Conversely, let d be a positive integer and let T be an E-chain of right groups $\{T_{i+kd} : k \in I^0, 0 \leqslant i < d\}$ and $(n,r) \to \beta_{(n,r)}$ be a homomorphism of C into the semigroup of endomorphisms of T such that (1) *and* (2) *are valid. Then $\{((n,k), g_{ki}) : g_{ki} \in T_{i+kd}, n, k \in I^0, 0 \leqslant i < d\}$ under the multiplication* (3) *is a simple E-regular semigroup with d $\mathfrak{D}$-classes.*

Proof. The theorem is valid by lemma 9, remark 3, lemma 10, lemma 13, lemma 14, lemma 1, remark 1 and lemma 15.

REFERENCES

1. Clifford A. H. and Preston G. B. — *The algebraic theory of semigroups*. Math. Surveys of the American Math. Soc., 7, Vol. I, Providence, R. I., 1961.
2. Miller D. D. and Clifford A. H. — *Regular D-classes in semigroups*. Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), pp. 270 — 280.
3. Munn W. D. — *The idempotent separating congruences on a regular o-bisimple semigroup*. Proc. Edinburgh Math. Soc. 15 (1967), pp. 233 — 240.
4. Munn W. D. — *Regular ω-semigroups*. Glasgow Math. Journal, 9 (1968), pp. 46 — 66.
5. Warne R. J. — *Regular D-classes whose idempotents obey certain conditions*. Duke Math. Journal, 33 (1966), pp. 187 — 195.
6. Warne R. J. — *E-bisimple semigroups*, Journal of Natural Sciences, ord. Math., 10, № 2 (1970).
7. Warne R. J. — *E-regular-semigroups*, II, to appear.
8. Warne R. J. — *E-regular-semigroups, III*, to appear in La Ricerca.

SEMIGRUPURI *E*-REGULATE

Rezumat

În lucrare sînt studiate semigrupurile simple E-regulate. Rezultatul principal îl constituie o teoremă de structură pentru această categorie de semigrupuri.

Rezultatul este utilizat de către autor într-o altă Notă aflată sub tipar, în care sînt studiate semigrupurile simple E-regulate modulo un grup. Din acest punct de vedere prezenta lucrare constituie o verigă a unui lanț de Note, unele deja apărute, consacrate studiului semigrupurilor E-regulate.

RELATIONS ENTRE LES FONCTIONS ET LES SUITES PRESQUE-AUTOMORPHES

PAR

ANCA PRECUPANU

Communication présentée à la session scientifique jubilaire „A. Myller", Jassy, 20—25 août 1970

Le but de cette Note est de mettre en évidence deux propriétés de liaison entre les fonctions et les suites presque-automorphes, en généralisant les théorèmes 1.27 et 1.28 de [1], donnés par N. Gheorghiu [3] pour les fonctions presque-périodiques.

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations et les notions générales concernant la théorie des fonctions presque-automorphes (abrégé p. a.) de [4].

On désigne par: R — l'ensemble des nombres réels, Z — l'ensemble des nombres entiers, G — un sous-groupe de R, C — l'ensemble des nombres complexes.

Si $f: G \to C$ est une fonction sur G avec des valeurs complexes, on désigne par ${}_{\alpha}f(x) = f(x+\alpha)$, une translatée de f. Si $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \Gamma}$ est une suite généralisée de $G \subseteq R$ telle que $\lim\limits_{i \in \Gamma} {}_{\alpha_i}f = g$ au sens de la convergence ponctuelle sur G, alors on la désigne par $g = T_{\alpha} f$ et de même s'il existe $\lim\limits_{i \in \Gamma} {}_{-\alpha_i}g = h$ (ponctuellement sur G) on la désigne par $h = T_{-\alpha} g$.

Définition 1. *On dit qu'une fonction $f: G \to C$ est une fonction presque-automorphe au sens de Bochner, si chaque suite généralisée $\alpha' = \{\alpha'_i\}_{i \in \Gamma'}$, d'éléments de G contient une sous-suite généralisée $\alpha = \{\alpha_i\}_{i \in \Gamma}$ telle que:*

$$T_{-\alpha} T_{\alpha} f = f \tag{1}$$

soit remplie sur G.

En particulier, si $G = Z$, on obtient la définition d'une suite presque-automorphe au sens de Bochner.

Remarque. Il est clair que si la convergence de la définition 1 est uniforme, les suites dénombrables sont suffisantes et dans ce cas f devient une fonction presque-périodique classique.

Définition 2. *On dit qu'une fonction f définie et continue sur R avec les valeurs dans C est compactement presque automorphe* (abrégé c. p. a.) *si chaque suite $\alpha' = \{\alpha'_i\}_{i\in Z}$ contient une sous-suite $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in Z}$ telle que les limites*

$$T_\alpha f = g \text{ et } T_{-\alpha} g = f \tag{2}$$

existent au sens de la convergence uniforme sur les ensembles compacts de R.

Définition 3. *Un ensemble $A \subset G$ est dit relativement dense dans G au sens de Veech s'il existe n éléments $s_1, \ldots, s_n$ appartenant à G, tels que $G = \bigcup_{i=1}^{n} (s_i + A)$.*

Définition 4. *Un ensemble $A \subset G$ est dit relativement dense dans G au sens de Bohr s'il existe un nombre réel $L > 0$ tel que $[x - L, x] \cap A \neq \emptyset$ pour chaque $x \in G$.*

Dans [4], Veech a démontré (Théorème 2.2.1) que la définition 1 des fonctions presque-automorphes au sens de Bochner est équivalente à la définition suivante des fonctions p. a. au sens de Bohr :

Définition 5. *On dit qu'une fonction bornée $f: G \to C$ est presque-automorphe au sens de Bohr si, pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque ensemble fini $N \subset G$, il existe un ensemble $B_\varepsilon = B(N; \varepsilon) \subset G$ tel que*

I. *B_ε soit relativement dense dans G au sens de Veech,*

II. *$B_\varepsilon = -B_\varepsilon$ (B_ε est un ensemble symétrique),*

III. *$s \in B_\varepsilon$ et $t \in N$ entraînent $|f(t+s) - f(t)| < \varepsilon$,*

IV. *$s, r \in B_\varepsilon$ et $t \in N$ entraînent $|f(t+s-r) - f(t)| < 2\varepsilon$.*

En particulier, pour $G = Z$ on obtient la définition d'une suite presque-automorphe au sens de Bohr.

La première propriété de liaison entre les fonctions et les suites p. a. au sens de Bohr est donnée par le

Théorème 1. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $\{a_n\}_{n\in Z}$ de nombres réels soit p. a. est l'existence d'une fonction f, compactement presque-automorphe sur R, telle que $a_n = f(n)$ pour chaque $n \in Z$.*

Démonstration. La condition est suffisante parce que si f est c. p. a., alors grâce au lemme 1 de [2] f est uniformément continue et presque-automorphe au sens de Bochner sur R, donc il en est de même sur Z, c'est-à-dire $a_n = f(n)$ (pour $n \in Z$) est une suite p. a.

Inversement, si $\{a_n\}_{n\in Z}$ est une suite p. a., on peut définir une fonction de variable réelle par

$$f(x) = a_n + (x - n)(a_{n+1} - a_n) \text{ pour } n \leqslant x < n+1,\ n \in Z, \tag{3}$$

appelée la fonction polygonale associée à la suite $\{a_n\}_{n\in Z}$.

Comme $a_n = f(n)$ pour chaque $n \in Z$ et $f(x)$ est une fonction uniformément continue, il reste à prouver que f est presque-automorphe sur R.

Si on désigne par $[x]$ le plus grand entier compris dans x, on voit aisément que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$ tel que :

$$|f([x] + m) - f([x])| < \delta \text{ et} \tag{4}$$

$$|f([x] + m + 1) - f([x] + 1)| < \delta, \tag{5}$$

d'où, grâce à (3), on obtient pour chaque $m \in Z$:

$$|f(x+m) - f(x)| \leqslant 2f([x] + m) - f([x]) + f([x] + m + 1) - f([x] + 1)$$

c'est-à-dire f satisfait aux hypothèses du théorème 1 de [2]. Ceci étant, il résulte que la fonction f est c. p. a. (q. e. d.).

D'autre part, on peut caractériser les fonctions compactement presque-automorphes à l'aide des suites presque-automorphes.

Théorème 2. *Pour que la fonction f définie sur R soit compactement presque-automorphe il faut et il suffit que cette fonction soit uniformément continue sur R et qu'il existe une suite de nombres positifs $\{\delta_k\}$ convergente vers zéro, telle que les suites $\{f(n\delta_k)\}_{n\in Z}$ soient presque-automorphes.*

Démonstration. La condition est nécessaire. En effet, si f est une fonction compactement presque-automorphe, alors d'après le lemme 1 de [2], il résulte que f est uniformément continue et presque-automorphe au sens de Bochner sur R. Mais comme on a $T_{-\alpha} T_\alpha f(y) = f(y)$ pour chaque $y \in R$, en prenant $y = x\delta$, où $x \in R$ et $\delta > 0$, on obtient aussi $T_{-\alpha} T_\alpha f(x\delta) = f(x\delta)$, c'est-à-dire la fonction $f(x\delta)$ est presque-automorphe au sens de Bochner sur R, donc $\{f(n\delta)\}_{n\in Z}$ est une suite p. a. pour chaque $\delta > 0$. Ceci montre que toutes les suites $f(n\delta_k)_{n\in Z}$ sont presque-automorphes et donc la condition est nécessaire.

Réciproquement, soit f une fonction avec les propriétés de l'énoncé. Comme f est uniformément continue sur R, il résulte que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ pour } |x' - x''| < \delta. \tag{6}$$

En vertu des hypothèses faites, il existe δ_k tels que :

$$\delta_k < \delta \text{ pour } k \text{ suffisamment grand.} \tag{7}$$

D'autre part, soit $M' = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ un ensemble arbitraire fini de nombres réels. Mais pour chaque $t_i \in M'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ il existe un nombre entier n_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tel que :

$$n_i \delta_k \leqslant t_i < (n_i + 1)\delta_k. \tag{8}$$

Désignons par N, l'ensemble des nombres entiers $n_1, n_2, \ldots, n_n$. Comme $\{f(n\delta_k)\}_{n\in Z}$ est une suite presque-automorphe, il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ et tout ensemble fini N de nombres entiers il existe un ensemble

B_ε, pour lequel les conditions I – IV de la définition 5 soient remplies, lorsque $G = Z$.

Désignons par $B' = \bigcup_{p \in B_\varepsilon} [(p-1)\,\delta_k,\ (p+1)\,\delta_k]$. Nous allons démontrer les conditions I – IV de la définition 5 pour cet ensemble lorsque $G = R$.

La propriété II pour B' résulte aussitôt de la condition similaire pour B_ε.

Montrons maintenant la condition I pour B', c'est-à-dire la densité relative au sens de Veech pour $G = R$.

Comme B_ε est un ensemble relativement dense au sens de Veech dans Z, grâce au lemme 2 de [2], il résulte que l'ensemble B_ε est relativement dense au sens de Bohr dans Z. Donc il existe un entier L tel que $[p-L, p] \cap B_\varepsilon \neq \emptyset$ pour chaque $p \in Z$.

Soient $M = L + 1$ et $x \in R$ arbitrairement choisis. Comme

$$\left[\left[\frac{x}{\delta_k}\right] - L, \left[\frac{x}{\delta_k}\right]\right] \subset \left[\frac{x}{\delta_k} - M, \frac{x}{\delta_k}\right],$$ il résulte $$\left[\frac{x}{\delta_k} - M, \frac{x}{\delta_k}\right] \cap B_\varepsilon \neq \emptyset,$$ ce qui entraîne l'existence d'un élément $p \in B_\varepsilon$ tel que $p \in \left[\frac{x}{\delta_k} - M, \frac{x}{\delta_k}\right]$, d'où on a:

$$x \in \left[(p-1)\,\delta_k, (p+M)\,\delta_k\right] = \bigcup_{j=0}^{M} \{j\delta_k + [(p-1)\,\delta_k,\ (p+1)\,\delta_k]\} =$$
$$= \bigcup_{j=0}^{M} (a_j + [(p-1)\,\delta_k,\ (p+1)\,\delta_k] \subset \bigcup_{j=0}^{M} (a_j + B').$$

Par conséquent, $R = \bigcup_{j=0}^{M} (a_j + B')$, c'est-à-dire B' est relativement dense au sens de Veech dans R.

Pour démontrer III pour l'ensemble B', soient $s \in B'$ et $t_i \in M'$ arbitrairement choisis. Il existe alors $p_0 \in B_\varepsilon$ tel que $s \in [(p_0 - 1)\,\delta_k, (p_0 + 1)\,\delta_k]$ mais comme

$$f(t_i + s) - f(t_i) = f(t_i + s) - f(n_i\,\delta_k + s) + f(n_i\,\delta_k + s) -$$
$$- f(n_i\,\delta_k + p_0\,\delta_k) + f(n_i\,\delta_k + p_0\,\delta_k) - f(n_i\,\delta_k) + f(n_i\,\delta_k) - f(t_i),$$

il résulte, en utilisant les relations (6), (7), (8) et la condition III de la définition 5 pour B_ε, qu'on a:

$$|f(t_i + s) - f(t_i)| < 4\varepsilon.$$

De même on peut démontrer que si $s, r \in B'$ et $t_i \in M'$, on a

$$|f(t_i + s - r) - f(t_i)| < 5\varepsilon,$$

cest-à-dire la condition IV de la définition 5 est remplie pour B'.

Ceci montre que les quatre conditions de la définition 5 sont remplies pour B' lorsque $G = R$, ce qui entraîne la propriété de presque-automorphie sur R de la fonction f. Enfin, en combinant la presque-automorphie de f et la propriété d'uniforme continuité donnée par hypothèse, on obtient que f est c. a. a.

Remarque. Les résultats trouvés ci-dessus montrent que les fonctions compactement presque-automorphes peuvent être obtenues d'une classe de fonctions très simples, la famille des fonctions polygonales presque-automorphes, ce qui peut simplifier certaines démonstrations de la théorie des fonctions presque-automorphes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Almost periodic functions.* John Wiley, New York, 1968.
2. Fink A. M. — *Extensions of almost automorphic sequences.* Journal of Mathematical Analysis and applications, vol. 27, No. 3, (1969), p. 519 – 523.
3. Gheorghiu N. — *Funcţii aproape-periodice de variabilă continuă şi de variabilă întreagă.* An. şt. Univ. Iaşi, secţ. I, t. II (1956), p. 29 – 31.
4. Veech W. A. — *Almost automorphic functions on groups.* Amer. Journ. of Math., vol. LXXXVII, No. 3 (1965), p. 719.

PROPRIETĂŢI DE LEGĂTURA ÎNTRE ŞIRURI ŞI FUNCŢII APROAPE AUTOMORFE

Rezumat

În această Notă se dau două proprietăţi de legătură între şiruri şi funcţii aproape automorfe, urmărind pe de o parte caracterizarea funcţiilor aproape automorfe cu ajutorul şirurilor aproape automorfe iar pe de altă parte caracterizarea şirurilor aproape automorfe cu ajutorul funcţiilor aproape automorfe. În acest fel se extind la cazul funcţiilor aproape automorfe două rezultate date de N. Gheorghiu în [3] pentru funcţiile aproape periodice.