PRINCIPIUL MAJORANTEI ŞI REZOLVAREA ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE DEFINITE ÎN SPAŢII SUPERMETRICE PRIN METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE

DE

GROZE SEVER

Fie ecuaţia operaţională

$$x = U(x) \tag{1}$$

şi iteraţia corespunzătoare

$$x_{n+1} = U(x_n), \tag{2}$$

unde $U(x)$ este un operator neliniar, continuu, definit într-un spaţiu supermetric X [1] complet şi cu valori în el însuşi, operator ce admite diferenţe divizate $U_{x^{(1)}, x^{(2)}}$ de anumite ordine [2].

Ecuaţiei operaţionale (1) îi asociem ecuaţia reală

$$z = V(z) \tag{1'}$$

şi iteraţia ei corespunzătoare

$$z_{n+1} = V(z_n), \tag{2'}$$

unde $V(z)$ este o funcţie continuă de variabilă reală, definită pe segmentul I.

În cele ce urmează adoptăm următoarele notaţii [1], [2]:

— $\rho_X(x) \equiv \rho(x, 0)$, pentru norma generalizată a unui element $x \in X$, 0 fiind elementul nul al spaţiului supermetric X.

— $\rho_{X,Y}(\mathfrak{L})$, pentru norma operatorului $\mathfrak{L}$ definit în spaţiul supermetric X şi cu valoare în spaţiul de acelaşi tip Y.

Definiție. *Ecuația* (1′) *este o majorantă a ecuației* (1), *dacă sînt verificate condițiile* [3]:

$$\text{a)}\quad \rho_X(U(x_0)-x_0) \leqslant V(z_0)-z_0$$

$$\text{b)}\quad \rho_{X,X}(U_{x^{(1)},x^{(2)}}) \leqslant V_{z^{(1)},z^{(2)}}$$

unde $\rho_X(x^{(i)}-x_0) \leqslant z'-z_0$, $i=1,2$ și $[z_0,z'] \subset I$.

Teorema 1. *Dacă ecuația* (1) *este majorată de către ecuația* (1′) *care are ca cea mai mică rădăcină pe* $z^* \in [z_0,z']$ *atunci și ecuația* (1) *admite o soluție* x^* *satisfăcînd condiția*

$$\rho_X(x^*-x_0) \leqslant z^*-z_0 \leqslant z'-z_0,$$

spre care converge metoda aproximațiilor succesive (2).

Demonstrație [3]. Arătăm pentru început că metoda aproximațiilor succesive converge, începînd cu z_0, pentru ecuația majorantă (1′).

Din definiție, în baza algoritmului (2′), avem

$$z_0 \leqslant z_1 = V(z_0) \leqslant V(z^*) = z^* \leqslant z',$$

unde z^* este o soluție a ecuației (1′) situată în $[z_0,z']$.

Prin inducție deducem că

$$z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_n \leqslant z^* \leqslant z',$$

fapt ce dovedește că

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \tilde{z} \leqslant z^* \leqslant z'.$$

Dacă în (2′) se trece la limită, obținem că $\tilde{z}=z^*$.

Construim acum aproximațiile succesive pentru ecuația (1), ținînd seama de algoritmul (2). Din condiția a) a definiției, avem

$$\rho_X(x_1-x_0) = \rho_X(U(x_0)-x_0) \leqslant V(z_0)-z_0 = z_1-z_0.$$

Deoarece

$$x_2-x_1 = U(x_1)-U(x_0) = U_{x_1,x_0}(x_1-x_0)$$

în baza condiției b) din definiție, putem scrie

$$\rho_X(x_2-x_1) \leqslant V_{z_1,z_0}\,\rho_X(x_1-x_0)$$

sau

$$\rho_X(x_2-x_1) \leqslant V_{z_1,z_0}(z_1-z_0) = V(z_1)-V(z_0) = z_2-z_1. \tag{3}$$

Folosind inducția deducem

$$\rho_X(x_{n+1}-x_n) \leqslant z_{n+1}-z_n$$

și deci

$$\rho_X(x_{n+p}-x_n) \leqslant z_{n+p}-z_n. \tag{4}$$

Deoarece există $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, rezultă că există și $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pe care o notăm cu x^*.

Prin trecere la limită în relația (2) se obține că x^* este o soluție a ecuației (1).

Că această soluție x^* verifică inegalitatea din enunțul teoremei se arată ușor, trecîndu-se la limită în relația

$$\rho_X(x_n-x_0) \leqslant z_n-z_0 \leqslant z'-z_0.$$

Consecință. Dacă operatorul $U(x)$ este astfel încît pentru orice $x \in X$ să avem

$$\rho_{X,X}(U_{x_0,x}) \leqslant \alpha < 1,\ x_0=0,$$

atunci ecuația

$$x = U(x) + \tilde{x}$$

este rezolvabilă prin procedeul aproximațiilor succesive, oricare ar fi $\tilde{x} \in X$.

Pentru demonstrarea afirmației este suficient să folosim teorema demonstrată, luînd ca majorantă ecuația

$$z = \alpha z + \rho_X(U(\theta) + \rho_X(\tilde{z}).$$

Observație. O teoremă analogă a fost demonstrată de către B. Jankó [4] în cazul spațiului Banach, folosind însă derivatele de tip Fréchet a operatorului considerat.

În cele ce urmează demonstrăm o teoremă de unicitate a soluției ecuației (1), fără a asigura și existența soluției.

Teorema 2. *Dacă operatorul continuu* $U(x)$ *definit în spațiul supermetric* X, *admite diferențe divizate și* $V(z)$ *este o funcție continuă definită în* $[z_0,z']$, *dacă avem verificate condițiile:*

1°. $\rho_{X,X}(U_{x^{(1)},x^{(2)}}) \leqslant V_{z^{(1)},z^{(2)}}$ *pentru orice* $x^{(i)}$ *ce satisface relația* $\rho_X(x-x_0) \leqslant z-z_0 \leqslant z'-z_0$;

2°. $V(z_0) \geqslant z_0$, $V(z') \leqslant z'$,

atunci, din unicitatea rădăcinii ecuației (1′) *în* (z_0,z') *rezultă și unicitatea soluției ecuației* (1) *din* (S) *definită de*

$$\rho_X(x-x_0) \leqslant z'-z_0,$$

soluție care, dacă există, este limita aproximațiilor succesive, oricare ar fi aproximația inițială x_0 *considerată în* (S).

Demonstrație. Vom începe prin a dovedi partea a doua a afirmației. Determinăm, prin inducție, pe z_n, z'_n, luînd $z'_0=z'$,

$$(2'') \qquad z_{n+1} = V(z_n), \quad z'_{n+1} = V(z').$$

Se observă că $\{z_n\}$ este un şir nedescrescător, pe cînd şirul $\{z'_n\}$ este necrescător şi avem $z_n \leqslant z'_n$. Atunci există limitele

$$z_0 \leqslant z^* = \lim_{n\to\infty} z_n \leqslant z^{**} = \lim_{n\to\infty} z'_n \leqslant z'.$$

Dacă in (2″) se trece la limită, rezultă că atît z^* cît şi z^{**} sînt soluţii ale ecuaţiei (1′), iar în baza ipotezei, avem $z^* = z^{**}$.

Luăm un element oarecare $x' \in S$. Dacă presupunem $x' = x'_0$ şi $x'_{n+1} = U(x'_n)$, avem

$$\rho_X(x'_0 - x_0) = \rho_X(x' - x_0) \leqslant z'_0 - z_0,$$

$$\rho_X(x'_1 - x_1) = \rho_X(U(x'_0) - U(x_0)) \leqslant \rho_X(U_{x'_0, x_0})\rho_X(x'_0 - x_0) \leqslant$$

$$\leqslant V_{z'_0, z_0}(z'_0 - z_0) = z'_1 - z_1.$$

Folosind inducţia se deduce

$$5) \qquad \rho_X(x'_n - x_n) \leqslant z'_n - z_n.$$

De aici rezultă că dacă şirul $\{x_n\}$ are o limită, va avea limită şi şirul $\{x'_n\}$, limite ce vor coincide, deoarece $z'_n - z_n \to 0$ pentru $n \to \infty$.

Considerînd $x'_n = x^*$, unde x^* este o soluţie a ecuaţiei (1), în baza celor de mai sus rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} x'_n = \lim_{n\to\infty} x_n = x^*,$$

ceea ce demonstrează complet teorema.

În încheiere vom demonstra o teoremă privitoare la unicitatea soluţiei pentru o ecuaţie operaţională de forma $P(x) = 0$ şi majoranta ei $Q(z) = 0$ operatorii $P(x)$ şi $Q(z)$ admiţînd diferenţe divizate.

Teorema 3. *Dacă pentru aproximaţiile iniţiale x_0, x_{-1} respectiv z_0, z_{-1} avem îndeplinite condiţiile*

1°. *Există* $\Lambda_0 = [P_{x_0, x_{-1}}]^{-1}$,

2°. $\rho_X(\Lambda_0 P(x)) \leqslant BQ(z)$,

3°. $\rho_{X,X}(\Lambda_0 P_{x', x''}) \leqslant BQ_{z', z''}$ *pentru orice* $x^{(i)} \in S$ *definită de* $\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0$

şi dacă $Q(z') \leqslant 0$ *şi ecuaţia* $Q(z) = 0$ *are numai o rădăcină în intervalul* $[z_0, z']$, *atunci ecuaţia* $P(x) = 0$ *are de asemenea numai o soluţie în domeniul*

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0.$$

Demonstraţie. Înlocuind ecuaţiile $P(x) = 0$ şi $Q(z) = 0$ cu $x = U(x) \equiv x - \Lambda_0 P(x)$ şi $z = V(z) \equiv z + BQ(z)$, atunci vor fi îndeplinite condiţiile teoremei precedente:

1°. $\rho_{X,X}(U_{x^{(1)}, x^{(2)}}) = \rho_{X,X}(\Lambda_0 P_{x^{(1)}, x^{(2)}}) \leqslant BQ_{z^{(1)}, z^{(2)}} = V_{z^{(1)}, z^{(2)}}$,

2°. $V(z_0) = z_0 + BQ(z_0) \geqslant z_0$, $V(z') = z' + BQ(z') \leqslant z'$.

Deoarece ecuaţia $Q(z) = 0$ şi împreună cu aceasta şi echivalenta ei $V(z) = z$ are o singură rădăcină în $[z_0, z']$, va rezulta, în baza teoremei 2, că şi ecuaţia $U(x) = x$ şi deci echivalenta ei $P(x) = 0$, are o singură soluţie în (5).

BIBLIOGRAFIE

1. L. Collatz — *Functionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
2. M. Balàzs — G. Goldner — *Diferenţe divizate în spaţii Banach şi unele aplicaţii ale lor*. Stud. şi cerc. mat., tom 21, 1969.
3. L. V. Kantorovici — *Principiul majorant şi metoda Newtona*. DAN 74, 1, 17—20 (1951).
4. B. Janko — *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii Banach*. Ed. Acad. R. S. R., 1969.

LE PRINCIPE DE LA MAJORANTE ET LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONNELLES NON LINÉAIRES DÉFINIES DANS DES ESPACES SUPERMÉTRIQUES, PAR LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Résumé

On considère l'équation (1) où x est un élément d'un espace supermétrique X et U un opérateur non-linéaire, et l'équation d'itération (2), ainsi que l'équation scalaire (1′) est son itérée (2′). En désignant par $\rho_X(x)$ et $\rho_{X,Y}(\pounds)$ la norme généralisée de x et de l'opérateur $\pounds$ respectivement, on suppose que (1′) et la majorante de (1), c'est-à-dire qu'elle satisfait à a) et b).

En ajoutant des conditions supplémentaires, on établit des conditions d'existence et d'unicité de la solution de (1), et utilisant (1′) et (2′).