Linienelement F, f $(x_0 = x_3 = 0)$:

$\Gamma \setminus F$ $\xrightarrow{\text{Stereogr. Projektion}}$	Ebene M $(x_3 = 0)$
$(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \in \Gamma$, $x_0 \neq 0$	∞^2 eigentl. Punkte $(x_0 : x_1 : x_2 : 0)$
$(0 : 0 : x_2 : x_3) \in \Gamma$	∞^1 uneigentliche Punkte 1. Art, inzident mit F
$(0:0:0:1) = Z \in \Gamma$	der uneigentliche Punkt von M.

M-Kreise sind a) die gewöhnlichen isotropen Kreise, also die regulären Kegelschnitte durch das absolute Linienelement (F, f), und b) die nichtisotropen Geraden in $x_3 = 0$[1]. Beide lassen sich durch

$$\mathfrak{K}(U, V, k) := \frac{1}{2} k x_1^2 + U x_0 x_1 + V x_0^2 - x_0 x_2 = 0 = x_3$$

darstellen. Als Punktmengen aufgefasst besitzen sie stereographische Urbilder, die von *normierten Ebenen*

$$\mathfrak{K} = [V : U : -1 : k]$$

aus Γ ausgeschnitten werden. Wir sagen kurz, die stereographische Projektion bilde die normierten Ebenen $\mathfrak{K}$ eineindeutig auf die M-Kreise ab. (Da das Polarsystem von Γ ausgeartet ist, können diese Ebenen nicht als Polarebenen von Punkten ausserhalb des Kegels Γ aufgefasst werden. Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum euklidischen Fall [1] und hängt eng damit zusammen, dass die isotrope Winkelmetrik aperiodisch ist und keine Orthogonalitätsrelation kennt.)

Zwei M-Kreise $\mathfrak{K}_1(U_1, V_1, k_1)$ und $\mathfrak{K}_2(U_2, V_2, k_2)$ schneiden sich stets in zwei Schnittpunkten (im algebraischen Sinn) und schliessen dort betragsgleiche *isotrope Winkel* ein, für die

$$\varphi^2 = (U_2 - U_1)^2 - 2(V_2 - V_1)(k_2 - k_1) =: [\mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2 - \mathfrak{K}_1]$$

gilt. $\varphi = 0$ kennzeichnet die möglichen Fälle von Berührung.

Eine *automorphe Kollineation des Kegels* Γ bewirkt in M eine stetige, kreis- und punkttreue (und damit auch berührungstreue) Abbildung von M auf sich, d.h. eine *Möbiustransformation.* Dieser Schluss gilt auch umgekehrt. Daher ist die 7-gliedrige Gruppe $\mathfrak{M}_7$ der automorphen Kollineationen von Γ isomorph zu der Gruppe M_7 aller Möbiustransformationen von M auf sich. Wegen

$$\bar{\varphi}^2 = \lambda \cdot \varphi^2 \text{ mit } \frac{1}{\lambda} := \sqrt[3]{|\mathfrak{A}|^2} > 0,$$

worin $\mathfrak{A}$ die (o. B. d. A. auf $a_{22} = 1$ normierte) Kollineationsmatrix der automorphen Kollineation $\bar{X} = \mathfrak{A} \cdot X$ bedeutet, ist eine Möbiustransformation im allgemeinen *nicht winkeltreu.* Es bestehen die Isomorphiebeziehungen

automorphe Kollineationen)	$\mathfrak{M}_7 \cong M_7$	(Möbiustransformationen)
(Γ-Bewegungen, $\lvert\mathfrak{A}\rvert^2 = 1$)	$\mathfrak{M}_6 \cong M_6$	(winkeltreue Möbiustransformationen)
(eigentliche Γ-Bewegungen) $\lvert\mathfrak{A}\rvert = +1$	$\mathfrak{M}_6^+ \cong M_6^+$	(gleichsinnig winkeltreue Möbiustransformationen)
(uneigentl. Γ-Bewegungen) $\lvert\mathfrak{A}\rvert = -1$	$\mathfrak{M}_6^- \cong M_6^-$	(gegensinnig winkeltreue Möbiustransformationen).

[1]) Die isotropen Geradenpaare zählen also nicht zu den M-Kreisen.

Dabei sind $\mathfrak{M}_6$ und $\mathfrak{M}_6^+$ Normalteiler von $\mathfrak{M}_7$, M_6 und M_6^+ Normalteiler von M_7.

2. Eine *W-Kurve der Ebene M* ist eine Kurve, die bei Anwendung einer eingliedrigen stetigen Gruppe von Möbiustransformationen in sich übergeht. H. W ü n s c h [6] hat unter Verwendung dualer Zahlen und der infinitesimalen Transformationen der Gruppe M_7 die kontinuierlichen Untergruppen und deren W-Kurven bestimmt, allerdings mit sehr vielen zusätzlichen, vom Rechenkalkül bedingten Fallunterscheidungen. Hier dagegen sollen die W-Kurven vom differentialgeometrischen Standpunkt aus gewonnen und durch natürliche Gleichungen charakterisiert werden: Wir fassen die gesuchten Kurven auf als stereographische Bilder der *W-Kurven auf* Γ bezüglich Kollineationen der Gruppe $\mathfrak{M}_7$. Dazu stellen wir kurz einige Grundformeln der projektiven Differentialgeometrie für Kurven auf Γ zusammen.

Eine Punktmenge $K \subset P^3$ heisst ein *C^r-Kurvenstück auf* Γ, wenn es ein offenes Intervall $I \subset \mathbf{R}$ und eine topologische Abbildung Φ von I auf K gibt, so dass

$$t \in I \xrightarrow{\Phi} X(t) \in K \text{ mit } [X(t), X(t)] = 0 \text{ und } x_i \in C^r,\ r \geq 1$$

gilt. Für das folgende setzen wir voraus:

$$X(t) \text{ und } \dot{X}(t) := \frac{dX(t)}{dt} \text{ sind linear unabhängig,}$$

$$[\dot{X}(t), \dot{X}(t)] \neq 0 \text{ für } t \in I,$$

$$r \geq 6.$$

Durch eine Umnormung kann dann stets $[\dot{X}(t), \dot{X}(t)] = +1 = \text{const.}$ erreicht werden. In Abhängigkeit von der vorgegebenen C^r-Darstellung eines Kurvenstücks K gibt es in jedem Kurvenpunkt X ein *Begleittetraeder* das $\mathfrak{M}_6^+$ — invariant mit K gekoppelt ist.

Die Grundpunkte sind

$$X, \quad T := \dot{X}, \quad Y := \ddot{X} - aX, \quad F = (0:0:1:0)$$

$$\text{mit } a := -\frac{1}{2}[\ddot{X}, \ddot{X}], \quad \operatorname{Det}(X, T, Y, F) = -1,$$

die der Produkttabelle

$[\,,\,]$	X	T	Y	F
X	0	0	-1	0
T	0	1	0	0
Y	-1	0	0	0
F	0	0	0	0

genügen, d. h. X, Y und F liegen stets auf Γ.

In bekannter Weise ergeben sich daraus die *Ableitungsgleichungen*

$$\begin{aligned} \dot X &= T \\ \dot T &= aX + Y \\ \dot Y &= aT + bF \\ \dot F &= 0, \end{aligned} \qquad \text{mit } b := -\operatorname{Det}(X, \dot X, \ddot X, \dddot X).$$

Führt man nun mittels der streng monotonen Funktion $f \in C^{r+1}$ eine Parametertransformation

$$t^* = f(t) \text{ mit } \varphi(t) := \frac{dt^*}{dt}, \quad A(t) := \frac{\dot\varphi(t)}{2\varphi(t)}$$

durch, so wird die Produkttabelle i. a. nicht erhalten bleiben.

Man koppelt deshalb mit einer Parametertransformation immer die Umnormung

$$X^*(t^*) := \varphi(t)\, X(t)$$

und nennt die gekoppelte Transformation nach G. B o l [3] eine *Sterntransformation*. Danach lauten die neuen Tetraedergrundpunkte

$$\begin{aligned} X^* &= \varphi X \\ T^* &:= \frac{dX^*}{dt^*} = X^*_{t^*} = T + 2AX \\ Y^* &:= X^*_{t^* t^*} - a^* X^* = (Y + 2AT + 2A^2 X)\,\varphi^{-1} \\ F^* &= F, \end{aligned}$$

mit $a^* = (a - 2A^2 + 2\dot A)\,\varphi^{-2}$ und $b^* = b\varphi^{-2}$.

Ist das Kurvenstück frei von stationären Schmiegebenen, so kann durch

$$b^* = b\varphi^{-2} = \operatorname{sign} b = \begin{cases} +1, & \text{falls } K \text{ positiv gewunden} \\ -1, & \text{falls } K \text{ negativ gewunden} \end{cases}$$

ein $\mathfrak{M}_6^+$ — *invarianter Parameter*

$$\tau := \int_{t_0}^{t} \sqrt{|b(t)|}\, dt$$

eingeführt werden. Neben dem Windungssinn ist dann $a(\tau)$ im wesentlichen die einzige differentialgeometrische Invariante eines Kurvenstücks bezüglich der Gruppe $\mathfrak{M}_6^+$, seine sogenannte *natürliche Gleichung*. Ausserdem genügt K der auf den invarianten Parameter τ bezogenen *Grundgleichung*

$$\dddot X(\tau) - 2a(\tau)\,\dot X(\tau) - \dot a(\tau)\, X(\tau) = F \cdot \operatorname{sign} b.$$

Wenn man den Einfluss einer beliebigen automorphen Kollineation von Γ auf obige Formeln nachprüft, so stellt man fest, dass

$$\frac{\dot a^2(\tau)}{a^3(\tau)}$$

eine *Differentialinvariante der Gruppe* $\mathfrak{M}_7$ ist[2]). Notwendige und hinreichende Bedingung für eine nichttriviale[3]) W-Kurve auf Γ ist also, dass diese Differentialinvariante konstant ist. Alle W-Kurven auf Γ besitzen daher eine der beiden natürlichen Gleichungen

$$a(\tau) = a_0 = \text{const. oder}$$

$$a(\tau) = \frac{C}{\tau^2}, \quad C = \text{const.} \neq 0.$$

Die Integration der zugehörigen Grundgleichungen führt auf C^ω-Darstellungen, die nur elementare Funktionen enthalten. Je nach den Werten von a_0 bzw. C ergeben sich $(3 + 4)$ *verschiedenartige Typen von W-Kurven* auf Γ. Ihre stereographischen Bilder sind dann die nichttrivialen[4]) W-Kurven der isotropen Möbiusebene M.

Beispiel: $2a_0 = \varkappa^2 > 0$.

Als Lösungen der Grundgleichung finden wir die C^ω-Darstellung

$$X(\tau) = e^{\varkappa\tau} P_1 + e^{-\varkappa\tau} P_2 + P_3 - \frac{\tau}{\varkappa^2} F, \quad \tau \in I = \mathbf{R},$$

---

[2]) Beweis in [5, S. 61].

[3]) Triviale W-Kurven auf Γ sind die Γ-Erzeugenden und die ebenen Schnitte $\mathfrak{K} \cap \Gamma$ ($b = 0$, Kegelschnitte).

[4]) Triviale W-Kurven in M sind die isotropen Geraden und die M-Kreise $\mathfrak{K}(U, V, k)$.

wobei die Integrationskonstanten P_i den Nebenbedingungen

$$[P_1, P_1] = [P_2, P_2] = 0, \quad [P_3, P_3] = -2\,[P_1, P_2] = \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$[P_1, P_3] = [P_2, P_3] = 0, \quad \mathrm{Det}\,(P_1, P_2, P_3, F) = \frac{-1}{2\varkappa^3}$$

genügen müssen. In der stereographischen Projektion entspricht einer solchen W-Kurve eine Loxodrome eines elliptischen Kreisbüschels, das die Bilder von P_1 und P_2 als Grundpunkte besitzt und das von der Kurve unter dem konstanten isotropen Winkel $\frac{1}{\varkappa^2}$ durchsetzt wird. Die Grundpunkte des Kreisbüschels sind asymptotische Punkte und singulär, sie gehören also nicht zur W-Kurve.

LITERATUR

1. Barner M. — *Zur Möbiusgeometrie: Die Inversionsgeometrie ebener Kurven.* Journ. f. reine u. angew. Math. 206 (1961), 192 – 220.
2. Barner M., Kunle H. — *Über W-Kurven auf Quadriken.* Monh. Math. Phys. 65 (1961), 106 – 142.
3. Bol G. — *Projektive Differentialgeometrie,* 1. Teil. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1950.
4. Brauner H. — *Kreisgeometrie in der isotropen Ebene.* Monh. Math. Phys. 69 (1965), 105 – 128.
5. Grüner S. — *Zur Differentialgeometrie der isotropen Möbiusebene.* Diss. Stuttgart (1970), 1 – 95.
6. Wünsch H. — *Die kugeltreuen Transformationen des isotropen Raumes.* Diss. Karlsruhe (1963), 1 – 217.

CURBE W ALE PLANULUI MÖBIUS IZOTROP

Rezumat

Planul Möbius izotrop M se obţine prin prelungiri convenabile ale planului izotrop obişnuit π, a cărui metrică este determinată de un element liniar ca figură absolută. Cum a arătat H. Brauner [4], M are structura topologică a unui con pătratic Γ din care se exclude vîrful F. Un homeomorfism de la $\Gamma \setminus F - M$ poate fi intuit printr-o proiecţie stereografică. Reprezentările Möbius (care, în general, nu conservă unghiurile) formează în M un grup M_7 corespunzător coliniaţiilor automorfe ale lui Γ, care, după cum se ştie formează un grup $\mathfrak{M}_7$.

Geometria diferenţială proiectivă a curbelor din Γ permite să se caracterizeze toate curbele W de pe Γ ale grupului $\mathfrak{M}_7$ printr-o ecuaţie naturală $a(\tau)$. Există şapte tipuri nebanale. Proiecţia stereografică furnizează atunci imediat curbele W ale grupului M_7 în M.

UN PROBLÈME DE COUPURE LINÉAIRE

PAR

CARMEN DARIE, MIRCEA FERNEA, VLADIMIR FIRŢA

Communication présentée à la session scientifique jubilaire „A. Myller", Jassy, 20—25 août 1970

Les problèmes de coupure sont des problèmes dont le modèle mathématique conduit à des problèmes de programmation mathématique. En utilisant les méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire on obtiendra des solution des problèmes de coupure.

Nous admettrons que dans le dépôt de matériaux d'une entreprise il y a m catégories de matières premières, en quantités respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_m$. De ces quantités on peut fabriquer n catégories de produits finis. Pour la confection d'une unité de produit fini de la catégorie j il faut la quantité a_{ij} de matière première de la catégorie i. De plus, pour la confection d'une unité de produit fini il faut fabriquer s types de pièces. Du matériel existant on peut fabriquer l pièces du type k. On désignera par b_{kj} le nombre de pièces du type k nécessaires à une unité de produit fini de la catégorie j.

En admettant que de chaque produit fini on fabrique x_j quantités nous sommes conduits au problème suivant: déterminer le plan de production $x(x_1, \ldots, x_n)$ qui réalise:

$$\max_{n} \min_{1 \leq k \leq s} \frac{b_{k_1} x_1 + \ldots + b_{k_n} x_n}{l_k} \tag{1}$$

avec les conditions suivantes:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_i, \quad x_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Le modèle mathématique du problème énoncé ci-dessus est un modèle général, dans lequel rentrent aussi les problèmes de coupure proprement dits.