UNE PROPRIÉTÉ DES TREILLIS FINIS ET DISTRIBUTIFS

PAR

GHEORGHE PIC

1. Soit V un treillis complet distributif, soit 1 son élément universel et 0 son élément nul. Un élément $v \in V$ est appelé un complément de $u \in V$ si

$$u \bigcup v = 1, \quad u \bigcap v = 0.$$

Cette notion peut être généralisée de la manière suivante:

Définition 1. *Un ensemble M d'éléments du treillis V est une transversale, si l'intersection de tous les éléments de M est égale à 0 et la réunion à 1.*

La transversale est irréductible si l'ensemble M cesse d'être une transversale après l'écartement d'un de ses éléments.

Une transversale qui contient l'élément 0 ou 1 s'appelle transversale triviale.

Le cardinal d'une transversale irréductible s'appelle sa largeur.

Dans un treillis qui n'est pas une algèbre booléenne un élément peut appartenir à plusieurs transversales irréductibles, mais il peut arriver qu'un élément n'appartienne à aucune transversale. Nous arrivons ainsi à la notion suivante:

Définition 2. *L'élément a du treillis V est singulier, s'il n'y a aucune transversale irréductible et non triviale dont a est un élément.*

Le treillis V est singulier s'il n'a aucune transversale non triviale et irréductible.

Un treillis distributif est supérieurement singulier si $V \setminus \{1\}$ est un treillis.

Le treillis inférieurement singulier est défini de la même manière.

Naturellement les éléments 0 et 1 sont des éléments singuliers.

Définition 3. *L'élément $u\in V$ est inférieurement singulier si de $u\cap v=0$ il suit $v=0$.*

Un élément inférieurement singulier est aussi singulier mais la réciproque ne subsiste pas toujours. Tous les éléments d'un treillis inférieurement singulier, sont aussi inférieurement singuliers.

Dans ce travail nous montrerons que dans un treillis fini et distributif un élément est singulier, ou il appartient à une transversale de largeur 2, 3 ou 4. On donne aussi des critères pour apprécier la largeur minimale des transversales des éléments de V. On y arrive à l'aide du „radical" du treillis V.

On peut aussi se demander si les résultats obtenus sont valables pour des treillis infinis. Cette question reste ouverte. Nous remarquons seulement que les démonstrations données ici reposent sur la propriété que chaque idéal est un idéal principal. Mais cela, selon un résultat de Dillworth, est équivalent à la condition de limitation supérieure et inférieure et donc, selon Birkhoff, le treillis est fini. Enfin nous montrerons que, dans les hypothèses faites, chaque treillis V' distributif et fini peut être plongé dans un treillis V' de même nature et qu'en V' chaque élément distinct de 0 et 1 appartient à une transversale dont la largeur est au plus égale à 3. On donne aussi des indications sur le nombre des éléments de V'. Dans ce qui suit V est toujours un treillis non singulier, fini et distributif. Observons que plusieurs résultats subsistent aussi pour les treillis infinis et distributifs.

Les notations sont celles du livre de Hermes [1].

2. Nous donnerons auparavant quelques résultats dont une partie est probablement connue, mais qui seront énumérés ici afin d'avoir un exposé complet. Les résultats et démonstrations duales subsistent aussi mais ils ne seront pas indiqués.

Lemme 1. *Soit V' un soustreillis de V et P un $\cup$-idéal premier de V. Alors $Q=V'\cap P$ est un idéal premier de V'.*

Démonstration. $u,v\in Q$ nous donne $u\cup v\in P$. En outre $u\cup v\in V'$, donc aussi $u\cup v\in Q$. Soit $u\in Q$, $v\in V'$ est $v\leqslant u$. Alors aussi $v\in P$ parceque P est un $\cup$-idéal. Donc $v\in Q$ et Q est un $\cup$-idéal.

Soit maintenant $u,v\in V'$ et $u\cap v\in Q$. Alors $u\cap v\in P$ et comme P est un $\cup$-idéal premier de V il s'en suit qu'au moins un de ces éléments appartient aussi à P et donc aussi à Q.

Lemme 2. *Soit P un $\cup$-idéal premier du treillis V et $Q=V\setminus P$. Alors Q est un $\cap$-idéal premier de V.*

Ce résultat appartient à Nachbin [2].

Inversement nous avons:

Lemme 3. *Soit J un $\cup$-idéal du treillis V et $D=V\setminus J$ un $\cap$-idéal. Alors J et D sont premiers en V.*

Démonstration. Soit $u,v\in V$ et $u\cap v\in J$. Alors au moins un des éléments u ou v est élément de J. En effet, dans l'hypothèse contraire, nous aurions $u\in D$ et $v\in D$. Mais D est un $\cap$-idéal, donc $u\cap v\in D$ en contradiction avec les hypothèses faites.

Lemme 4. *Soit D un $\cap$-idéal de V et P un $\cup$-idéal premier de D. Soit Q l'ensemble des éléments $x\in V$ tels que x est au plus égal à un élément de P. Alors Q est un $\cup$-idéal premier de V et $P=D\cap Q$.*

Démonstration. Q est un $\cup$-idéal parce que de $u,v\in Q$ il s'ensuit l'existence de deux éléments $u',v'\in P$ tels que $u\leqslant u'$, $v\leqslant v'$ et par conséquent $u\cup v\leqslant u'\cup v'$. P étant un $\cup$-idéal on a $u'\cup v'\in P$ et donc $u\cup v\in Q$.

Q est premier en V. En effet si $u\cap v\in Q$ et $u\cap v\leqslant w\in P$, alors $(u\cap v)\cup w=(u\cup w)\cap(v\cup w)=w\in P$. D étant un $\cap$-idéal, nous déduisons $u\cup w\in D$ et $v\cup w\in D$. Mais P est premier pour D, donc au moins un des éléments $u\cup w$ ou $v\cup w$ est un élément de P. $u\cup w\in P$ donne $u\in Q$ parceque $u\leqslant u\cup w$.

Lemme 5. *Soit D un $\cap$-idéal maximal de V et Q un idéal premier. Alors $P=D\cap Q$ est un $\cap$-idéal maximal de Q.*

Démonstration. Supposons le contraire. Soit P' un $\cap$-idéal maximal qui contient P. P' sera donc aussi un idéal premier.

Par suite du résultat dual au lemme 4, P' détermine un $\cap$-idéal D' de V, qui contient D comme sous-ensemble. Mais cela vient en contradiction avec l'hypothèse que D est maximal dans V.

Lemme 6. *Soit P un $\cup$-idéal maximal de V et u son élément maximal. Alors pour chaque $v\in V\setminus P$ $u\cup v=1$.*

Démonstration. P étant maximal un résultat de Nachbin [2] montre que pour chaque élément $u\in V\setminus P$ il existe un élément $w\in P$, tel que $v\cup w=1$, comme $w<u$ nous aurons aussi $v\cup u=1$.

3. **Définition 4.** *Soient $P_j(j\in I)$ les $\cup$-idéaux premiers minimaux du treillis V. L'ensemble*

$$R_s(V)=V\setminus\sum_{j\in I}P_j$$

s'appelle le radical supérieur du treillis V.

Le radical inférieur $R_i(V)$ est défini dualement.

Théorème 1. *$R_s(V)$ est l'intersection de tous les $\cap$-idéaux maximaux de V.*

Démonstration. Soit $u\in R_s(V)$. Cela signifie que u n'est élément d'aucun des $\cup$-idéaux premiers minimaux, P_j de V. Par conséquent, pour chaque $j\in I$, $u\in V\setminus P_j=Q_j$. Comme Q_j est un $\cap$-idéal maximal il résulte que $R_s(V)\subseteq\bigcap_{j\in I}Q_j$.

Soit maintenant $u\in\bigcap_{j\in I}Q_j$. Donc pour chaque $j\in I$ $u\notin V\setminus Q_j=P_j$ et cela signifie $\bigcap_{j\in I}Q_j\subseteq R_s(V)$.

Le théorème 1 nous donne :

Lemme 7. *$R_s(V)$ est un $\cap$-idéal.*

Lemme 8. *Soit $u \in R_s(V)$ $(u \neq 0)$ et $u \cap v = 0$. Alors $v = 0$.*

Démonstration. Supposons que $v \neq 0$. Alors v est élément d'au moins un $\cap$-idéal premier maximal de V. Comme $u \in R_s(V)$ il suit que $u \in P$ et donc $u \cap v \in P$. Mais alors $u \cap v \neq 0$ en contradiction avec la supposition faite.

Lemme 9. *Soit M un $\cap$-idéal du treillis V. Alors*

$$R_s(M) \subseteq R_s(V) \cap M, \tag{1}$$

$$R_i(M) \supseteq R_i(V) \cap M. \tag{2}$$

Démonstration. Pour démontrer (1) nous supposerons que $u \in M$ et $u \notin R_s(V) \cap M$. La définition 4 montre que u est un élément d'un $\cup$-idéal premier minimal P de V. Du lemme 1 il résulte que $P \cap M$ est un $\cup$-idéal premier Q de M et un raisonnement analogue à la démonstration du lemme 5 montre que Q est minimal dans M. Donc $u \notin R_s(M)$ et cela donne (1). On n'a pas toujours l'égalité dans (1). Cela est visible pour le treillis représenté dans la fig. 1. Dans celui-ci nous avons $R_s(V) = \{1, 3\}$. Soit $M = \{1, 2, 3, 4\}$. Alors $R_s(M) = \{1\}$ et cependant $R_s(V) \cap M = \{1, 3\}$.

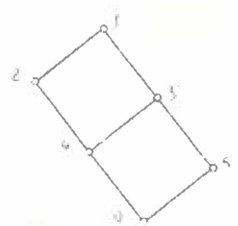

Fig. 1

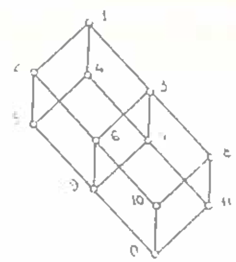

Fig. 2

Nous allons maintenant démontrer (2). Soit $u \in R_i(V) \cap M$. Le théorème (1) nous donne $R_i(V) = \bigcap_{j \in I} P_j$, P_j étant un $\cup$-idéal maximal de V. Par conséquent $R_i(V) \cap M \subset (\bigcap_{j \in I'} P_j) \cap M = \bigcap_{j \in I'} (P_j \cap M)$ ou $P_j (j \in I')$ est un $\cup$-idéal premier maximal où V, qui a une intersection non-vide avec M. Selon le lemme 1, $P_j \cap M (j \in I')$ est un $\cup$-idéal premier de M et donc, selon le lemme 5, maximal dans M. Donc (2) subsiste.

Pour (2) nous n'avons pas toujours l'égalité, comme le montre le treillis représenté dans la figure 2. Dans ce cas $R_i(V) = \{0, 9\}$. Soit $M = \{1, 3, 4, 7, 8, 11\}$. Alors $R_i(V) \cap M = \emptyset$ et $R_i(M) = \{7, 11\}$.

Lemme 10. *Soit P un $\cup$-idéal premier minimal qui contient $R_i(V)$. Alors P est en même temps maximal.*

Démonstration. Supposons le contraire et soit P' un idéal premier, qui contient P. Soit $Q = V \setminus P$, $Q' = V \setminus P'$, donc $Q' \subset Q$. Soit u un élément minimal de Q. Alors $u \notin P$ donc $u \notin R_i(V)$ et par suite, par la définition 4, u est un élément d'un $\cap$-idéal premier minimal Q^*. Mais u est minimal dans Q, donc $Q \subseteq Q^*$ et $Q' \subset Q$, en contradiction avec le fait que Q^* est minimal.

4. En dehors du radical supérieur et inférieur nous avons besoin aussi d'autres radicaux.

Définition 5. *Un $\cup$-idéal premier P du treillis V est presque maximal si l'une ou l'autre des conditions suivantes est vérifiée:*

a) P est en même temps minimal et maximal pour V;

b) chaque chaîne d'idéaux ascendante de $\cup$-idéaux premiers distincts dont le premier terme est P a 2 termes.

De la même manière on définit à l'aide d'une chaîne descendante l'idéal presque-minimal.

Définition 6. *Si $P_j^* (j \in I')$ sont les $\cup$-idéaux premiers presque-maximaux du treillis V alors l'ensemble*

$$R_s^*(V) = V \setminus \sum_{j \in I'} P_j$$

s'appelle le semiradical supérieur de V.

On démontre comme pour le théorème 1

Lemme 11. *$R_s^*(V)$ est l'intersection des $\cap$-idéaux presque minimaux de V.*

Lemme 12. *$R_s^*(V)$ est une algèbre booléenne.*

Démonstration. Le lemme précédent montre que $R_s^*(V)$ est un $\cap$-idéal de V. Soit P un $\cup$-idéal premier de $R_s^*(V)$ et $u \in P$. Le lemme 4 montre que P un $\cup$-idéal premier de V. Donc, si P n'est pas maximal dans $R_s^*(V)$ alors, comme il suit de la définition 6, $u \notin R_s^*(V)$ et cela est en contradiction avec l'hypothèse faite. Donc P est maximal et $R_s^*(V)$ est, d'après un théorème de Nachbin, une algèbre booléenne.

Lemme 13. *Soit $1'$ l'élément maximal de $R_i(V)$, 0^* l'élément minimal de $R_s^*(V)$. Alors*

$$0^* > 1'.$$

Démonstration. $R_s^*(V)$ étant une algèbre booléenne, 0^* est l'intersection des $\cup$-idéaux premiers de $R_s^*(V)$. Ces idéaux sont en même temps maximaux dans $R_s^*(V)$. Des lemmes 4 et 5 il résulte que chaque $\cup$-idéal premier maximal de $R_s^*(V)$ détermine un idéal analogue de V et ceux-ci ont une intersection D, qui est un $\bigcup$-idéal de V, dont l'élément maximal est 0^*. Mais $R_i(V)$ est l'intersection de tous les $\bigcup$-idéaux premiers maximaux de V et non seulement de ceux qui ont avec $R_s^*(V)$ une intersection non vide. Donc $D \supseteq R_i(V)$ et d'ici l'affirmation faite.

5. Les résultats obtenus permettent de caractériser les éléments du treillis V. Ceux-ci appartiendront à un des ensembles A, B, C, D, suivants:

$$\begin{aligned}
A&: \quad u \in V \setminus R_i(V) \text{ et } u \in V \setminus R_s(V),\\
B&: \quad u \in R_i(V) \quad \text{ et } u \in R_s(V),\\
C&: \quad u \in R_i(V) \quad \text{ et } u \in V \setminus R_s(V),\\
D&: \quad u \in V \setminus R_i(V) \text{ et } u \in R_s(V).
\end{aligned}$$

Théorème 2. *Les éléments de l'ensemble A appartiennent à des transversales de largeur au plus 3.*

Démonstration. Soit $u \in A$. Puisque $u \notin R_s(V)$ il y a un $\bigcup$-idéal premier minimal P tel que $u \in P$. Soit $Q = V \setminus P$; Q est selon le lemme 1 un $\bigcap$-idéal premier maximal de V. Soit a l'élément minimal de Q. Alors le dual du lemme 6 nous montre que $u \cap a = 0$. Si $u \cup a = 1$ alors notre lemme est demontré. Dans le cas contraire, puisque $u \notin R_i(V)$ il y a un élément $b \in V$ tel que $u \cup b = 1$. Si $u \cap b = 0$ notre théorème est démontré. Si $u \cap b \neq 0$ alors (u, a, b) est la transversale irréductible cherchée. Pour le démontrer il suffit de montrer que $a \cap b \neq 0$. $b \in Q$ puisque si $b \notin Q$ alors $b \in P$ et par conséquent $u \cup b \in P$ donc $u \cup b \neq 1$ en contradiction avec ce que nous avons supposé sur b. De $b \in Q$ et $a \in Q$ il suit que $a \cap b \neq 0$, parce que a est l'élément minimal de Q.

Théorème 3. *Les éléments de l'ensemble B sont singuliers.*

Démonstration. Soit $u \in b$, $0'$ l'élément minimal de $R_1(V)$, 1^* l'élément maximal de $R_i^*(V)$. Supposons que u n'est pas singulier. Alors il y a une transversale irréductible $(x_1, \ldots, x_n, u)$. Par conséquent ou bien $x \cap, \ldots, \cap x_n = a \neq 0$ ou $x \cup, \ldots, \cup x_n = b \neq 1$. Soit $a \neq 0$ et $a \cap u = 0$, $a \notin R_i^*(V)$, parce que dans le cas contraire $a \leqslant 1^*$. Le lemme dual du lemme 13 nous donne $1^* \leqslant 0'$, et comme $0' \leqslant u$ il s'ensuit que $a \cap u = a$ en contradiction avec l'hypothèse faite. $a \notin R_i^*(V)$ signifie que a est un élément d'un $\bigcap$-idéal premier presque maximal Q et donc aussi d'un $\bigcap$-idéal premier maximal $Q' \cdot R_s(V)$ étant selon le théorème 1 l'intersection des $\bigcap$-idéaux premiers maximaux, il résulte que $u \in R_s(V) \subset Q'$. Donc $a \cap u \neq 0$ en contradiction avec l'hypothèse faite.

De la même manière on montre que $b \cup u \neq 1$ et donc l'hypothèse de l'existence d'une transversale irréductible de u est contradictoire.

Pour étudier la nature des éléments de C (et de manière duale de ceux de D) nous distinguerons deux cas:

a) l'ensemble B n'est pas vide;
b) l'ensemble B est vide.

a) Nous avons besoin dans ce qui suit du

Lemme 14. *Soit u un élément d'un $\bigcup$-idéal premier P qui n'est pas en même temps maximal. Alors u appartient à une transversale de largeur au plus 4.*

Démonstration. Soit $Q = V \setminus P$. P n'étant pas maximal il y a un $\bigcup$-idéal premier maximal P' tel qui $P \subseteq P'$ et $Q \cap P'$ est un $\bigcup$-idéal premier maximal de Q. Soit b son élément maximal, c l'élément minimal de $V \setminus P'$ et d l'élément minimal de Q. Alors $u \cap d = 0$; $b \cup c = 1$ et u sera un élément (a, b, c, d). (b, c, d) n'est pas une transversale de V parceque b, c, d sont éléments de Q.

Théorème 4. *Si l'ensemble B n'est pas vide, alors tous les éléments des ensembles C et D appartiennent à des transversales, dont la largeur est au plus 4.*

Démonstration. Nous démontrerons le théorème pour les éléments de l'ensemble C.

De $B \neq \emptyset$ il résulte qu'il y a un élément u tel que $u \in R_s(V)$ et $u \in R_i(V)$, 1 étant l'élément maximal de $R_i(V)$ il s'ensuit $u \leqslant 1'$. Mais $R_s(V)$ est un $\bigcap$-idéal et $u \in R_s(V)$ donc $1' \in R_s(V)$.

Soit maintenant $u \in C$ et $u \in P$ où P est un $\bigcup$-idéal premier. $1' \in R_s(V)$ nous donne que $1' \in P$. $1'$ est par suite du théorème dual du théorème 1 un élément de tous les $\bigcup$-idéaux premiers maximaux de V. Donc P n'est pas maximal. Notre théorème suit maintenant du lemme 14.

Les théorèmes 1, 3, 4 donnent la caractérisation de tous les éléments de V si $B \neq \emptyset$.

b) $1' \notin R_s(V)$ parceque l'ensemble B est vide. Il y a donc au moins un $\bigcup$-idéal premier minimal, tel que $1' \in P$ et le lemme 10 nous montre que celui-ci est maximal. Nous avons donc:

Lemme 15. *Un treillis pour lequel l'ensemble B est vide a au moins une transversale de largeur 2.*

Démonstration. Soit u l'élément maximal de P et v l'élément minimal de $Q = V \setminus P$. Alors les lemmes 6 et 10 nous donnent

$$u \cup v = 1; \quad u \cap v = 0.$$

Soit P un $\bigcup$-idéal minimal premier tel que $1' \in P$. Dans ce qui suit nous distinguerons deux cas c'est-à-dire b_1) $Q = V \setminus P$ n'est pas supérieurement singulier et b_2) Q est supérieurement singulier.

Dans le cas b_1) tous ces éléments de C sont aussi des éléments de P. Cela nous conduit au

Théorème 5. *Soit V un treillis pour lequel B est vide. Soit P un $\bigcup$-idéal premier minimal tel que $1' \in P$ et $Q = V \setminus P$ n'est pas supérieurement singulier. Alors tous les éléments de C appartiennent à des transversales de largeur au plus 4.*

Démonstration. Nous démontrerons un résultat plus précis en établissant que tous les éléments de P ont cette propriété.

Q n'étant pas supérieurement singulier il y a au moins deux éléments $a, b \in Q$ tels que $a \neq 1$, $b \neq 1$ et $a \cup b = 1$. Soit c l'élément minimal de Q. Alors le lemme 6 nous donne pour chaque $u \in P$ $u \cap c = 0$, et (u, a, b, c) sera une transversale dont on ne peut éloigner u parceque a, b, c sont des éléments de Q.

Les théorèmes 2, 5 et le dual de 5 caractérisent les éléments de V dans le cas b_1).

Pour le cas b_2) nous avons encore besoin du

Lemme 16. *Soit P un $\cup$-idéal premier minimal, tel que $1' \in P$. Si $Q = V \setminus P$ est supérieurement singulier, alors il n'y a pas un autre $\cup$-idéal premier minimal qui contient $1'$.*

Démonstration. Supposons le contraire et soit P' un autre $\cup$-idéal premier et minimal, qui contient $1'$, soit b l'élément maximal de P'. Soit $c \in Q$ avec $c \notin P'$. Alors $c \cup b = 1$ et cela vient en contradiction avec l'hypothèse que Q et supérieurement singulier.

La condition que Q est supérieurement singulier est essentielle. L'exemple suivant nous montre que le lemme ne subsiste plus si la condition n'est pas vérifiée.

Soit V le treillis représenté dans la fig. 2. Alors $R_i(V) = \{0, 9\}$ et $P = \{0, 11, 9, 7, 5, 3\}$ et $P' = \{0, 9, 10, 5, 6, 2\}$ sont deux $\cup$-idéaux premiers, qui contiennent $1'$.

Lemme 17. *Soit V un treillis pour lequel l'ensemble B est vide. Soit P un $\cup$-idéal premier minimal, qui contient $1'$ et soit $Q = V \setminus P$ un $\cap$-idéal premier, qui est supérieurement singulier. Alors P et supérieurement singulier et les treillis P et Q sont isomorphes.*

Démonstration. Remarquons premièrement que, dans le cas considéré par nous, V ne peut être supérieurement singulier, parce que dans le cas contraire $\{1\}$ serait le seul $\cap$-idéal premier minimal de V et alors $R_i(V) = V \setminus \{1\}$. $R_s(V) \neq \{1\}$ parce que dans le cas contraire V serait, selon [3], une algèbre de Boole et par conséquent ne serait supérieurement singulier à l'exception du cas $V = \{0, 1\}$, exclu du notre raisonnement. Mais du fait que $R_i(V) = V \setminus \{1\}$ et $R_s(V) \neq \{1\}$ il résulte que l'ensemble B n'est pas vide.

Selon le théorème 1, $R_s(V) \subseteq Q$. Q étant supérieurement singulier, l'ensemble des éléments de Q plus petits de 1 est un $\cup$-idéal. Soit w son élément maximal.

Nous montrerons que $R_s(V) = \{1, w\}$ et par suite que $w = 0^*$.

L'$\cup$-idéal P' des éléments de V plus petits ou au plus égaux à w étant maximal, il est premier et contient $1'$. Le lemme 16 montre que P' ne peut être un $\cup$-idéal premier minimal. Donc de la définition de $R_s^*(V)$ il résulte que $w \in R_s^*(V)$. $R_s^*(V)$ ne peut contenir en dehors de 1 et w aucun autre élément, parceque ceux-ci formeraient avec 1 et w un treillis qui serait supérieurement singulier, donc pas une algèbre de Boole, en contradiction avec le lemme 12.

Soit u l'élément maximal de P. P est selon le lemme 10 maximal et par suite l'ensemble des éléments de V plus petits que 1 et plus grands que u est vide. V, à l'encontre de Q, n'étant pas supérieurement singulier nous aurons $u \cap 0^* = 1$. Soit $u \cap 0^* = v$. Le treillis V étant distributif, est en même temps modulaire. Cella nous donne que le soustreillis des éléments $x \geqslant v$ est formé seulement de $1, u, 0^*, v$.

Soit w un élément de V tel que $w \leqslant u$. Nous montrerons qu'en même temps, $w < 0^*$ donc aussi $w \leqslant v$. Supposons que $w \nleq 0^*$ et que w est maximal par rapport à la propriété d'être plus petit que u. Alors $w \cap 0^* < 0^*$ et comme $R_s^*(V) = \{0^*, 1\}$ il suit que $w \cup 0^* = 1$. Les hypothèses faites et les résultats obtenus nous permettent d'établir que les éléments $w, u, v, 0^*, 1, w \cap 0^*$ formeront un soustreillis M de V, qui est représenté dans la fig. 3 et que, V étant distributif, est un $\cap$-idéal de V. Nous aurions donc $R_s(V) \cap M = \{1, 0^*\}$ et comme en même temps $R_s(M) = \{u, 1\}$ nous obtenons une contradiction avec la formule (1) du lemme 9. Le résultat obtenu nous montre donc que l'idéal engendré par u est un $\cap$-idéal premier de P.

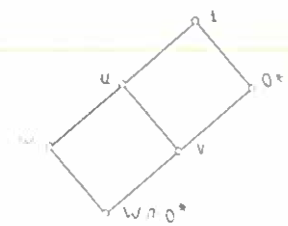

Fig. 3

Du lemme 10 il résulte que P est non seulement minimal mais aussi maximal, donc Q est minimal. Les seules $\cap$-idéaux minimaux et premiers de V sont donc Q et $\{1, u\}$, et par conséquent $R_i(V) = P \setminus \{u\}$. Cela signifie que P est supérieurement singulier de même que Q et que $v = 1'$.

Passons à la démonstration de la dernière partie de notre lemme. Soit $b' \leqslant 0^*$ un élément de Q et soit $b = v \cap b'$(*). v est un élément de P. De cette manière à chaque élément de Q qui n'est pas 1, correspond un élément de P. Nous montrerons que b est l'image d'un seul élément de Q.

Supposons que l'on a aussi $b = v \cap b''$ et $b' \neq b''$. Alors $b = v \cap (b' \cup b'')$. Supposons que $b' \cup b'' \neq b'$. Alors $\{b, v, 0^*, b' \cup b'', b'\}$ est un treillis non-modulaire, parce que $v \cup b' = v \cup b'' = 0^*$. Donc $b' = b''$.

A chaque élément $c \in P$ il correspond l'élément $c' = a \cup c \in Q$ où a est l'élément minimal de Q. On démontre comme auparavant que chaque élément de Q est l'image d'un seul élément de P. Cette application est l'inverse de celle définie plus haut, parce que $c' \cap v = (a \cup c) \cap v = (a \cap v) \cup (c \cap v) = 0 \cup c = c$. Il suit que les treillis P et Q sont isomorphes.

Théorème 6. *Soit V un treillis pour lequel l'ensemble B est vide et P un $\bigcup$-idéal premier minimal, qui contient $1'$. Si $Q = V \setminus P$ est supérieurement singulier, alors les éléments singuliers de C sont ceux qui, dans P, sont inférieurement singuliers, sans être trivialement singuliers. Les autres éléments de C appartiennent à des transversales dont la largeur est au plus 4.*

Démonstration. Soit $x \in P$ un élément inférieurement singulier, $x \neq u$ et $(x, u, y_1, \dots, y_k, z'_1, \dots, z'_h)$ une transversale de x telle que $y_s \in P$ $(s = 1, 2, \dots, k)$, $z'_t \in Q (t = 1, 2, \dots, k)$. Soit z_j l'élément de P qui est déduit de $z'_j \in Q$ par la transformation (*). Donc $z'_j = a \cup z_j$ et $z_j = z'_j \cap v$. Cette transversale irréductible doit contenir u. En effet les éléments z'_t étant au plus égaux à 0^* et les éléments de P aussi, nous aurions $x \cup y_1 \cup \dots \cup y_k \cup \cup z'_1 \cup \dots \cup z'_t \leqslant 0^*$ et donc $(x, y_1, \dots, y_k, z'_1, \dots, z'_k)$ ne serait pas une transversale. De

$$x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap z'_1 \cap \dots \cap z'_h = 0,$$

on déduit

$$\begin{aligned} & x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap (z_1 \cup a) \cap \dots \cap (z_h \cup a) = \\ & x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap [(z_1 \cap \dots \cap z_h) \cup a] = \\ & (x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap z_1 \cap \dots \cap z_h) \cup (x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_h \cap a) = 0, \end{aligned}$$

donc

$$x \cap u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap z_1 \cap \dots \cap z_h = 0,$$

et d'ici

$$\begin{aligned} & u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap z'_1 \cap \dots \cap z'_h \cap v = \\ & = u \cap (y_1 \cap v) \cap \dots \cap (y_k \cap v) \cap z'_1 \cap \dots \cap z'_h = \\ & = u \cap y_1 \cap \dots \cap y_k \cap z'_1 \cap \dots \cap z'_h = 0. \end{aligned}$$

De

$$x \cup u \cup y_1 \cup \dots \cup y_k \cup z'_1 \cup \dots \cup z'_h = 1,$$

nous déduisons en tenant compte du fait que $x < u$.

$$u \cup y_1 \cup \dots \cup y_k \cup z'_1 \cup \dots \cup z'_h = 1,$$

donc la transversale considerée est réductible; x par rapport à x est donc singulier dans V.

Pour démontrer la seconde partie du théorème nous utilisons un résultat obtenu au cours de la démonstration du lemme 17, à savoir que dans les hypothèses faites, $R_i(V) = P \setminus \{u\}$. Il nous reste à démontrer que ceux des éléments de P, qui ne sont pas inférieurement singuliers, appartiennent à des transversales de largeur au plus 4.

Si x n'est pas inférieurement singulier dans P, alors il y a un élément $y \in P$ $(y \neq 0)$ tel que $y \cap x = 0$. Comme $u \cup 0^* = 1$, il suit que $(x, y, u, 0)$ est une transversale irréductible par rapport de x, parce que $y \cap u \cap 0^* = y \neq 0$ $(y \leqslant u$ et $y \leqslant 0^*)$ comme nous l'avons vu à l'occasion de la démonstration du lemme 17.

6. Pour finir nous étudierons la possibilité d'inclusion du treillis V dans un autre treillis V' qui n'a pas d'éléments singuliers. On sait que chaque treillis distributif peut être plongé dans un treillis booléen. Nous donnerons dans ce qui suit des précisions sur V'.

Soit A le treillis formé par les éléments z_1 et z_2 avec $z_1 < z_2$. Soit $V^* = V \times A$ et

$$\bigcup_{j \in I} (u_j, z_j) = (\bigcup_{j \in I} u_j, \bigcup_{j \in I} z_j),$$

$$\bigcap_{j \in I} (u_j, z_j) = (\bigcap_{j \in I} u_j, \bigcap_{j \in I} z_j),$$

où z_j est égal à z_1 ou à z_2.

On voit aisément qu'avec les opérations introduites, V est un treillis distributif.

Lemme 18. *L'ensemble V_i formé pvr les paires $(x, z_1) \in V^*$ est un $\bigcup$-idéal minimal premier de V^*.*

Démonstration. V_i est un idéal premier, parce que si $(x, z_2), (y, z_2) \in V^* \setminus V_i$ alors $(x, z_2) \cap (y, z_2) = (x \cap y, z_2) \notin V_i$. Nous verrons que V_1 est comme $\bigcup$-idéal premier minimal. En effet si V'_i est un autre $\bigcup$-idéal premier et $V'_i \subset V_i$ et $(x, z_1) \in V'_i$. Alors nous avons aussi $(0, z_1) \in V'_i$ et alors $(1, z_1) \cap (0, z_2) = (0, z_1) \in V'_i$ et cela signifie que V'_i n'est pas premier parce que $(1, z_1) \notin V'_i$ et $(0, z_2) \notin V'_i$.

Lemme 19. *L'ensemble des éléments (u, z_i) $(i = 1, 2)$ est un $\bigcup$-idéal premier minimal P^* de V^*, autre que V_1, si et seulement si l'ensemble des éléments u est un $\bigcup$-idéal premier P de V.*

Démonstration. Nous constatons d'abord que l'ensemble des éléments (v, z_1) et (v, z_2) avec $v \in P$ forment un $\bigcup$-idéal premier de V^*. En effet si $\alpha = (v, z_i)$, $\beta = (w, z_j)$ sont des éléments de V^* et $\alpha \cap \beta = (v \cap w, z_i \cap z_j) \in P^*$ alors $v \cap w \in P$ et, parce que P est premier dans V, il suit que v ou w sont des éléments de P. Mais alors α ou β est un élément de P^*.

P^* est un idéal premier minimal. En effet, si P' est un $\bigcup$-idéal premier de V^* et $P' \subset P^*$ alors $P' \cap V_i \subseteq P^* \cap V_i$. Du lemme 1 il résulte alors que $P' \cap V_i$ et $P^* \cap V_i$ sont des $\bigcup$-idéaux premiers de V_i. Mais $P^* \cap \cap V_i = Q$ est isomorphe avec P et, P étant un $\bigcup$-idéal premier minimal de V nous avons $P' \cap V_i = P^* \cap V_i = Q$. Soit u l'élément maximal de P. Alors $(u, z_1) \in P'$. Mais P' est un $\bigcup$-idéal premier et $u < 1$ donc $(1, z_1) \in P'$ et par suite $(u, z_2) \in P'$. Cela signifie que $P' = P^*$.

Les résultats obtenus donnent:

Lemme 20. $R_i(V^*) = \{(u, z_1)/u \in R_i(V_i)\}$.

Ce résultat, son dual, et le lemme 15 nous donnent:

Lemme 21. *V^* a un moins une transversale de largeur 2.*

Lemme 22. *Si $u \in V$ est un élément d'une transversale de largeur $k(k = 2, 3)$ alors cela a lieu aussi pour l'élément (u, z_1), de V.*

Démonstration. Soit $u \cup a \cup b = 1$, $u \cap a \cap b = 0$ et la transversale (u, a, b) est irréductible. Alors les éléments (u, z_1), (a, z_2), (b, z_2) forment une transversale de largeur 3 de V^*, parce que $(u, z_1) \cup (a, z_2) \cup (b, z_2) = (u \cup a \cup b, z_2) = (1, z_2)$ et $(u, z_1) \cap (a, z_2) \cap (b, z_2) = (u \cap a \cap b, z_1) = (0, z_1)$. En outre on voit aisément que la transversale $((u, z_1), (u, z_2), (b, z_2))$ est irréductible dans V.

Théorème 7. *Un treillis fini et distributif V peut être plongé dans un treillis distributif $\bar{V}$ de telle manière que outre 0 et 1 chaque élément de V appartienne à une transversale de largeur au plus 3.*

Si V a n éléments alors $\bar{V}$ a au plus $4n$ éléments.

Démonstration. Nous distinguerons deux cas selon que, dans V, a) l'ensemble B de V est vide et b) le cas contraire.

a) Le lemme 15 nous assure que V a une transversale formée seulement de 2 éléments (a, b). Alors $((u, z_1), (a, z_2), (b, z_2))$ est une transversale irréductible de (u, z_1) et $\bar{V} = V^*$.

b) Si V a une transversale de largeur 2 alors on utilise le raisonnement de a). Dans le cas contraire nous aurons selon le lemme 21 une telle ransversale dans V^* et $\bar{V} = (V^*)^*$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Hermes H. — *Einführung in die Verbandstheorie.* J. Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.
2. Nachbin L. — *Une propriété caractéristique des algèbres Booléennes.* Portugalia Mathematica 6, 115–118, 1947.
3. Pic G. — *Une propriété caractéristique des algèbres Booléennes finies.* Studia Universitatis „Babeş-Bolyai" Series Mathematica-Mechanica (à paraître).

O PROPRIETATE A LATICELOR FINITE ŞI DISTRIBUTIVE

Rezumat

Se generalizează pentru un reticul distributiv noţiunea de complement Se dau criterii pentru ca un element al reticulului să aibă un complement format din 1, 2 sau 3 elemente. Se dă o teoremă care generalizează o teoremă a lui H. Stone.

WEAK RING EXTENSIONS

BY

TUDORA LUCHIAN

Communicated at the jubilee „A. Myller"-session, 20—25 August 1970

1. A weak ring $R^{\cdot}$ [1] is an additive abelian group R_+, in which we define a second composition law „$\cdot$" related to the addition by the weak distributive laws

(1) $$a \cdot (b_1 + b_2) + a \cdot 0 = a \cdot b_1 + a \cdot b_2,$$

(2) $$(b_1 + b_2) \cdot a + 0 \cdot a = b_1 \cdot a + b_2 \cdot a,$$

which imply

(3) $$a \cdot 0 = a\varphi + c,$$ (4) $$0 \cdot a = a\psi + c \quad \forall a \in R_+,$$

where φ, ψ are group endomorphisms of R_+ and c a fixed element of R_+

To an ordinary ring $R^{\times}$ (let denote by „$\times$" its multiplication, not necessarily associative), one can associate a weak ring $R^{\cdot}$, by choosing two endomorphisms φ, ψ of its additive group R_+ and defining a new multiplication „$\cdot$" by

(5) $$a \cdot b = a \times b + a\varphi + b\psi + c, \quad \forall a, b \in R_+.$$

Conversely, to any weak ring $R^{\cdot}$ one can associate a unique ordinary ring $R^{\times}$ with the same additive group R_+ and the multiplication „$\times$" defined by

(6) $$a \times b = a \cdot b - a \cdot 0 - 0 \cdot b + 0 \cdot 0.$$

If a weak ring $R^{\cdot}$ possesses an element d with the property

(7) $$a \cdot d = d \cdot a = d, \quad \forall a \in R^{\cdot},$$