wobei die Integrationskonstanten P_i den Nebenbedingungen

$$[P_1, P_1] = [P_2, P_2] = 0, \quad [P_3, P_3] = -2[P_1, P_2] = \frac{1}{\varkappa^2}$$

$$[P_1, P_3] = [P_2, P_3] = 0, \quad \mathrm{Det}\,(P_1, P_2, P_3, F) = \frac{-1}{2\varkappa^3}$$

genügen müssen. In der stereographischen Projektion entspricht einer solchen W-Kurve eine Loxodrome eines elliptischen Kreisbüschels, das die Bilder von P_1 und P_2 als Grundpunkte besitzt und das von der Kurve unter dem konstanten isotropen Winkel $\frac{1}{\varkappa^2}$ durchsetzt wird. Die Grundpunkte des Kreisbüschels sind asymptotische Punkte und singulär, sie gehören also nicht zur W-Kurve.

LITERATUR

1. Barner M. — *Zur Möbiusgeometrie: Die Inversionsgeometrie ebener Kurven.* Journ. f. reine u. angew. Math. 206 (1961), 192 – 220.
2. Barner M., Kunle H. — *Über W-Kurven auf Quadriken.* Monh. Math. Phys. 65 (1961), 106 – 142.
3. Bol G. — *Projektive Differentialgeometrie,* 1. Teil. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen 1950.
4. Brauner H. — *Kreisgeometrie in der isotropen Ebene.* Monh. Math. Phys. 69 (1965), 105 – 128.
5. Grüner S. — *Zur Differentialgeometrie der isotropen Möbiusebene.* Diss. Stuttgart (1970), 1 – 95.
6. Wünsch H. — *Die kugeltreuen Transformationen des isotropen Raumes.* Diss. Karlsruhe (1963), 1 — 217.

CURBE W ALE PLANULUI MÖBIUS IZOTROP

Rezumat

Planul Möbius izotrop M se obţine prin prelungiri convenabile ale planului izotrop obişnuit π, a cărui metrică este determinată de un element liniar ca figură absolută. Cum a arătat H. Brauner [4], M are structura topologică a unui con pătratic Γ din care se exclude vîrful F. Un homeomorfism de la $\Gamma \setminus F - M$ poate fi intuit printr-o proiecţie stereografică. Reprezentările Möbius (care, în general, nu conservă unghiurile) formează în M un grup M_7 corespunzător coliniaţiilor automorfe ale lui Γ, care, după cum se ştie formează un grup $\mathfrak{M}_7$.

Geometria diferenţială proiectivă a curbelor din Γ permite să se caracterizeze toate curbele W de pe Γ ale grupului $\mathfrak{M}_7$ printr-o ecuaţie naturală $a(\tau)$. Există şapte tipuri nebanale. Proiecţia stereografică furnizează atunci imediat curbele W ale grupului M_7 în M.

UN PROBLÈME DE COUPURE LINÉAIRE

PAR

CARMEN DARIE, MIRCEA FERNEA, VLADIMIR FIRŢA

Communication présentée à la session scientifique jubilaire „A. Myller", Jassy, 20—25 août 1970

Les problèmes de coupure sont des problèmes dont le modèle mathématique conduit à des problèmes de programmation mathématique. En utilisant les méthodes de résolution des problèmes de programmation linéaire on obtiendra des solution des problèmes de coupure.

Nous admettrons que dans le dépôt de matériaux d'une entreprise il y a m catégories de matières premières, en quantités respectivement $a_1, a_2, \ldots, a_m$. De ces quantités on peut fabriquer n catégories de produits finis. Pour la confection d'une unité de produit fini de la catégorie j il faut la quantité a_{ij} de matière première de la catégorie i. De plus, pour la confection d'une unité de produit fini il faut fabriquer s types de pièces. Du matériel existant on peut fabriquer l pièces du type k. On désignera par b_{kj} le nombre de pièces du type k nécessaires à une unité de produit fini de la catégorie j.

En admettant que de chaque produit fini on fabrique x_j quantités nous sommes conduits au problème suivant: déterminer le plan de production $x(x_1, \ldots, x_n)$ qui réalise:

$$\max_n \min_{1 \leq k \leq s} \frac{b_{k1}x_1 + \ldots + b_{kn}x_n}{l_k} \tag{1}$$

avec les conditions suivantes:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq a_i, \quad x_j \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m). \tag{2}$$

Le modèle mathématique du problème énoncé ci-dessus est un modèle général, dans lequel rentrent aussi les problèmes de coupure proprement dits.

Dans le présent travail nous présenterons le modèle mathématique d'un problème de coupure ainsi qu'un algorithme propre pour la résolution de ce problème.

Soient $a_1, \ldots, a_m$ des unités de matière première de m catégories. Notre tâche est d'en couper le plus grand nombre possible de pièces finies. Chaque unité de produit fini est composée de l détails. Désignons par k_s le nombre de détails du type s qui figurent dans la composition d'une unité de produit fini.

Supposons qu'une unité de matière première de la catégorie i puisse être coupée de n manières et désignons par x_{ij} le nombre de détails du type j. Soit a_{ijs} le nombre de détails du type s qui s'obtiennent de l'unité de matière première de la catégorie i par la variante de coupure j. Par conséquent, de la matière première de la catégorie i on aura

(3) $$\sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij}$$

détails du type s.

Après la coupure de toutes les catégories de matières premières le détail s figure

(4) $$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij}$$

fois.

Le problème de programmation linéaire qui résout ce modèle est le suivant: déterminer les inconnues $x_{ij} \geqslant 0$, x_{ij} nombres entiers tels que la fonction.

(5) $$Z = \min_{1 \leqslant s \leqslant l} \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij}}{k_s}$$

avec les conditions restrictives

(6) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

soit maximum.

$\dfrac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij}}{k_s}$ représentent justement le nombre de produits finis qu'on peut confectionner des matières premières $a_1, a_2, \ldots, a_m$. En introduisant la variable auxiliaire ξ, le problème (5), (6) se réduit au problème de programmation linéaire suivant. Déterminer

(7) $$\max Z = \xi$$

avec les restrictions

(8) $$\frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijs} x_{ij}}{k_s} \geqslant \xi$$

(9) $$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

(10) $$x_{ij} \geqslant 0 \quad \xi \geqslant 0.$$

En général, la matrice des éléments a_{ijs} est de dimensions très grandes. De ce fait, la résolution de ce problème à l'aide d'un ordinateur n'est pas aisée. En premier lieu, il se pose la question de la capacité de l'ordinateur et en second lieu le problème de la stabilité de la solution par suite de l'accumulation des erreurs durant le calcul.

En ce qui suit nous présenterons un algorithme de résolution approximative d'un cas particulier, un problème de coupure. Nous considérerons le cas particulier où l'on a un seul type de matière première c'est-à-dire $m = 1$. Nous supposerons que cette matière première est une barre de longueur L. Il faut couper n détails, dont les longueurs soient $a_1, \ldots, a_n$ avec les conditions

$$L > a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n.$$

Ces détails il faut les avoir en quantités

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

respectivement.

Il se pose le problème de réaliser ce plan avec dépense minimum de matériel. Le modèle mathématique qui résout ce problème est le suivant déterminer les variantes de coupure $\bar{x}_j$ de manière que l'on ait

(11) $$\min \sum_{j=1}^{n} x_j$$

avec les conditions

(12) $$\sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j = c_k.$$

Nous avons désigné par x_j le nombre des variantes de coupure du type j et par $\bar{x}_j$ la variante de coupure du type j. On remarque que $\bar{x}_j$ est un vecteur à n composantes, ces composantes étant des nombres naturels.

Nous désignerons par A le vecteur dont les composantes sont les dimensions des détails qui doivent être coupés $A = A(a_1, \ldots, a_n)$, et par A_k le vecteur aux composantes $A_k = A_k(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)$. Soit également $\bar{x}_j^k$ un vecteur aux n composantes $\bar{x}_j^k = \bar{x}_j^k(a_{j1}, \ldots, a_{jk}, \ldots, 0, \ldots, 0)$. On désignera par

$$S_{jk} = L - (A_k, \bar{x}_j^k)$$

le reste de matière première qui s'obtient par la coupure du k-ième détail dans la variante de coupure j. Évidemment $S_{jk} \geqslant 0$.

Une composante du vecteur $\bar{x}_j$ s'obtient à l'aide de la formule

$$a_{jk} = \left[\frac{S_{j,k-1}}{a_k}\right] \tag{13}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre.

Les variantes de coupe peuvent s'obtenir par récurrence.

Soit $\bar{x}_j(a_{j1}, \ldots, a_{jn})$ une variante de coupe.

La variante de coupe $\bar{x}_{j+1}(a_{j+1,1}, \ldots, a_{j+1,n})$ s'obtient à partir de la variante $\bar{x}_j$ de la manière suivante:

a) Si $a_{jn} \neq 0$, on prendra $a_{j+1,n} = 0$ et $S_{j+1,n} = S_{j,n} + a_{j,n} \cdot a_k$, dans le cas contraire $a_{j+1,n} = a_{j,n} = 0$ et $S_{j+1,n} = S_{j,n}$.

b) Soit $k \leqslant n$ le plus petit nombre naturel pour lequel $a_{j,n-k} \neq 0$, alors

$$a_{j+1,1} = a_{j,1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{j+1,n-k-1} = a_{j,n-k-1},$$

$$a_{j+1,n-k} = a_{j,n-k} - 1,$$

$$S_{j+1,n-k+1} = S_{j+1,n-k} + a_{n-k},$$

et les autres composantes $a_{j+1,n-k+1}, \ldots, a_{j+1,n}$ se déterminent d'après la formule (13).

Soit X l'ensemble des variantes de coupe qui représentent la solution du problème (11), (12). Nous dirons que $\bar{x}_j \in X$ si

$$\begin{cases} S_{jn} < r, \\ a_{jk} \leqslant c_k, \end{cases} \quad \text{pour } k = 1, \ldots, n,$$

où r est un nombre donné à l'avance. L'algorithme proposé détermine successivement de la formule (13) et des schémas (a) et (b), toutes les variantes possibles. Parmi celles-ci on retiendra seulement celles qui appartiennent à l'ensemble X. Si à la fin du calcul la condition (12) n'est pas

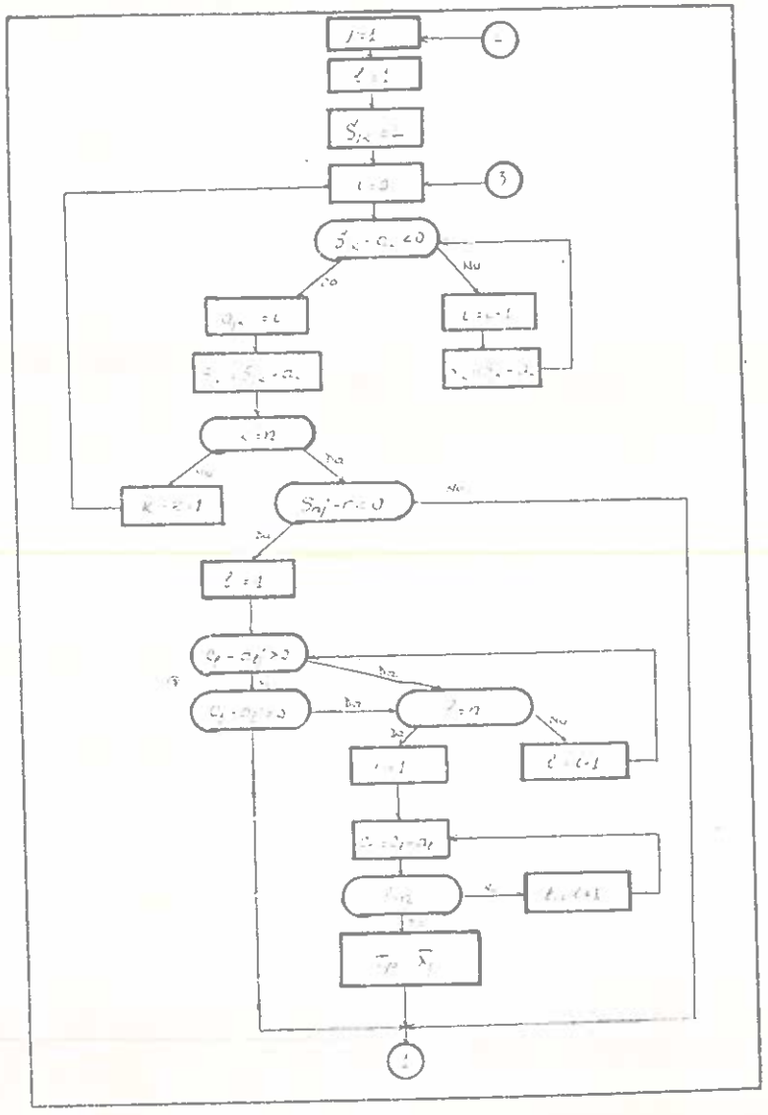

Fig. 1

remplie, on reprend les calculs pour $r+h$, $h>0$. Ces calculs sont repris jusqu'à ce que la condition (12) soit remplie.

L'algorithme proposé donne une solution approximative du problème (11), (12). Cette approximation est satisfaisante, parce qu'on retient comme solution du problème les variantes de coupure qui utilisent au maximum la matière première. De plus l'algorithme n'a pas besoin de toute la matrice des éléments a_{jk}, mais seulement de l'une de ses lignes. Cette ligne est justement une variante x_j.

Le schéma logique de l'algorithme est présenté dans la fig. 1.

A l'aide de cet algorithme on a effectué à l'ordinateur DACCIC-1 des calculs concernant la détermination d'une recette optimale de coupe des profils linéaires. Les résultats obtenus ont conduit à l'augmentation de l'utilisation de la matière première, en arrivant à utiliser cette matière première dans la proportion de 98,5 %—99,2 %.

Institut de calcul de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie Filiale de Cluj

BIBLIOGRAPHIE

1. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. — *Линейное и выпуклое программирование*. Изд. „Наука". Москва, 1967.

O PROBLEMĂ DE CROIRE LINIARĂ

Rezumat

Problemele de croire conduc la probleme de programare matematică. În general matricea elementelor a_{ijs} este foarte mare. Din această cauză rezolvarea cu ajutorul unui calculator electronic a acestei probleme nu este ușoară. În lucrare se dă un algoritm de rezolvare aproximativă a unui caz particular de problemă de croire și anume cînd avem un singur tip de materie primă, bare de lungime L dată.

SUR LA REPRÉSENTATION DES ÉQUATIONS A QUATRE VARIABLES PAR DES NOMOGRAMMES COMPOSÉS A POINTS ALIGNÉS (III)

PAR

MARIA MIHOC

Communication présentée à la session scientifique jubilaire „A. Myller", Jassy, 20—25 août 1970

On utilise avec succès dans la pratique les nomogrammes à échelles réctilignes régulières ou projectives autant à cause de la simplicité de leur construction par rapport aux autres échelles fonctionnelles qu'à cause de leur plus grande précision. Les nomogrammes composés présentent de ce fait une plus grande utilité si des échelles rectilignes figurent parmi leurs éléments constitutifs.

Dans l'utilisation de certaines transformations afin d'obtenir des erreurs minimales au résultat, les échelles projectives présentent un intérêt particulier. En beaucoup de cas, les limites de variation des variables ou bien la forme des fonctions de ces variables exigent l'utilisation des échelles projectives.

Dans ce travail on recherche dans quelles conditions une équation à quatre variables peut être représentée à l'aide d'un nomogramme composé constitué de deux nomogrammes à points alignés et à échelles rectilignes projectives qui possèdent une échelle commune.

On considère l'équation à quatre variables de forme complète linéaire par rapport à chaque variable:

$$\begin{aligned} &A_0 xyzu + A_1 xyz + A_2 xyu + A_3 xzu + A_4 yzu + B_0 xy + \\ (1)\qquad &+ B_1 xz + B_2 xu + B_3 yz + B_4 yu + B_5 zu + C_0 x + C_1 y + \\ &+ C_2 z + C_3 u + D_0 = 0. \end{aligned}$$

Suivant un procédé analogue à celui présenté dans des Notes antérieures [2], [3], nous écrirons les équations de Soreau qui correspondent au nomogramme composé à échelles rectilignes projectives. Pour abaisser le