

FORMES DIFFÉRENTIELLES ET GROUPES DE LIE-BANACH
À VALEURS DANS UN ESPACE DE BANACH

PAR

AUREL BEJANCOU

Les premières études concernant les groupes de Lie-Banach ont été faites par G. Birkhoff [1] en utilisant la théorie des courbes dans des espaces métriques et par A. D. Michal [11], qui utilise le calcul local avec des formes différentielles pour des groupes de Lie-Banach particuliers. Les groupes de Lie-Banach ont été des objets d'étude pour E. B. Dynkin [6], D. Laugwitz [9], B. Maissen [10] et M. Craioveanu [5]. Récemment, la méthode d'Elie Cartan a été élargie par Gh. Gheorghiev [7] à l'étude des groupes de Lie-Banach.

Le but de la Note présente est de développer la théorie des formes différentielles sur des variétés modélées des espaces de Banach à valeurs dans un espace de Banach et de l'employer dans la résolution de certains problèmes globaux de la théorie des groupes de Lie-Banach.

Dans cette Note tous les espaces de Banach sont supposés réels et toutes les variétés différentielles sont modélées par cette catégorie d'espaces de Banach.

Le premier paragraphe est dédié à l'étude des formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach. Dans le § 2 on définit globalement sur un groupe de Lie-Banach les 1-formes ω , τ et on présente leurs propriétés fondamentales. Dans le § 3 on donne des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une p -forme sur un groupe de Lie-Banach à valeurs dans un espace de Banach soit invariante à gauche ou à droite. Dans le dernier paragraphe nous obtiendrons des équations de structure pour un groupe de Lie-Banach quelconque d'une manière globale.

§1. Formes différentielles sur des variétés modelées des espaces de Banach à valeurs dans un espace de Banach

Soit \mathbf{E} un espace de Banach, M une variété différentielle de classe C^∞ et U un ouvert de M . Nous allons noter par $C(U; \mathbf{E})$ (resp. $C^\infty(U; \mathbf{E})$) l'ensemble de toutes les applications définies sur U à valeurs dans \mathbf{E} (resp. celles différentiables de classe C^∞ sur U).

Par $\mathfrak{X}(U)$ (resp. $\mathfrak{X}^\infty(U)$) nous allons noter l'ensemble de tous les champs de vecteurs sur U (resp. de ceux de classe C^∞ sur U).

Il est aisé de vérifier que $C(U; \mathbf{E})$, $\mathfrak{X}(U)$ (resp. $C^\infty(U; \mathbf{E})$, $\mathfrak{X}^\infty(U)$) sont des modules sur $C(U, \mathbf{R})$ (resp. $C^\infty(U; \mathbf{R})$).

Pour l'application linéaire tangente à un morphisme des variétés, nous allons employer la notation utilisée dans [2]. Pour chaque $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ et $f \in C^\infty(U; \mathbf{E})$ nous pouvons définir l'application $Xf \in C(U; \mathbf{E})$ par la formule

$$(1.1) \quad (Xf)(x) = (T_x f)(X(x)) \quad \forall x \in U.$$

Soient $\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$, trois espaces de Banach et $(u, v) \rightarrow u \cdot v$ une application bilinéaire continue de $\mathbf{F} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$. On sait ([2], p. 43) que si $f \in C^\infty(U; \mathbf{F})$, $g \in C^\infty(U; \mathbf{G})$ la relation

$$(1.2) \quad T_x(f \cdot g)(v) = f(x) \cdot T_x g(v) + T_x f(v) \cdot g(x)$$

est valable pour tous $x \in U$ et $v \in T_x(M)$.

Proposition 1.1. Pour tout $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $f \in C^\infty(U; \mathbf{R})$ et $g \in C^\infty(U; \mathbf{E})$ on a :

$$(1.3) \quad X(f \cdot g) = (Xf) \cdot g + f \cdot (Xg).$$

Compte tenu de (1.2), cette proposition est évidente.

Par $\mathfrak{X}_p(U)$ nous comprenons le produit direct de $\mathfrak{X}(U)$ par lui-même p fois.

Définition 1.1. Une forme différentielle extérieure de degré p (ou p -forme) définie sur U et à valeurs dans \mathbf{E} , est une application $\omega_p: \mathfrak{X}_p(U) \rightarrow C(U; \mathbf{E})$ telle que :

F₁) Elle est p -linéaire par rapport à la structure de module des ensembles $\mathfrak{X}_p(U)$ et $C(U; \mathbf{E})$.

F₂) Elle est alternante, c'est-à-dire pour tout $(X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{X}_p(U)$ on a

$$\omega_p(X_1, \dots, X_p) = \varepsilon(\sigma) \omega_p(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(p)})$$

où σ est une permutation de la suite $(1, 2, \dots, p)$ et $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ est la signature de la permutation σ .

Une p -forme ω_p s'appelle différentiable de classe C^k sur U si pour tous les champs de vecteurs (X_1, \dots, X_p) de classe C^k sur U , l'application $\omega_p(X_1, \dots, X_p)$ est de classe C^k sur U .

Avec les notations de ([8], p. 3) nous pouvons donner la

Définition 1.2. Un champ de tenseurs covariant de type p sur U à valeurs dans \mathbf{E} est une section sur U dans le fibré vectoriel $L^p(T(M); \mathbf{E})$. Si la section a toutes les valeurs dans $L^p_n(T(M); \mathbf{E})$ alors le champ s'appelle antisymétrique.

Proposition 1.2. Tout champ de tenseurs covariant, de type p , antisymétrique sur U à valeurs dans \mathbf{E} détermine une p -forme sur U à valeurs dans \mathbf{E} .

Démonstration. Si t_p est une section sur U dans $L^p_n(T(M); \mathbf{E})$ alors il est possible de définir l'application ω_p par la formule

$$\omega_p(X_1, \dots, X_p)(x) = t_p(x)(X_1(x), \dots, X_p(x))$$

pour tout $x \in U$ et $(X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{X}_p(U)$.

Il est aisé de voir que ω_p est une p -forme sur U à valeurs dans \mathbf{E} .

Remarque 1.1. Nous ne pouvons rien affirmer sur la réciproque de cette proposition parce que la construction du cas des variétés de dimension finie n'est pas possible ici. Nous allons voir, par exemple, que sur un groupe de Lie-Banach les 1-formes ω et τ du §2 définissent des champs de covecteurs. Donc la réciproque de la proposition 1.2 est vraie dans ce cas.

Nous notons par $\mathfrak{D}_p(U; \mathbf{E})$ (resp. $\mathfrak{D}_p^k(U; \mathbf{E})$) l'ensemble de toutes les p -formes sur U à valeurs dans \mathbf{E} (resp. celles de classe C^k) et on peut montrer qu'il est un module sur l'anneau $C(U; \mathbf{R})$ (resp. $C^k(U; \mathbf{R})$).

Soit $f: N \rightarrow P$ un C^∞ -difféomorphisme de C^∞ -variétés. On peut définir alors l'application $f': \mathfrak{X}^\infty(N) \rightarrow \mathfrak{X}^\infty(P)$ par la relation

$$(1.4) \quad (f'X)(f(x)) = (T_x f)(X(x)) \quad \forall x \in N.$$

Pour tout ouvert V dans P et $\omega_p \in \mathfrak{D}_p^\infty(V; \mathbf{E})$ nous notons $W = f^{-1}(V)$ et nous pouvons définir l'application

$$(1.5) \quad f^* \omega_p: \mathfrak{X}_p^\infty(W) \longrightarrow C^\infty(W; \mathbf{E}) \text{ par la relation} \\ (f^* \omega_p)(X_1, \dots, X_p) = \omega_p(f'X_1, \dots, f'X_p) \circ f.$$

Vu la définition de f' , pour tout $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(N)$ et $g, h \in C^\infty(N; \mathbf{R})$ nous obtenons la relation

$$(1.6) \quad f'(h \cdot X + g \cdot Y) = (h \circ f^{-1}) \cdot f'X + (g \circ f^{-1}) \cdot f'Y.$$

Grâce aux relations (1.4), (1.5), (1.6) on peut montrer que l'application $f^* \omega_p$ est une p -forme sur U à valeurs dans \mathbf{E} de classe C^∞ .

Nous allons considérer les applications sur V à valeurs dans \mathbf{E} comme formes différentielles de degré nul et alors pour toute $g \in \mathfrak{D}_0^\infty(V; \mathbf{E})$ nous allons comprendre par $f^* g$, l'application $g \circ f \in \mathfrak{D}_0^\infty(W; \mathbf{E})$.

Avec cette convention on a

$$f^*(h \cdot \omega_p + g \cdot \Omega_p) = f^* h \cdot f^* \omega_p + f^* g \cdot f^* \Omega_p$$

pour toute paire $h, g \in C^\infty(V; \mathbf{R})$, $\omega_p, \Omega_p \in \mathfrak{D}_p^\infty(V; \mathbf{E})$.

Pour chaque $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ nous définissons l'application

$$(1.8) \quad i_X: \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E}) \longrightarrow \mathfrak{D}_{p-1}^\infty(U; \mathbf{E}) \text{ par la formule} \\ i_X \omega_p(X_1, \dots, X_{p-1}) = \omega_p(X, X_1, \dots, X_{p-1})$$

pour tout $(X_1, \dots, X_{p-1}) \in \mathfrak{X}_{p-1}^\infty(U)$, $\omega_p \in \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E})$ et

$$(1.9) \quad i_X \omega_p = 0 \text{ si } p = 0.$$

Remarque 1.2. Il est clair de la définition de i_X que $\omega_p = 0$ si et seulement si $i_X \omega_p = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$.

La $(p-1)$ -forme $i_X \omega_p$ s'appelle le produit intérieur de la p -forme ω_p par le champ de vecteurs X .

Pour chaque $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$, $\omega_p \in \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E})$ et $(X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{X}_p^\infty(U)$, nous définissons l'application $\mathfrak{L}_X \omega_p(X_1, \dots, X_p) \in C^\infty(U; \mathbf{E})$ par :

$$(1.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{L}_X \omega_p(X_1, \dots, X_p) = X(\omega_p(X_1, \dots, X_p)) - \sum_{i=1}^p \omega_p(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_p) \\ \mathfrak{L}_X f = Xf \quad \forall f \in \mathfrak{D}_0^\infty(U; \mathbf{E}) \end{array} \right.$$

L'application $\mathfrak{L}_X \omega_p: \mathfrak{X}_p^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U; \mathbf{E})$ définie par les relations (1.10) est une p -forme de classe C^∞ sur U à valeurs dans \mathbf{E} .

La p -forme $\mathfrak{L}_X \omega_p$ s'appelle la dérivée de Lie de la p -forme ω_p par rapport à X et l'application $\mathfrak{L}_X: \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E}) \longrightarrow \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E})$ s'appelle l'opérateur de dérivation de Lie par rapport à X .

Compte tenu de (1.8), (1.9), (1.10) par un calcul direct on a

Proposition 1.3. Pour toute paire $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ on a

$$(1.11) \quad [\mathfrak{L}_X, i_Y] = i_{[X, Y]},$$

$$(1.12) \quad \mathfrak{L}_{[X, Y]} = [\mathfrak{L}_X, \mathfrak{L}_Y].$$

Pour toute $f \in \mathfrak{D}_0^\infty(U; \mathbf{E})$ on peut définir une 1-forme sur U à valeurs dans \mathbf{E} notée par df et donnée par la relation

$$(1.13) \quad (df)(X) = Xf, \quad \forall X \in \mathfrak{X}^\infty(U).$$

Si $\omega_p \in \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E})$ nous définissons l'application

$d\omega_p: \mathfrak{X}_{p+1}^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U; \mathbf{E})$ par la formule

$$(1.14) \quad d\omega_p(X_0, \dots, X_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i X_i(\omega_p(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_p)) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega_p([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_p).$$

Cette application est une $(p+1)$ -forme de classe C^∞ sur U à valeurs dans \mathbf{E} . L'application $d: \mathfrak{D}_p^\infty(U; \mathbf{E}) \ni \omega_p \longrightarrow d\omega_p \in \mathfrak{D}_{p+1}^\infty(U; \mathbf{E})$ s'appelle l'opérateur de différentiation extérieure.

Proposition 1.4. Pour tout $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ on a :

$$(1.15) \quad \mathfrak{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d,$$

$$(1.16) \quad f^* \circ d = d \circ f^*.$$

où f est un C^∞ -difféomorphisme de C^∞ -variétés.

En ce qui suit les formes différentielles sur des variétés modélées des espaces de Banach à valeurs dans un espace de Banach seront appelées brièvement banachiques.

§ 2. Formes banachiques globalement définies sur un groupe de Lie-Banach

Définition 2.1. Un groupe de Lie-Banach de classe C^∞ est un groupe G , muni d'une structure de variété de classe C^∞ , compatible avec la loi de composition de G , c'est-à-dire l'application

$$\pi: G \times G \ni (x, y) \rightarrow \pi(x, y) = x \cdot y \in G$$

est de classe C^∞ [2].

L'application $J: G \ni x \rightarrow J(x) = x^{-1}$ est un difféomorphisme de classe C^∞ de G dans lui-même.

Pour tout $x \in G$, nous notons par L_x (resp. R_x) la translation à gauche (resp. à droite) déterminée par x et on peut montrer que ces applications sont des C^∞ -difféomorphismes de G .

Dans cette Note nous considérons des groupes de Lie-Banach de classe C^∞ et quand nous ne spécifierons pas la classe, on sous-entendra qu'ils sont de classe C^∞ .

Soit \mathbf{E} un espace de Banach. Notons :

- $X(G)$ — le module des champs de vecteurs de classe C^∞ sur G .
- $C(G; \mathbf{E})$ — le module des applications de classe C^∞ sur G à valeurs dans \mathbf{E} .
- $\mathfrak{D}_p(G; \mathbf{E})$ — le module des p -formes de classe C^∞ sur G à valeurs dans \mathbf{E} .

Ces modules sont considérés sur l'anneau $C(G; \mathbf{R})$.

L'unité du groupe est notée par e .

Sur le groupe de Lie-Banach G nous définissons l'application

$$\omega: X(G) \ni X \rightarrow \omega(X) \in C(G; T_x(G)) \text{ par la relation}$$

$$(2.1) \quad \omega(X)(x) = -T_x(R_x \circ J)(X(x)),$$

pour tout $x \in G$.

Il est aisé de voir que ω est une 1-forme sur G à valeurs dans $T_r(G)$.

Proposition 2.1. La forme linéaire ω est un isomorphisme entre les modules $\mathfrak{X}(G)$ et $C(G; T_r(G))$.

Démonstration. Nous considérons l'application :

$$\omega^{-1}: C(G; T_r(G)) \ni f \rightarrow \omega^{-1}(f) \in \mathfrak{X}(G)$$

définie par

$$(2.2) \quad \omega^{-1}(f)(x) = -T_r(L_r \circ J)(f(x)), \quad \forall x \in G.$$

Si on note avec I_r l'application identique sur un ensemble A , on peut vérifier les relations

$$R_r \circ J \circ L_r \circ I = I_a; \quad L_r \circ J \circ R_r \circ J = I_a.$$

A l'aide de ces relations, nous obtenons :

$$(2.3) \quad \begin{cases} | (\omega \circ \omega^{-1})(f)(x) = T_r(R_r \circ J \circ I_r \circ J)(f(x)) = T_r(I_a)(f(x)) = f(x), \\ | (\omega^{-1} \circ \omega)(X)(x) = T_r(L_r \circ J \circ R_r \circ J)(X(x)) = T_r(I_a)(X(x)) = X(x) \end{cases}$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(G)$, $f \in C(G; T_r(G))$ et $x \in G$. La forme linéaire ω est un isomorphisme entre les deux modules parce que ω^{-1} est linéaire et vérifie les relations (2.3). C.Q.F.D.

Soient M, N, P trois variétés différentielles de classe C^k et f un C^k -morphisme de $M \times N$ dans P . Soit $a \in M$ et $b \in N$. L'application linéaire tangente à l'application partielle $x \rightarrow f(x, b)$ (resp. $y \rightarrow f(a, y)$) de M (resp. N) dans P se note par $T_{(a,b)}^1 f$ (resp. $T_{(a,b)}^2 f$). Si l'on identifie $T_{(a,b)}(M \times N)$ à $T_a(M) \times T_b(N)$, de ([2], p. 45) on a :

$$(2.4) \quad T_{(a,b)} f(u, v) = T_{(a,b)}^1 f(u) + T_{(a,b)}^2 f(v), \quad \forall u \in T_a(M), v \in T_b(N).$$

Proposition 2.2 L'application linéaire tangente à l'application J vérifie la relation

$$(2.5) \quad T_r J = -T_r(L_{r-1} \circ R_{r-1}),$$

Démonstration. L'application partielle $x \rightarrow \pi(x, b)$ (resp. $y \rightarrow \pi(a, y)$) coïncide avec R_b (resp. L_a). On peut montrer qu'on a

$$(2.6) \quad [\pi \circ (I_a \circ J) \circ F](x) = e, \quad \forall x \in G.$$

où $F: G \ni x \rightarrow F(x) = (x, x) \in G \times G$.

On sait de [2] que si $f: M \rightarrow N$ et $f': M' \rightarrow N'$ sont des C^k -morphisme de variétés et $a \in M$, $a' \in M'$, alors :

$$T_{(a,a')} (f \times f') = T_a(f) \times T_{a'}(f').$$

Aussi, si f est localement constant, alors $T_a f = 0$ pour tout $a \in M$. Donc de (2.6) on déduit

$$0 = T_{(x,x-1)}^1 \pi + T_{(x,x-1)}^2 \pi \circ T_x J.$$

Mais: $T_{(x,x-1)}^1 \pi = T_x R_{x-1}$ et $T_{(x,x-1)}^2 \pi = T_{(x-1)} L_x$ et donc

$$T_x J = - (T_{(x-1)} L_x)^{-1} \cdot T_x R_{x-1}.$$

En tenant compte des relations évidentes: $L_r \circ L_{r-1} = I_r$ et $L_{r-1} \circ L_r = I_{r-1}$, on déduit

$$(T_{(r-1)} L_r)^{-1} = T_r L_{r-1}$$

et donc

$$T_r J = -T_r L_{r-1} \circ T_r R_{r-1} = -T_r(L_{r-1} \circ R_{r-1}) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 2.3. La forme inéaire ω et l'application ω^{-1} vérifient les relations :

$$(2.7) \quad \omega(X)(x) = T_r L_{r-1}(X(x)),$$

$$(2.8) \quad \omega^{-1}(f)(x) = T_r L_r(f(x)),$$

pour tout $X \in \mathfrak{X}(G)$, $f \in C(G; T_r(G))$ et $x \in G$.

Démonstration. En vertu de l'expression de l'application linéaire tangente à une fonction composée et de (2.1), (2.5) nous obtenons

$$\omega(X)(x) = T_r(R_r \circ L_{r-1} \circ R_{r-1})(X(x)) = T_r L_{r-1}(X(x)).$$

On vérifie d'une manière analogue la relation (2.8) C.Q.F.D.

La forme linéaire ω définit un champ de covecteurs sur G à valeurs dans $T_r(G)$ qui est noté aussi par ω :

$$(2.9) \quad \omega(x)(v) = \omega(X)(v), \quad \forall x \in G, v \in T_r(G),$$

où X est un champ de vecteurs sur G tel que $X(x) = v$. Il est aisé de voir que (2.9) est bien définie.

On peut définir d'une façon analogue pour tout $x \in G$ l'application $\omega^{-1}(x) \in L(T_r(G); T_r(G))$ par la formule

$$(2.10) \quad \omega^{-1}(x)(w) = \omega^{-1}(f)(x), \quad \forall w \in T_r(G),$$

où $f \in C(G; T_r(G))$ et $f(x) = w$. En vertu de (2.8) il résulte que (2.10) est bien définie.

Proposition 2.4. Si G est un groupe de Lie-Banach, alors :

$$(2.11) \quad T_r L_a = \omega^{-1}(ax) \circ \omega(x), \quad \forall a, x \in G.$$

Démonstration. De (2.7) et (2.8) nous obtenons

$$\omega^{-1}(ax) \circ \omega(x) = T_r(L_{ax}) \circ T_r L_{x-1} = T_r(L_{ax} \circ L_{x-1}) = T_r L_a \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Sur le groupe de Lie-Banach G nous définissons la 1-forme τ à valeurs dans $T_x(G)$ par la relation

$$(2.12) \quad \tau(X)(x) = -T_x(L_x \circ J)(X(x)), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(G), \quad x \in G.$$

De (2.5) on a

$$(2.13) \quad \tau(X)(x) = T_x R_{x^{-1}}(X(x)).$$

Aussi la 1-forme τ établit un isomorphisme entre les modules $\mathfrak{X}(G)$ et $C(G; T_x(G))$, τ^{-1} étant donnée par

$$(2.14) \quad \tau^{-1}(f)(x) = T_x R_x(f(x)), \quad \forall f \in C(G; T_x(G)) \text{ et } x \in G.$$

Pour chaque $x \in G$ nous définissons $\tau(x) \in L(T_x(G); T_x(G))$ et $\tau^{-1}(x) \in L(T_x(G); T_x(G))$ à l'aide des formules:

$$(2.15) \quad \begin{cases} \tau(x)(v) = T_x R_{x^{-1}}(v), \\ \tau^{-1}(x)(w) = T_x R_x(w), \end{cases} \quad \forall x \in G, \quad v \in T_x(G), \quad w \in T_x(G).$$

De (2.15) il résulte

$$(2.16) \quad T_x R_x = \tau^{-1}(xa) \circ \tau(x), \quad \forall x, a \in G.$$

§ 3. Formes banachiques invariantes sur un groupe de Lie-Banach

Nous allons donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une p -forme définie globalement sur un groupe de Lie-Banach soit invariante à gauche ou à droite.

Définition 3.1. Une p -forme ω_p sur G à valeurs dans l'espace de Banach E s'appelle invariante à gauche (resp. à droite) si pour tout $a \in G$ elle vérifie la relation

$$(3.1) \quad L_a^* \omega_p = \omega_p \quad (\text{resp. } R_a^* \omega_p = \omega_p).$$

Proposition 3.1. La forme linéaire ω (resp. τ) est invariante à gauche (resp. à droite).

Démonstration. En vertu de la relation (1.5) nous obtenons

$$(L_a^* \omega)(X) = \omega(L'_a X) \circ L_a \quad \text{pour tout } X \in \mathfrak{X}(G).$$

Alors pour $x \in G$ il résulte

$$\begin{aligned} (L_a^* \omega)(X)(x) &= T_{ax} L_{x^{-1}a^{-1}}(L'_a X(ax)) = T_x(L_{x^{-1}a^{-1}} \circ L'_a)(X(x)) \\ &= T_x L_{x^{-1}}(X(x)) = \omega(X)(x). \end{aligned}$$

On montre d'une manière analogue que τ est invariante à droite.
C. Q. F. D.

La proposition suivante donne la forme générale de toutes les p -formes sur G à valeurs dans $T_x G$.

Proposition 3.2. Pour toute $\omega_p \in \mathfrak{D}_p(G; T_x G)$ il y a une application p -linéaire alternée:

$$A_{\omega_p} : \underbrace{C(G; T_x G) \times \dots \times C(G; T_x G)}_{p \text{ fois}} \rightarrow C(G; T_x G), \text{ telle que}$$

$$(3.2) \quad \omega_p(X_1, \dots, X_p) = A_{\omega_p}(\omega(X_1), \dots, \omega(X_p)), \quad \forall (X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{X}_p(G).$$

Démonstration. Nous définissons l'application A_{ω_p} par la relation:

$$(3.3) \quad A_{\omega_p}(f_1, \dots, f_p) = \omega_p(\omega^{-1}(f_1), \dots, \omega^{-1}(f_p)), \quad \forall f_i \in C(G; T_x G), \quad (1 \leq i \leq p).$$

Il est aisé de voir que cette application est bien définie et vérifie la relation (3.2).

On définit analogiquement l'application

$$B_{\omega_p} : C(G; T_x G) \times \dots \times C(G; T_x G) \rightarrow C(G; T_x G) \text{ par}$$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} B_{\omega_p}(f_1, \dots, f_p) &= \omega_p(\tau^{-1}(f_1), \dots, \tau^{-1}(f_p)), \\ &\forall f_i \in C(G; T_x G), \quad (1 \leq i \leq p). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{X}_p(G)$ on a

$$(3.5) \quad \omega_p(X_1, \dots, X_p) = B_{\omega_p}(\tau(X_1), \dots, \tau(X_p)).$$

Proposition 3.3. Pour chaque $f \in C(G; T_x G)$ et $a \in G$ on a la relation

$$(3.6) \quad L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f)) = \omega^{-1}(f).$$

Démonstration. En vertu de la relation (1.4), pour tout $x \in G$ nous obtenons

$$L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f))(ax) = T_x L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f)(x)).$$

Compte tenu de (2.8) il résulte:

$$L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f))(ax) = T_x L'_a(T_x L'_a(f(ax))) = T_x L_{ax}(f(ax)) = \omega^{-1}(f)(ax)$$

Théorème 3.1. La condition nécessaire et suffisante pour que $\omega_p \in \mathfrak{D}_p(G; T_x G)$ soit invariante à gauche est que l'application A_{ω_p} donnée par (3.3) vérifie la relation

$$(3.7) \quad L'_a \circ A_{\omega_p} = A_{\omega_p} \circ (L'_a \times \dots \times L'_a),$$

pour tout $a \in G$.

Démonstration. La condition est nécessaire. En vertu de la relation (3.3) nous obtenons

$$A_{\omega_p}(L_a^* f_1, \dots, L_a^* f_p) = \omega_p(\omega^{-1}(L_a^* f_1), \dots, \omega^{-1}(L_a^* f_p)).$$

Mais ω_p est invariante à gauche et donc

$$\begin{aligned} A_{\omega_p}(L_a^* f_1, \dots, L_a^* f_p) &= \omega_p(L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f_1)), \dots, L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f_p))) \circ L_a = \\ &= L_a^*(\omega_p(L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f_1)), \dots, L'_a(\omega^{-1}(L_a^* f_p)))). \end{aligned}$$

Grâce aux relations (3.3) et (3.6), la dernière relation nous donne (3.7). La condition est suffisante. De (1.5) et (3.2) on a

$$(L_a^* \omega_p)(X_1, \dots, X_p) = \omega_p(L'_a X_1, \dots, L'_a X_p) \circ L_a = L_a^*(A_{\omega_p}(\omega(L'_a X_1), \dots, \omega(L'_a X_p)))$$

pour tout $(X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{F}_p(G)$. Si nous utilisons la condition (3.7), il résulte

$$(L_a^* \omega_p)(X_1, \dots, X_p) = A_{\omega_p}((L_a^* \omega)(X_1), \dots, (L_a^* \omega)(X_p)).$$

Mais ω est invariante à gauche sur G et donc

$$(L_a^* \omega_p)(X_1, \dots, X) = A_{\omega_p}(\omega(X_1), \dots, \omega(X_p)) = \omega_p(X_1, \dots, X_p). \quad \text{C.Q.F.D.}$$

On peut montrer aussi le

Théorème 3.2. La condition nécessaire et suffisante pour que $\omega_p \in \mathfrak{D}_p(G; T_r G)$ soit invariante à droite sur G est que l'application B_{ω_p} donnée par (3.4) vérifie la relation

$$(3.8) \quad R_a^* \circ B_{\omega_p} = R_{\omega_p} \circ (R_a^* \otimes \dots \otimes R_a^*),$$

pour chaque $a \in G$.

§4. Équations de structure pour un groupe de Lie-Banach

Des équations du type Maurer-Cartan ont été données pour les groupes de Lie-Banach par Gh. Gheorghiev [7] et A. D. Michal ([11] ch. VIII). Dans ce paragraphe nous obtiendrons globalement ces équations pour tout groupe de Lie-Banach.

Proposition 4.1. La forme différentielle $d\omega$ (resp. $d\tau$) est invariante à gauche (resp. à droite) sur G .

Démonstration. Si nous utilisons (1.18) pour tout $a \in G$ nous obtenons $L_a^* d\omega = dL_a^* \omega$. Mais ω est invariante à gauche et donc: $L_a^*(d\omega) = d\omega$. On montre analogiquement que $d\tau$ est invariante à droite. C.Q.F.D.

Soit M une variété différentielle de classe C^r , \mathbf{E} , \mathbf{F} deux espaces de Banach et $f \in L(\mathbf{E}; \mathbf{F})$. Pour tout $g \in C^r(M; \mathbf{E})$ on a la relation

$$T_x(f \circ g) = f \circ T_x(g), \quad \forall x \in M.$$

parce que $T_{x \circ f} f = f$. De cette relation, pour $X \in \mathfrak{X}(M)$, on obtient

$$(4.1) \quad X(f \circ g) = f \circ X(g).$$

Pour chaque $\omega_p \in \mathfrak{D}_p(M; \mathbf{E})$ nous définissons l'application $f \circ \omega_p: \mathfrak{F}_p(M) \rightarrow C(M; \mathbf{F})$ par la formule

$$(4.2) \quad (f \circ \omega_p)(X_1, \dots, X_p) = f \circ (\omega_p(X_1, \dots, X_p)), \quad \forall (X_1, \dots, X_p) \in \mathfrak{F}_p(M).$$

Il est facile de vérifier que $f \circ \omega_p$ est une p -forme sur M à valeurs dans \mathbf{F} différentiable de la même classe que ω_p .

De (1.14), (4.1) et (4.2) il résulte

$$(4.3) \quad d(f \circ \omega_p) = f \circ d\omega_p.$$

Proposition 4.2. Pour tout groupe de Lie-Banach G il existe une application bilinéaire, alternante

$$[,] : C(G; T_r(G)) \times C(G; T_r(G)) \rightarrow C(G; T_r(G)), \text{ de sorte que}$$

$$(4.4) \quad d\omega(X, Y) = -[\omega(X), \omega(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G),$$

$$(4.5) \quad L_a^*([f, g]) = [L_a^* f, L_a^* g], \quad \forall f, g \in C(G; T_r(G)), \quad a \in G.$$

Démonstration. Parce que $d\omega$ est une 2-forme invariante à gauche, il existe l'application $A_{d\omega}$ du théorème 3.1. Alors nous mettons $[,] = -A_{d\omega}$ et les relations (4.4) et (4.5) sont des corollaires de (3.2) et (3.7). C.Q.F.D.

Si l'espace Banach est à dimension finie, la relation (4.4) représente les équations de Maurer-Cartan.

On peut démontrer aussi la

Proposition 4.3. Pour tout groupe de Lie-Banach G il existe une application bilinéaire, alternante:

$$[\tau, \tau] : C(G; T_r(G)) \times C(G; T_r(G)) \rightarrow C(G; T_r(G)), \text{ de sorte que}$$

$$(4.6) \quad d\tau(X, Y) = -\{\tau(X), \tau(Y)\}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

$$(4.7) \quad R_a([\tau, \tau]) = [R_a^* \tau, R_a^* \tau], \quad \forall \tau \in C(G; T_r(G)), \quad a \in G.$$

Nous considérons les éléments de $T_r(G)$ comme applications constantes sur G à valeurs dans $T_r(G)$. Compte tenu de cette identification, on peut énoncer la

Proposition 4.4. Si $u, v \in T_r(G)$, alors $[u, v] \in T_r(G)$.

Démonstration. Par suite de la relation (4.5) nous obtenons

$$[u, v] \circ L_a = [u \circ L_a, v \circ L_a] = [u, v], \text{ pour tout } a \in G. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Nous avons trouvé donc une application $C \in L_a^2(T_r(G); T_r(G))$ définie par la formule

$$C(u, v) = [u, v], \text{ pour tout } u, v \in T_r(G).$$

appelée tenseur de structure de G [7].

Il existe aussi le tenseur de structure $K \in L_a^2(T_r(G); T_r(G))$ donné par la relation

$$K(u, v) = \{u, v\}, \quad \forall u, v \in T_r(G).$$

Proposition 4.5. Si la 1-forme ω est transformée en

$$(4.8) \quad \bar{\omega} = \lambda \circ \omega,$$

où λ est un automorphisme topologique linéaire de l'espace de Banach $T_r(G)$, alors [] se transforme par

$$(4.9) \quad \overline{[f, g]} = \lambda \circ [\lambda^{-1} \circ f, \lambda^{-1} \circ g], \quad \forall f, g \in C(G; T_r(G)).$$

Démonstration. Si nous appliquons à la relation (4.8) l'opérateur de différentiation extérieure, alors en vertu de (4.3) nous obtenons

$$d\bar{\omega}(X, Y) = \lambda \circ d\omega(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(G).$$

Cette relation se transforme par (4.4) :

$$\overline{[\omega(X), \omega(Y)]} = \lambda \circ [\omega(X), \omega(Y)] \text{ ou}$$

$$[\lambda \circ \omega(X), \lambda \circ \omega(Y)] = \lambda \circ [\omega(X), \omega(Y)].$$

De la proposition 2.1, pour chaque $f, g \in C(G; T_r(G))$ il existe $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$ de sorte que $\omega(X) = f$ et $\omega(Y) = g$. Donc

$$[\lambda \circ f, \lambda \circ g] = \lambda \circ [f, g], \quad \forall f, g \in C(G; T_r(G)).$$

Parce que λ est un automorphisme topologique linéaire de l'espace de Banach $T_r(G)$, cette dernière relation nous donne (4.8). C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

1. Birkhoff G. — *Analytical groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 43(1938), p.61 - 101.
2. Bourbaki N. — *Variétés différentielles et analytiques. Fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1967.
3. Cartan H. — *Calcul différentiel*, Hermann, Paris, 1967.
4. — *Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967.
5. Craioveanu M. — *Grupuri Lie-Banach de transformări ce lasă invariant un obiect geometric*, Stud. și cerc. Mat. 20 (1968), 833-841.
6. Dynkin E.B. — *Algèbres de Lie normées et groupes analytiques* (en russe), Uspehi mat. nauk. 5(1950), 135 - 186.
7. Gheorghiev Gh. — *Sur les groupes de Lie - Banach*, Rev. Roum. de Math. pures et appl., 15, no. 10 (1970), 1611 - 1623.
8. Lang S. — *Introduction to differentiable manifold*, (éd. russe) Moscou, 1967.

9. I. augwitz D. — *Über unendliche kontinuierliche Gruppen*, I. Math. Ann., 130 (1955), 337 - 350; II. Bayer. Akad. Wiss. 1956, 261 - 286.
10. Maissen B. — *Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume*, Acta Math., 108 (1962), 229-269.
11. Michal A.D. — *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach*, Gauthier - Villars, Paris, 1964.

FORME DIFERENȚIALE CU VALORI ÎNTR-UN SPAȚIU BANACH ȘI GRUPURI LIE - BANACH

Se dezvoltă teoria formelor cu valori într-un spațiu Banach și cu ajutorul ei se rezolvă global anumite probleme din teoria grupurilor Lie-Banach. Se dau condiții necesare și suficiente pentru ca o p -formă banachică pe un grup Lie-Banach să fie invariantă la stînga sau la dreapta. Se obțin ecuații de structură de tipul ecuațiilor Maurer-Cartan bine cunoscute pentru grupuri Lie de dimensiune finită.