O GENERALIZARE A SISTEMELOR ASIMPTOTIC MĂRGINITE

Rezumat

Se introduc sistemele slab asimptotic mărginite, despre care se arată că extind sistemele asimptotic mărginite (disipative) introduse de Levinson [2]. Se dă un criteriu general de slabă asimptotică mărginire (Teorema 2.1). În secţiunea 3 se introduc sistemele cu proprietatea (I), despre care se demonstrează că în cazul periodic acestea sînt uniform mărginite deci şi slab asimptotic mărginite (Teorema 3.1) Se arată că sistemele slab asimptotic mărginite nu coincid cu cele uniform mărginite şi nici cu sistemele cu proprietatea (I).

LA DIFFÉRENCE DIVISÉE D'ORDRE n D'UNE FONCTION DE p VARIABLES ET SA REPRÉSENTATION PAR UNE INTÉGRALE MULTIPLE

PAR

D. V. IONESCU

On sait que G. Peano [3] et L. Tchakaloff [6] ont montré que la différence divisée d'ordre n d'une fonction g d'une seule variable, sur les noeuds $x_0, x_1, \cdots, x_n$, où $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ peut être représentée par une intégrale définie lorsque $g \in C^n [x_0, x_n]$. Nous avons retrouvé cet important théorème par un problème aux limites qui conduit d'une manière simple à la fois à la définition de la différence divisée et à sa représentation intégrale [1]. On a

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n; g] = \int_{x_0}^{x_n} \varphi(s)\, g^{(n)}(s)\, ds \tag{1}$$

où la fonction φ est la fonction „B-spline" d'après I. J. Schoenberg [5] définie par

$$\varphi(x) = \lambda_0 \frac{(x - x_0)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \lambda_1 \frac{(x - x_1)_+^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \lambda_n \frac{(x - x_n)_+^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2}$$

les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ étant donnés par la formule

$$[x_0, x_1, \cdots, x_n; g] = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, g(x_i). \tag{3}$$

Les conditions du problème aux limites ont permis de démontrer que la fonction φ est positive sur l'intervalle (x_0, x_n) et que $\int_{x_0}^{x_n} \varphi\, ds = \frac{1}{n!}$.

Dans ce travail nous étendons aux fonctions f de p variables $x_1, x_2, \cdots, x_p$ la formule (1) pour les différences divisées d'ordre n sur un réseau de noeuds.

I. T. Popoviciu [4] a défini la différence d'ordre n de la fonction f de deux variables (x, y) sur un réseau de noeuds $M_{ik}(x_i, y_k)$, où $i, k = 0, 1, \cdots, n$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ et $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$, qu'il a désignée par

$$(4) \qquad \left| \begin{matrix} x_0, x_1, \cdots, x_n \\ y_0, y_1, \cdots, y_n \end{matrix} ; f \right|,$$

par la formule

$$(5) \qquad \left| \begin{matrix} x_0, x_1, \cdots, x_n \\ y_0, y_1, \cdots, y_n \end{matrix} ; f \right| = [x_0, x_1, \cdots, x_n ; [y_0, y_1, \cdots, y_n ; f]].$$

Nous allons étendre en premier lieu cette définition au cas des fonctions de p variables.

Considérons une fonction f de variables $x_1, x_2, \cdots, x_p$ et prenons sur l'axe Ox_h correspondant à la variable x_h, les noeuds $x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \cdots, x_h^{(n)}$ de manière que

$$x_h^{(0)} < x_h^{(1)} < \cdots < x_h^{(n)}.$$

En donnant à h les valeurs $1, 2, \cdots, p$ nous obtenons un réseau de noeuds $M_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ de coordonnées $(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \cdots, x_p^{(i_p)})$, les indices $i_1, i_2, \cdots i_p$ prenant des valeurs de l'ensemble des nombres entiers $1, 2, \cdots, n$.

Alors nous donnons la définition suivante:

Définition. *La différence divisée d'ordre n de la fonction f de variables $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sur le réseau de noeuds $M_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ que nous désignons par la notation*

$$(6) \qquad \left[\begin{matrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \cdots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right]$$

est définie par la formule de récurrence

$$(7) \qquad \left[\begin{matrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \cdots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = \left[x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n)} ; \left[\begin{matrix} x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n)} \\ x_3^{(0)}, x_3^{(1)}, \cdots, x_3^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \cdots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] \right]$$

pour $p = 2, 3, \cdots, p$.

En désignant par

$$(8) \qquad \lambda_h^{(i)} = (-1)^i \frac{V(x_h^{(0)}, \cdots, x_h^{(i-1)}, x_h^{(i+1)}, \cdots, x_h^{(n)})}{V(x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \cdots, x_h^{(n)})}$$

pour $h = 0, 1, \cdots, p$ et $i = 0, 1, \cdots, n$ on peut écrire encore la différence divisée (6), sous la forme

$$(9) \qquad \left[\begin{matrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_2^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \cdots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = (-1)^{pn} \sum_{i_1, \cdots, i_p = 0}^{n} \lambda_1^{(i_1)} \lambda_2^{(i_2)} \cdots \lambda_p^{(i_p)} f(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}, \cdots, x_p^{(i_p)}).$$

2. On peut donner une représentation intégrale de la différence divisée (6), en faisant sur la fonction f des hypothèses que nous désignons par (H_p), $(H_{p-1}), \cdots, (H_1)$.

En considérant le domaine D défini par les inégalités

$$D: x_1^{(0)} \leqslant x_1 \leqslant x_1^{(n)}, x_2^{(0)} \leqslant x_2 \leqslant x_2^{(n)}, \cdots, x_p^{(0)} \leqslant x_p \leqslant x_p^{(n)},$$

l'hypothèse (H_p) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^h f / \partial x_p^h$ existent et sont continues dans D, pour $h = 0, 1, \cdots, n$.

L'hypothèse (H_{p-1}) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^{h+n} f / \partial x_{p-1}^h \partial x_p^n$ existent et sont continues dans D, pour $h = 0, 1, \cdots, n$.

Et ainsi de suite. La dernière hypothèse (H_1) exprime que toutes les dérivées partielles $\partial^{h+(p-1)n} f / \partial x_1^h \partial x_2^n \cdots \partial x_p^n$ existent et sont continues dans D, pour $h = 0, 1, \cdots, n$.

Pour arriver à la représentation intégrale de la différence divisée (6), nous considérons d'une manière générale la représentation intégrale de la différence divisée d'ordre n de la fonction g de la variable x_h, sur les noeuds $x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \cdots, x_h^{(n)}$, lorsque $g \in C^n[x_h^{(0)}, x_h^{(n)}]$, donnée par la formule

$$(10) \qquad [x_h^{(0)}, x_h^{(1)}, \cdots, x_h^{(n)} ; g] = \int_{x_h^{(0)}}^{x_h^{(n)}} \varphi_h(s)\, g^{(n)}(s)\, ds$$

avec la fonction „B-spline"

$$\varphi_h(s) = \lambda_h^{(0)} \frac{(s - x_h^{(0)})_+^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + \lambda_h^{(n)} \frac{(s - x_h^{(n)})_+^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{11}$$

qui est positive sur l'intervalle $(x_h^{(0)}, x_h^{(n)})$.

Nous aurons à considérer dans la suite les fonctions (11) pour $h = 1, 2, \ldots, p$.

3. Dans la différence divisée $[x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \ldots, x_p^{(n)}; f]$ regardons la fonction f comme une fonction seulement de la variable x_p. Alors en tenant compte de l'hypothèse (H_p), nous pouvons écrire

$$[x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \ldots, x_p^{(n)}; f] = \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_p(s_p) \frac{\partial^n f}{\partial s_p^n}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, s_p) ds_p. \tag{12}$$

Ensuite écrivons la formule de récurrence

$$\left| \begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \ldots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, \quad x_p^{(1)}, \ldots, \quad x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right| = [x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \ldots, x_{p-1}^{(n)}; [x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \ldots, x_p^{(n)}; f]]$$

et dans le second membre remplaçons la seconde différence diviseé par la formule (12). Nous aurons alors

$$\left| \begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \ldots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, \quad x_p^{(1)}, \ldots, \quad x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right| = \tag{13}$$

$$\int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_p(s_p) \left| x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \ldots, x_{p-1}^{(n)}; \frac{\partial^n f}{\partial s_p^n}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, s_p) \right| ds_p.$$

Dans le second membre regardons la fonction $\partial^n f / \partial s_p^n (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, s_p)$ comme une fonction seulement de la variable x_{p-1}. En tenant compte de l'hypothèse (H_{p-1}), nous pouvons écrire alors le second membre de la formule (13) sous la forme

$$\left| \begin{matrix} x_{p-1}^{(0)}, x_{p-1}^{(1)}, \ldots, x_{p-1}^{(n)} \\ x_p^{(0)}, \quad x_p^{(1)}, \ldots, \quad x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right| = \tag{14}$$

$$= \int_{x_{p-1}^{(0)}}^{x_{p-1}^{(n)}} \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_{p-1}(s_{p-1}) \varphi_p(s_p) \frac{\partial^{2n} f}{\partial s_{p-1}^n \partial s_p^n}(x_1, x_2, \ldots, x_{p-2}, s_{p-1}, s_p) ds_{p-1}, ds_p,$$

Ce procédé peut être répété et l'on arrive finalement à la représentation intégrale, grâce aux hypothèses $(H_{p-2}), \ldots, (H_1)$

$$\left[\begin{matrix} x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(n)} \\ x_2^{(0)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(n)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_p^{(0)}, x_p^{(1)}, \ldots, x_p^{(n)} \end{matrix} ; f \right] = \tag{15}$$

$$\int_{x_1^{(0)}}^{x_1^{(n)}} \int_{x_2^{(0)}}^{x_2^{(n)}} \cdots \int_{x_p^{(0)}}^{x_p^{(n)}} \varphi_1(s_1) \varphi_2(s_2) \cdots \varphi_p(s_p) \frac{\partial^{pn} f}{\partial s_1^n \partial s_2^n \cdots \partial s_p^n}(s_1, s_2, \ldots, s_p) ds_1 ds_2 \ldots ds_p.$$

C'est la formule qui fait l'objet de ce travail.

4. Il est à retenir que la formule (15) a été démontrée grâce à la formule fondamentale (1) et moyennant les hypothèses (H_p), $(H_{p-1}), \ldots, (H_1)$. Il est possible de démontrer la formule (15) en faisant d'autres hypothèses sur la fonction f, par exemple celles qu'on doit faire pour obtenir la définition de la différence divisée (6) et arriver à sa représentation intégrale par un problème aux limites, comme nous l'avons fait dans le cas d'une fonction d'une seule variable.

Nous avons montré pour $p = 3$, quelles sont les hypothèses qu'on doit faire sur la fonction f et quel est le problème aux limites qui conduit d'une manière directe à la formule (15) correspondant à $p = 3$ dans le travail [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionescu D. V. — *Cuadraturi numerice*. Editura tehnică, Bucureşti 1957.
2. Ionescu D. V. — *La différence divisée d'une fonction de trois variables et sa représentation par une intégrale triple*. Revue Roumaine de mathématiques pures et appliquées. XV, 1970, 1425–1436.
3. Peano G. — *Resto nelle formule di quadratura expresso con un integrale definito*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Classe Sci. Fis. Math.-Nat. 1913, 22, 562–569.
4. Popoviciu T. — *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*. Mathematica, VJII, 1934, 1–85
5. Schoenberg I. J. — *The perfect B-splines and a time-optimal control problem*. M. R. C. Tech. Summ. Report, 1116, December. 1970, Madison, Wisconsin 53706.
6. Tchakaloff L. — *Über eine Darstellung des Newtonschen Differenzenquotienten und ihre Anwendung*. Congrès International des Mathematiciens Oslo 1936.

DIFERENŢA DIVIZATĂ DE ORDINUL n, A UNEI FUNCŢII DE p VARIABILE ŞI REPREZENTAREA EI PRINTR-O INTEGRALĂ MULTIPLĂ

Rezumat

Se ştie că G. Peano [3] şi L. Tchakaloff [6] au arătat că diferenţa divizată de ordinul n a unei funcţii g de o singură variabilă pe nodurile $x_0, x_1, \ldots, x_n$, unde $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ se poate reprezenta printr-o integrală definită cînd $g \in C^n[x_0, x_n]$. Noi am regăsit această importantă teoremă printr-o problemă la limită, care conduce într-un mod simplu, atît la definiţia diferenţei divizate cît şi la reprezentarea ei integrală [1]. Avem formula (1), unde funcţia φ este funcţia „B-Spline" după I. J. Schoenberg [5].

T. Popoviciu [4] a definit diferenţa de ordinul n a unei funcţii f de două variabile (x, y) pe o reţea de noduri (x_i, y_k), pe care a notat-o cu (4), prin formula (5).

Noi am extins această diferenţă la cazul unei funcţii f de p variabile $x_1, x_2, \ldots, x_p$ pe reţeaua de noduri $M_{i_1, i_2, \ldots, i_p}$ prin formula de recurenţă (7), şi făcînd ipotezele $(H_p), (H_{p-1}), \ldots, (H_1)$ asupra funcţiei f în domeniul D, am dat reprezentarea diferenţei divizate de ordinul n a funcţiei f de variabile $x_1, x_2, \ldots, x_p$ prin formula (15) în care $\varphi_h(s)$ este funcţia „B-Spline" (11), pentru $h = 1, 2, \ldots, p$.

Formula (15) s-a dovedit în cazul $p = 3$ şi cu ipoteze legate de metoda funcţiei φ, printr'o problemă la limită care defineşte diferenţa divizată şi conduce la formula de reprezentare a ei printr-o integrală triplă [2].

CERTAIN RESULTS INVOLVING KAMPÉ DE FÉRIET'S FUNCTIONS

BY

MANILAL SHAH

1. Introduction. J. Kampé de Fériet [5] has defined the double hypergeometric function and R. C. Bhatt [2] has employed the modified and contracted notation to represent Kampé de Fériet's function as

$$
\begin{aligned}
{}^{p+q}f_{r+s}(x,y) &= {}^{p+q}f_{r+s}\left(\begin{matrix} a_p : b_q, b'_q; \\ c_r : d_s, d'_s; \end{matrix}\; x, y\right) = \\
&= \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} (a_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{q} \{(b_j)_m (b'_j)_n\}\, x^m y^n}{m!\, n! \prod_{j=1}^{r} (c_j)_{m+n} \prod_{j=1}^{s} \{(d_j)_m (d'_j)_n\}}
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

where $p + q \leqslant r + s + 1$, a_p or ${}^1a_p$ stands for $a_1, \ldots, a_p$ and so on.

2. Integrals: We have evaluated the following integrals:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 x^\sigma (1-x^2)^{-1/2k} P_\nu^k(x)\, {}^{p+q}f_{r+s}\left(\begin{matrix} a_p : b_q, b'_q; \\ c_r : d_s, d'_s; \end{matrix}\; \lambda x^{2\rho}, \mu x^{2\rho}\right) dx = \\
&= A\, {}^{p+q+2\rho}f_{r+s+2\rho}\left(\begin{matrix} a_p, F\{(\nu)\} : b_q, b'_q; \\ c_r, \qquad\quad d_s, d'_s; \end{matrix}\; \lambda, \mu\right),
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

where $\mathrm{Re}(k) < 1$, $\mathrm{Re}(\sigma) > -1$, ρ a positive integer and