G-STRUCTURI DE ORDIN SUPERIOR PE VARIETĂŢI BANACHICE

DE

LILIANA MAXIM

În cadrul general al noţiunii de grupoid diferenţiabil, vom defini în cele ce urmează G-structurile de ordin superior pe o varietate banachică şi le vom asocia cîte un sistem diferenţial liniar şi omogen. Punctul de plecare al acestor consideraţii este lucrarea lui P. V. Eecke [5].

§ 0. Definiţii şi notaţii

Definiţia 1. *Se numeşte grupoid o mulţime Φ dotată cu o lege de compoziţie parţial definită, $(f, g) \to gf$, satisfăcînd axiomele următoare:*

1° *Pentru orice ternă $(f, g, h) \in \Phi \times \Phi \times \Phi$ compunerile $h(gf)$ şi $(hg)f$ sînt definite şi egale dacă una din ele este definită.*

2° *Pentru orice ternă $(f, g, h) \in \Phi \times \Phi \times \Phi$, astfel că gf şi hg sînt definite $h(gf)$ este definită.*

3° *Pentru orice $f \in \Phi$ există o unitate la dreapta şi o unitate la stînga* ($e \in \Phi$ se zice unitate la dreapta (stînga) dacă $fe = f$ (resp. $ef = f$), cu $f \in \Phi$ pentru care fe (resp. ef) este definită).

4° *Orice element $f \in \Phi$ este inversibil, adică există $f' \in \Phi$ astfel că ff' şi $f'f$ sînt definite şi sînt unităţi.*

Este uşor de văzut că pentru un $f \in \Phi$ unităţile la dreapta şi la stînga corespunzătoare prin 3° sînt unice. Notînd prin C submulţimea unităţilor lui Φ definim aplicaţiile numite respectiv sursă şi ţintă, a şi b, $a: \Phi \to C$, $b: \Phi \to C$ care asociază la $f \in \Phi$ unica unitate la dreapta, respectiv la stînga, corespunzătoare.

O structură de varietate de clasă C^p şi o structură de grupoid pe o mulţime Φ se zic compatibile dacă:

1° Submulţimea C a unităţilor lui Φ este o subvarietate a lui Φ.

2° Aplicațiile $a: \Phi \to \Phi$ și $b: \Phi \to \Phi$ sînt morfisme.

3° Mulțimea $\Phi \oplus \Phi$ a perechilor componibile este o subvarietate și aplicația $(f, g) \to gf$ este un morfism.

4° Operația de inversare $f \to f^{-1}$ este un morfism de la Φ în Φ.

Definiția 2. *O mulțime Φ dotată cu o structură de varietate, de clasă $C^p (p \geq 1)$ și o structură de grupoid compatibile se numește grupoid diferențiabil de clasă C^p. Morfismele a și b vor fi în acest caz submersii.*

Definiția 3. *Se numește baza unui grupoid diferențiabil Φ de clasă C^p o pereche (V, i) unde i este un difeomorfism al varietății banachice V de clasă C^p pe varietatea C a unităților lui Φ.*

Notăm tot prin a și b aplicațiile definite pe Φ cu valori în V, obținute prin compunerea aplicațiilor sursă-țintă precedente cu difeomorfismul i.

Definiția 4. *Grupoidul diferențiabil Φ se numește local tranzitiv* (resp. tranzitiv) *dacă aplicația $(a, b): \Phi \to V \times V$ este o submersie* (resp. o submersie surjectivă).

Fie acum M o mulțime și Φ un grupoid. Se numește *lege de acțiune* a grupoidului Φ pe M o aplicație $(f, z) \to fz$, definită pe o submulțime din $\Phi \times M$ cu valori în M, ce verifică:

1° $\forall (f, g, z) \in \Phi \times \Phi \times M$, $(gf)z$ și $g(fz)$ sînt definite și sînt egale dacă una din ele este definită.

2° $\forall (f, g, z) \in \Phi \times \Phi \times M$, $g(fz)$ este definită dacă gf și fz sînt definite

3° Pentru orice $(e, z) \in \Phi \times M$, astfel că e este o unitate și ez este definită, se obține $ez = z$.

4° Pentru orice $z \in M$ (resp. pentru orice $f \in \Phi$) există $f \in \Phi$ (resp. $z \in M$) astfel că $f \in z$ este definită.

Se dovedește imediat că pentru $z \in M$ există o singură unitate $e \in \Phi$ astfel că ez este definită. Notăm atunci prin:

$$p: M \to C$$

aplicația care asociază la $\forall z \in M$ singura unitate compatabilă cu z. Pe baza condiției 4° de mai sus, p este surjectivă.

Definiția 5. *Se numește varietate cu grupoid de operatori de clasă C^p un grupoid diferențiabil Φ de clasă C^p, o varietate M de clasă C^p, o lege de acțiune a grupoidului Φ pe mulțimea M, astfel că proiecția $p: M \to C$ este o submersie și o lege de acțiune $\Phi \oplus M \to M$ definită pe produsul fibrat al submersiilor $a: \Phi \to C$ și $p: M \to C$ care să fie un morfism de varietăți.*

Definiția 6. *Fie $\pi: M \to V$ o submersie surjectivă de varietăți de clasă C^p și fie Φ un grupoid diferențiabil de operatori pe M* (Def. 5). *Există atunci și este unic un morfism $i: V \to \Phi$ astfel că (V, i) este bază pentru Φ și diagrama*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ V \arrow[rr, "i"] & & C \end{tikzcd}$$

este comutativă. În acest caz se spune că Φ operează pe (M, π, V) relativ la baza (V, i).

Are loc următorul rezultat ([5], Prop. III. 5.4): O condiție suficientă ca submersia surjectivă π să fie o fibrare este ca (M, π, V) să admită un grupoid diferențiabil de operatori Φ (Def. 6) local tranzitiv. Vom numi această fibrare, asociată grupoidului Φ.

În sfîrșit, notăm prin $\Phi_x (x \in V)$ următoarea submulțime a unui grupoid Φ

$$\Phi_x = \{f \mid f \in \Phi;\ a(f) = b(f) = x\}$$

care (se vede imediat din Def. 1) este dotată cu o structură algebrică de grup. Îl vom numi grup de izotropie al lui Φ în punctul x.

§ 1. Structuri infinitezimale de ordin k pe C^p-varietăți banachice $(k \leq p)$

Începem prin a demonstra următoarea propoziție:

Propoziția 1. *Dacă Φ este un grupoid diferențiabil tranzitiv de clasă C^p avînd varietatea banachică separată V ca bază, atunci:*

a) *grupurile de izotropie ale grupoidului Φ sînt grupuri Lie-Banach izomorfe;*

b) *submulțimea $\Phi_{(x)} = \{f \mid f \in \Phi,\ a(f) = x\}$ pentru un $x \in V$ fixat este un spațiu fibrat principal diferențiabil avînd V ca varietate bază, b ca proiecție și Φ_x ca grup structural.*

În adevăr, $\forall x \in V$, Φ_x este o subvarietate închisă în Φ deoarece

$$\Phi_x = (a, b)^{-1}(x, x)$$

și în ipotezele noastre (a, b) este submersie; rezultă imediat că structura de grup și structura diferențială pe V sînt compatibile.

Fie acum $x, y \in V$; cum Φ estre tranzitiv, există $f_0 \in \Phi$ astfel ca $a(f) = x$, $b(f_0) = y$. Acest f_0 determină un izomorfism diferențiabil al grupurilor Lie-Banach Φ_x și Φ_y prin:

$$f_0: \Phi_x \to \Phi_y$$
$$f \to f_0 \cdot f_0 \cdot f^{-1}.$$

a) este dovedită.

Pentru a demonstra afirmația b) observăm că $\Phi_{(x)} = a^{-1}(x)$ și deci este subvarietate în Φ. Mai mult Φ operează pe terna $(\Phi_{(x)}, b, V)$ relativ la baza (V, i) în sensul definiției 6. Din propoziția III. 5.4 [5] rezultă atunci că b este o fibrare local trivială. Dar grupul Φ_x operează pe $\Phi_{(x)}$ în mod natural, tranzitiv pe fibră și prin urmare b) este dovedită.

Exemple. 1° Notăm prin $G(\Phi) = (a, b)^{-1}(\Delta)$, unde Δ notează varietatea diagonală închisă în $V \times V$. Dacă Φ este tranzitiv, $G(\Phi)$ este o sub-

varietate închisă în Φ. Mai mult, $(G(\Phi), a, V)$ este un spaţiu fibrat diferenţiabil, ca urmare a acţiunii lui Φ asupra submersiei a, avînd ca fibră $x \in V$ pe Φ_x. Cum acţiunea lui Φ pe $G(\Phi)$ este compatibilă cu structura algebrică a fibrelor, $G(\Phi)$ este un fibrat în grupuri Lie-Banach peste V.

2° În [5] de exemplu (Corolarul 2, p. 83) s-a definit grupoidul diferenţiabil $\Pi^k(V)(k \leq p)$ al k-jeturilor inversibile de morfisme de la V pe V. Un spaţiu asociat grupoidului diferenţiabil $\Pi^k(V)$ va fi numit *spaţiu al prelungirii infinitezimale de ordin k*. Facem observaţia că $\Pi^1(V)$ are drept grup de izotropie grupul Lie-Banach $GL(E)$, unde prin E am notat spaţiul Banach peste care este modelată varietatea V.

Rezultă deci că orice $GL(E)$-fibrat este un spaţiu al prelungirii infinitezimale de ordin 1; în particular fibratul vectorial tangent la varietatea V, $T(V)$.

Definiţia 1.1. *Fie Φ un grupoid diferenţiabil de clasă C^p care operează tranzitiv pe terna (M, π, V), $\pi: M \to V$ fiind o submersie surjectivă şi fie $\sigma: V \to M$ o secţiune globală diferenţiabilă de clasă C^p pentru π.*

Vom spune că σ este regulată dacă $\forall x, y \in V$, există $f \in \Phi$ cu $a(f) = x$ $b(f) = y$, astfel ca

$$f \cdot \sigma(a(f)) = \sigma(b(f)).$$

În acest caz f se zice compatibil cu σ.

$(f \cdot \sigma(a(f))$ este definită căci $a(f) = (\pi \circ \sigma)(a(f)) = \pi(\sigma(a(f))$.

În [5], p. 55, se demonstrează următorul rezultat referitor la secţiuni regulate:

Propoziţia 1.2. *Orice secţiune globală regulată diferenţiabilă de clasă C^p a unui fibrat (M, π, V) asociat grupoidului diferenţiabil Φ, de clasă C^p defineşte canonic un subgrupoid diferenţiabil în Φ, ψ, numit subgrupoid de izotropie în raport cu σ, care este tranzitiv.*

Definiţia 1.2. *O structură infinitezimală de ordin k pe varietatea banachică V este dată de o secţiune diferenţiabilă a unui spaţiu fibrat asociat grupoidului $\Pi^k(V)$. Structura infinitezimală este regulată dacă această secţiune este regulată; în acest ultim caz ea determină un subgrupoid în $\Pi^k(V)$ pe care-l vom numi G-structură de ordin k pe V* (G este grupul de izotropie al subgrupoidului).

Observaţie. O structură infinitezimală de ordin 1 pe V conduce la o reducere a grupului structural $GL(E)$ al fibratului asociat la $\Pi^1(V)$ la un subgrup al său.

Exemple de G-structuri de ordinul 1

1° Fie V o varietate banachică de clasă $C^p(p \geq 1)$, $T(V)$ fibratul vectorial tangent, asociat la $\Pi^1(V)$. Fie σ secţiunea zero a acestui fibrat. Atunci subgrupoidul de izotropie al secţiunii σ este tot $\Pi^1(V)$ şi deci $G = GL(E)$.

2° Fie σ o secţiune globală oarecare a fibratului $T(V)$. Considerăm subgrupoidul care invariază orice secţiune σ. În acest caz $G = \{Id_E\} = \{e\}$. O $\{e\}$-structură pe V este echivalentă cu faptul că V este C^{p-1} paraleliza-

bilă, adică $T(V)$ este C^{p-1}-izomorf cu fibratul produs $V \times E$ (E modelul varietăţii V); altfel spus, fibratul ei principal este C^{p-1}-izomorf cu fibratul produs $V \times GL(E)$.

Din teorema lui Kuiper, rezultă următorul rezultat:

Orice C^p-varietate $V(p \geq 1)$, paracompactă, infinit-dimensională modelată pe un spaţiu Hilbert este C^{p-1}-paralelizabilă, adică admite o $\{e\}$-structură.

3° Considerăm fibratul material $SL^2(T(V), R) \to V$, a cărui fibră peste orice $x \in V$ este spaţiul formelor biliniare continue, simetrice, definite pe spaţiul tangent în x, V_x. O structură riemannană de clasă $C^k(k < p)$ pe V este o C^k-secţiune globală σ a fibratului considerat care este pozitiv definită în orice x şi care privită ca un produs scalar pe V_x îl transformă într-un spaţiu Hilbert.

Cum $SL^2(T(V), R)$, ca orice fibrat tensorial peste V de altminteri, este asociat grupoidului $\Pi^1(V)$, secţiunea σ determină un subgrupoid în $\Pi^1(V)$. Acesta determină un subgrup $O(E) \subset GL(E)$.

O structură riemannană pe V este deci echivalentă cu o reducere la grupul lui Hilbert a grupului structural $GL(E)$; obţinem o $O(E)$-structură.

Reproducem, după [7], p. 137, următoarea teoremă de existenţă a $O(E)$-structurilor:

Dacă varietatea V este C^p-regulată şi este modelată pe un spaţiu Hilbert, atunci există pe V o structură riemannană.

4° Notăm cu $\Lambda^2 T(V) \to V$ fibratul a cărui fibră peste $x \in V$ este spaţiul Banach al 2-formelor liniare continue alternante pe V_x, $AL^2(V_x, R)$. Fie Ω o secţiune globală a acestui fibrat care este închisă $(d\Omega = 0)$ şi astfel ca aplicaţia

$$\Omega: T(V) \to T(V)$$

$$X \to \langle X, \Omega \rangle$$

este un izomorfism fibrat. Cum $\Lambda^2 T(V)$ este asociat grupoidului $\Pi^1(V)$ rezultă că Ω determină un subgrupoid care o invariază, adică o reducere a grupului $GL(E)$. Se obţine astfel structura simplectică al cărei studiu local este făcut în [12].

5° Fibratul $L(T(V), T(V)) \to V$ a cărui fibră peste $x \in V$ este mulţimea aplicaţiilor liniare continue de la V_x pe V_x este asociat grupoidului $\Pi^1(V)$. Fie F o C^k-secţiune $(k \leq p)$ globală a acestui fibrat care satisface condiţia

$$F \circ F = -I$$

pentru fiecare $x \in V$. Din definiţie se vede că o asemenea structură este nesingulară. Este vorba de structura aproape complexă.

6° O r-π-structură este definită de o C^k-secţiune F în fibratul din exemplul precedent care satisface condiţia

$$\underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{r \text{ ori}} = \lambda I,$$

λ fiind rădăcina de ordinul r a unității. Pentru $r=2$ obținem structura aproape-produs.

7° Considerăm acum două C^k-secțiuni în fibratul $L(T(V), T(V))$, F și G ce verifică condițiile:

$$F \circ F = -I, \qquad G \circ G = -I \qquad F \circ G + G \circ F = 0.$$

Ele determină o C^k-structură aproape cuaternionică pe varietatea V.

8° Fie spațiul Banach E modelul C^p-varietății V și $T(V)$ fibratul vectorial tangent a cărui fibră în fiecare punct este izomorfă cu E.

Asociem fiecărui $x \in V$ varietatea grassmanniană $G_n(T_x)$, subvarietatea deschisă conexă a varietății grassmanniene $G(T_x)$, ale cărei elemente sînt subspații vectoriale din T_x de dimensiune finită egală cu $n \geqslant 0$ întreg ([3], cap. IV).

Notăm prin

$$G_n(V) = \bigcup_{x \in V} G_n(T_x)$$

fibratul grassmannian, evident asociat grupoidului $\Pi^1(V)$. Considerăm o secțiune diferențiabilă a acestui fibrat. Subgrupoidul care o invariază determină o reducere a grupului $GL(E)$ la acele transformări care invariază un subspațiu de dimensiune n. Aceasta este echivalent cu a da un subfibrat în $T(V)$ cu fibră finit-dimensională n, adică un sistem diferențial de ordin 1. Cum $G_n(T_x)$ este izomorfă cu $G^n(T_x)$ (varietatea grassmanniană a subspațiilor de codimensiune finită n din dualul T_x al spațiului T_x) rezultă echivalența celor două definiții ale sistemelor diferențiale de ordin 1.

9° Considerăm acum $G(V) = \bigcup_{x \in V} G(T_x)$ fibratul grassmannian al fibratului tangent la V, asociat grupoidului $\Pi^1(V)$ și $\sigma \circ C_k$-secțiune a acestui fibrat care asociază unui x oarecare din V un element finit-dimensional din $G(T_x)$. O astfel de secțiune determină un subgrupoid în $\Pi^1(V)$ (Prop. 2), adică o reducere a grupoidului $GL(E)$ la operatori de rang finit $\mathcal{J}(E) \subset GL(E)$. Obținem astfel pe V o *C^k-structură etalată*.

§2. Sistemul diferențial liniar asociat unei structuri infinitezimale regulate de ordin k

Fie V o varietate de clasă C^∞ modelată pe spațiul Banach E; notăm prin V_x^k spațiul vectorial al k-jeturilor în x ale C^∞-germenilor de cîmpuri de vectori pe V în $x \in V$ și cu $\Pi_{(x)}(V)$ fibratul asociat în Prop. 1, b) grupoidului diferențiabil $\Pi^k(V)$.

Pentru o C^∞-secțiune X a fibratului $T(V)$ considerăm ecuația diferențială

$$\frac{d\Phi_t(x)}{dt} = X(\Phi_t(x)),$$

ale cărei soluții, traiectoriile cîmpului X, sînt definite pentru un anumit interval maximal $\alpha_x < t < \beta_x$ din R ce conține 0. Mulțimea $D(X) = \{(t, x) \in R \times V,\ \alpha_x < t < \beta_x\}$ este o vecinătate deschisă a punctului $(0, x)$ și pe ea aplicația $(t, x) \to \Phi_t(x)$ definește un germene de grup uniparametric de C^∞-difeomorfisme pe V.

Fie U un deschis din V pe care este definit X, definim un grup uniparametric acționînd pe $b^{-1}(U) \subset \Pi^k(V)$ prin:

$$\Phi_t^k(\alpha) = j^k\Phi_t \circ \alpha, \qquad \forall \alpha \in \Pi^k(V),$$

unde prin Φ_t am notat grupul uniparametric local definit de X.

Notăm cu X^k cîmpul definit în $b^{-1}(U)$ de grupul uniparametric local Φ_t^k; din definiție se vede că X^k este tangent varietății $\Pi^k_{(x)}(V)$, $x = a(\alpha)$, $\forall \alpha \in b^{-1}(U)$.

După Rodriques [10], pentru $\alpha \in \Pi^k(V)$ considerăm difeomorfismul

$$R(\alpha) : \Pi^k_{(a(\alpha))}(V) \to \Pi^k_{(b(\alpha))}(V)$$
$$\omega \to \omega \circ \alpha^{-1}$$

Au loc următoarele rezultate:

Propoziția 2.1. *Dacă $\omega \in b^{-1}(U)$, $\alpha \in \Pi^k(V)$, cu $a(\alpha) = a(\omega)$, atunci*

$$R(\alpha)_*(X^k(\omega)) = X^k(R(\alpha)\omega).$$

Demonstrație. Observăm că:

$X^k_{(\omega)}$ este tangent în $t=0$ la curba $j^k\Phi_t \circ \omega$;

$X^k(R(\alpha)\omega)$ este tangent în $t=0$ la curba $j^k\Phi_t \circ (\omega \circ \alpha^{-1})$ și atunci propoziția rezultă din ecuația

$$R(\alpha)(j^k\Phi_t \circ \omega) = j^k\Phi_t \circ (\omega \circ \alpha^{-1}).$$

Fie $I^k(x)$ k-jetul în $x \in V$ al aplicației identice pe V.

Propoziția 2.2. *Dacă X și Y sînt două cîmpuri directoare definite pe un deschis U din V, astfel ca $j_x^k X = j_x^k Y$, atunci:*

$$X^k(I^k(x)) = Y^k(I^k(x)).$$

Demonstrația rezultă imediat observînd că diferențialele pînă la ordinul x ale aplicațiilor Φ_t și Φ'_t, determinate de X și Y, depind numai de diferențialele de ordin $\leqslant k$, ale acestora din urmă.

Combinînd afirmațiile propozițiilor 2.1 și 2.2 rezultă

Propoziția 2.3. *Dacă X și Y sînt două cîmpuri de vectori locali definite pe U, deschis din V și $j_x^k X = j_x^k Y$ pentru $x \in U$, atunci*

$$X^k(\alpha) = Y^k(\alpha), \qquad \forall \alpha \in \Pi^k(V), \text{ cu } b(\alpha) = x.$$

În adevăr, avem

$$X^k(\alpha) = X^k(R(\alpha^{-1})\cdot I(b(\alpha))) = R(\alpha^{-1})_* X^k(I(b(\alpha))) = R(\alpha^{-1})_* Y^k(I(b(\alpha))) = Y^k(\alpha).$$

Pentru $\alpha \in \Pi^k(V)$, cu $a(\alpha) = x$, fie T^k_α spațiul tangent în α la varietatea $\Pi^k_{(x)}(V)$. Din propoziția 2.3 rezultă că pentru $\alpha \in \Pi^k(V)$ există o aplicație

$$\lambda^k(\alpha) : V^k_{b(\alpha)} \to T^k_\alpha,$$

$$\tau = j^k_x X \to X^k_\alpha.$$

Propoziția 2.4. *$\lambda^k(R(\alpha)(\omega)) = R(\alpha)_* \circ \lambda^k(\omega)$ pentru α, $\omega \in \Pi^k(V)$ cu $a(\alpha) = a(\omega)$.*

Rezultă din propoziția 2.1 și din definiția aplicației $\lambda^k(\alpha)$.

Propoziția 2.5. *$\lambda^k(\alpha)$ este un izomorfism liniar de la $V^k_{b(\alpha)}$ pe T^k_α.*

Demonstrație. Propoziția 2.4 arată că este suficient să considerăm $\alpha = I^k_x$, $x \in V$. Din demonstrația propoziției 2.2 rezultă că $\lambda^k(I^k_x)$ este injectivă și liniară. Pentru a arăta că este „pe" fie $\tau \in T^k$; atunci cîmpul de vectori căutat X are partea principală în x și derivatele sale tocmai valoarea vectorului τ în I^k.

Propoziția 2.6. *Dacă X și Y sînt două cîmpuri definite pe un deschis $U \subset V$, atunci*

$$[X, Y]^k = [X^k, Y^k].$$

Demonstrație. Fie Φ_t respectiv Φ'_t grupurile uniparametrice locale generate de X și Y. Atunci

$$[X, Y] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(Y - \Phi^*_t Y).$$

Pentru $\alpha \in b^{-1}(U) \to [X, Y]^k(\alpha) = \lambda^k(\alpha)(j^k_{b(\alpha)}[X, Y]) =$

$$\lambda^k(\alpha)\left(j^k_{b(\alpha)}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y - \Phi^*_t Y)\right)\right) = \lambda^k(\alpha)\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(j^k_{b(\alpha)}Y - j^k_{b(\alpha)}\Phi^*_t Y)\right) =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\lambda^k_{(\alpha)}(j^k_{b(\alpha)}Y) - \lambda^k(\alpha)(j^k_{b(\alpha)}\Phi^*_t Y)] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Y^k(\alpha) - (\Phi^*_t Y)^k(\alpha)).$$

Dar pentru t fixat, $\Phi^*_t Y$ este generat de $\Phi_t \Phi'_u \Phi_t^{-1}$; deci $(\Phi^*_t Y)^k$ este generat de $(\Phi_t \circ \Phi'_u \circ \Phi_t^{-1})^k = \Phi^k_t \circ \Phi'^k_u \circ (\Phi^k_t)^{-1}$ și

$$(\Phi^*_t Y)^k = (\Phi^k_t)_* Y^k$$

și $[X, Y]^k(\alpha) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[Y^k(\alpha) - (\Phi^k_t)_* Y^k(\alpha)] = [X^k, Y^k](\alpha)$, c.c.t.d.

Rezultă imediat

Corolarul 1. *Următoarea diagramă este comutativă pentru $l \leq k$:*

$$\begin{tikzcd} V^k_{b(\alpha)} \arrow[r, "\lambda^k(\alpha)"] \arrow[d, "\rho_l"'] & T^k_\alpha \arrow[d, "\rho_l"] \\ V^l_{b(\alpha)} \arrow[r, "\lambda^l(\alpha)"] & T^l_\alpha \end{tikzcd}$$

unde $\forall \alpha \in \Pi^k(V)$ și ρ_l este proiecția canonică.

Considerăm acum σ o C^∞-secțiune regulată într-un fibrat asociat grupoidului $\Pi^k(V)$. Notăm cu Φ subgrupoidul determinat prin propoziția 1.2. Rezultă de aici că $\Phi_{(x)}$ este subvarietate în $\Pi^k_{(x)}(V)$ și deci $T_\alpha(\Phi_{(x)})$ este subspațiu vectorial în T^k_α pentru orice $\alpha \in \Phi_{(x)}$.

Pe de altă parte, din propoziția 2.5, orice $\alpha \in \Pi^k_{(x)}(V)$ determină izomorfismul

$$\lambda^k(\alpha) : V^k_{b(\alpha)} \to T^k_\alpha,$$

așa încît $T_\alpha(\Phi_{(x)})$ va fi aplicat prin inversul acestui izomorfism într-un subspațiu vectorial în $V^k_{b(\alpha)}$, fie el $E^k_{b(\alpha)}$.

Fie

$$\bigcup_{\alpha \in \Phi_{(x)}} T_\alpha(\Phi_{(x)}) \simeq \bigcup_{b(\alpha) \in V} E^k_{b(\alpha)} = E^k.$$

E^k este evident o submulțime în $\mathcal{J}^k(T(V))$ și se numește sistemul diferențial asociat structurii infinitezimale regulate de ordin k determinată de σ.

Putem acum să enunțăm și să demonstrăm

Teorema 2.1. *Sistemul diferențial E^k este liniar și omogen, adică E_k este un subfibrat vectorial în $\mathcal{J}^k(T)$. Mai mult, fasciculul de secțiuni $C^\infty(E^k)$ este un subfascicul de R-algebre Lie în $C^\infty(\mathcal{J}^k(T))$.*

Liniaritatea sistemului dat de E^k rezultă din modul cum a fost definit.

Dar din propozițiile 2.1 — 2.6 rezultă că fasciculul de R-algebre Lie $C^\infty(\mathcal{J}^k(T))$ este canonic izomorf cu fasciculul de R-algebre Lie al cîmpurilor de vectori invariante la dreapta pe fibratul $\Pi^k_{(x)}(V)$. Deci fasciculul $C^\infty(E^k)$ este izomorf cu fasciculul cîmpurilor de vectori invarianți la dreapta pe fibratul $\Phi_{(x)}$ care este un fascicul de R-algebre Lie. Aceasta arată că E^k este subfibrat în $\mathcal{J}^k(T)$ și teorema este demonstrată.

§ 3. Aplicații

Datele următoare referitoare la proiectori și integrabilitatea lor din [9] sînt necesare în cele ce urmează.

Definiţia 3.1. *V fiind o C^p-varietate $(2 \leq p \leq \omega)$, un C^s proiector $(s \leq p-1)$, $P: T(V) \to T(V)$, (C^s-secţiune în $L(T(V), T(V))$ ce verifică $P \circ P = P$) se zice integrabil dacă pentru orice $x_0 \in V$ există o hartă în x_0 în care expresia lui P să fie constantă.*

Propoziţia 3.1. *Fiecare din următoarele condiţii este necesară şi suficientă pentru ca un C^s-proiector P să fie integrabil:*

a) *pentru orice C^1-cîmpuri de vectori locali X, Y avem*

$$P[PX, PY] = [PX, PY] \text{ şi}$$

$$Q[QX, QY] = [QX, QY], \text{ cu } Q = I - P;$$

b) *C^{s-1}-secţiunea N_P în $L^2(T(V), T(V))$ dată de*

$$N_P(X,Y) = [PX, PY] + P[X, Y] - P[X, PY] - P[PX, Y]$$

se anulează (Nijenhuis);

c) *imaginea lui P şi nucleul lui P sînt subfibrate integrabile în $T(V)$*

d) *Dacă V admite partiţii ale unităţii şi $s \geq 2$ există o C^{s-2}-conexiune simetrică pe $T(V)$ pentru care $\nabla P = 0$, ∇ fiind derivarea covariantă pe $L(T(V), T(V))$ asociată unei conexiuni date.*

A. *Varietăţi aproape-produs*

Definiţia 3.2. *O C^s-structură aproape-produs pe o C^{r+1}-varietat $V (0 \leq p \leq \omega,\ 0 \leq s \leq r)$ este o C^s-secţiune F în $L(T(V), T(V))$ astfel ca $F \circ F = I$.*

Ne vom situa în cazul $p = \omega$.

Propoziţia 3.2. *Următoarele date pe V sînt echivalente:*

a) *O structură aproape-produs F pe V.*

b) *Există subfibratele $\mathbf{P}$ şi $\mathbf{Q}$ în $T(V)$ astfel ca $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q} = \{0\}$ şi*

$$T(V) = \mathbf{P} \oplus \mathbf{Q}.$$

c) *Există proiecţiuni P, $Q: T(V) \to T(V)$ astfel ca $P + Q = I$.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b). Din definiţia 3.2 se vede că F este nesingulară şi că valorile proprii ale operatorului F sînt ± 1; definim atunci

$$\mathbf{P} = \{X \in T(V);\ FX = X\}, \qquad \mathbf{Q} = \{X \in T(V);\ FX = -X\}$$

b) $\Rightarrow$ c) Proiectorii P şi Q sînt definiţi în mod natural prin

$$P: T(V) \to \mathbf{P}, \qquad Q: T(V) \to \mathbf{Q}.$$

c) $\Rightarrow$ a) Definim endomorfismul F pe $T(V)$ prin:

$$F = 2P - I.$$

Se vede imediat că F satisface condiţia din definiţia 3.2, c.c.t.d.

Vom nota varietatea aproape-produs prin (V, F). Un cîmp de vectori X pe (V, F) se va numi de tip $(1, 0)$, dacă aparţine secţiunilor subfibratului $\mathbf{P}$, adică $PX = X$ sau încă $FX = X$ sau încă $QX = 0$. Analog X se va numi de tip $(0, 1)$ dacă este o secţiune în $\mathbf{Q}$. Atunci orice cîmp de vectori X se descompune într-o sumă a cîmpurilor PX şi QX de tip $(1, 0)$, $(0, 1)$ respectiv.

O formă diferenţială ω pe (V, F) se zice de tip $(1, 0)$ dacă $F^*\omega = \omega$ sau încă $Q^*\omega = \omega \circ Q = 0$ sau încă $P^*\omega = \omega \circ P = \omega$.

Mai general, o n-formă ω pe (V, F) se zice de tip (p, q) cu $p+q=n$, dacă ω se anulează pe orice n-uplu de cîmpuri de vectori format din p' cîmpuri de tip $(1, 0)$ şi q' cîmpuri de tip $(0, 1)$ cu $p'+q'=n$ şi $p' \neq p$, $q' \neq q$; rezultă atunci că orice n-formă se descompune într-o sumă de n-forme de tip (p, q) cu $p+q=n$ $(0 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n)$.

Definiţia 3.3. *Structura aproape-produs F se zice integrabilă dacă oricare ar fi punctul $x_0 \in V$, există o hartă în care expresia operatorului F este constantă.*

Aceasta înseamnă că, dat $x_0 \in V$, există o hartă $\varphi = (U, \varphi, E)$, şi o structură aproape-produs $\mathbf{F}$ pe E, astfel ca $d\varphi \circ F = \mathbf{F} \circ d\varphi$.

Teorema 3.1. *Pentru orice varietate aproape-produs (V, F) de clasă C^ω următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1) *Structura aproape-produs este integrabilă;*

2) *Fasciculul germenilor secţiunilor locale ale fibratului $T(V)$ este local generat de soluţiile locale ale sistemului diferenţial asociat structurii prin teorema 2.1;*

3) $N_F(X, Y) = [FX, FY] + [X, Y] - F[X, FX] - F[FX, Y] = 0,$

$$\forall X,\ Y \in C^\omega(T(V));$$

4) *Pentru orice $f \in C^\omega(V)$, $d(F^*(df)) = -F^*(d(F^*(df))$;*

5) $N_F(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in C^\omega(T(V))$ (Proiectorul P este integrabil);

6) *Fasciculul cîmpurilor de vectori locali de tip $(1, 0)$ este un fascicul de algebre Lie;*

7) *Pentru orice formă diferenţială locală ω de tip (p, q), $d\omega$ este sumă de forme de tip $(p+1, q)$ şi $(p, q+1)$;*

8) *Pentru orice formă diferenţială locală ω de tip $(1, 0)$, $d\omega$ este suma dintre o formă de tip $(2, 0)$ şi o formă de tip $(1, 1)$.*

Demonstraţie. 1) $\Rightarrow$ 2).

Vom scrie mai întîi sistemul diferenţial E^1 asociat structurii F. Pentru aceasta considerăm operatorul

$$h: C^\omega(T(V)) \to C^\omega L(T(V), T(V)),$$

$$X \to L_X F,$$

unde prin $L_X F$ am notat derivata Lie a operatorului F în raport cu cîmpul X, definită folosind consideraţiile din [7], p. 116.

Dacă X şi F au reprezentarea locală (x, X'_x) şi (x, F'_x) respectiv, atunci

$$(L_X F)_x = DF'_{(x)}(X_x) + F'_x \circ DX'_{(x)} - DX'_{(x)} \circ F'_x .$$

h este un operator diferenţial de ordin 1 ([9]); el defineşte deci un operator

$$h' : C^\omega(\mathcal{F}^1(T(V))) \to C^\omega(L(T(V), T(V))).$$

Atunci, din definiţie rezultă:

$$E^1 = \{X \in C^\omega(\mathcal{F}^1(T(V)); \quad h'(X) = 0\}.$$

Sistemul asociat structurii F este deci dat de:

$$\begin{cases} DF'_{(x)}(X_x) + F'_x \circ DX'(x) - DX'(x) \circ F'_x = 0, \\ F \circ F = I. \end{cases}$$

Rezultă atunci imediat implicaţia 1) $\to$ 2).

2) $\Rightarrow$ 3)

Arătăm că 2) implică $[FX, Y] = F[X, Y]$, $\forall X, Y \in C^\omega(T(V))$:

$\forall \varphi \in C^\omega(V)$; $\quad [FX, Y]\varphi = \varphi'[DY'(FX)' - D(FX)'(Y')] = \varphi'[DY'(FX))' -$
$- (DF')(y')(X') - (F' \circ DX')(Y')] = \varphi'[DY'F(X) + (F \circ DY')(X') -$
$- DY'(F(X)) - F'(DX'(Y')) = \varphi' F'[DY'X' - DX'Y'] = F[X, Y]\varphi.$

La fel $[X, FY] = F[X, Y]$.

De aici rezultă imediat $N_F(X, Y) = 0$.

3) $\Rightarrow$ 4)

Prin calcul direct se arată că

$$d(F^*(df)) + F^*(d(F^*(df)))(X, Y) = -[FN_F(X, Y)]f, \quad (f : V \to R)$$

şi de aici rezultă implicaţia enunţată.

3) $\Rightarrow$ 5)

Substituind $F = 2P - I$, găsim $N_F(X, Y) = 4N_P(X, Y)$.

5) $\Rightarrow$ 6)

În adevăr

$$QN_P(X, Y) = Q[PX, PY] + Q \circ P[X, Y] - Q \circ P[X, PY] - Q \circ P[PX, Y] =$$
$$= Q[PX, PY],$$

deci 5) $\Rightarrow Q[PX, PY] = 0$; la fel 5) $\Rightarrow P[QX, QY] = 0$.

6) $\Rightarrow$ 7)

$$d\omega(X_0, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i X_i \omega(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n) +$$
$$+ \sum_{i<j}^{n} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \ldots, \hat{X}_i, \hat{X}_j, \ldots, X_n).$$

Dacă $(X_0, \ldots, X_n)$ este un $(n+1)$-uplu format din $p' \neq p$ sau $p' = p+1$ cîmpuri de tip $(1, 0)$, membrul al doilea al formulei precedente este nul, deoarece din 6) croşetul a două cîmpuri de acelaşi tip este de acelaşi tip; de aici rezultă 7) dovedită.

7) $\Rightarrow$ 8) evidentă.

8) $\Rightarrow$ 6)

Fie $X = QX$, $Y = QY$; pentru a arăta că $P([QX, QY]) = 0$ este suficient, după teorema lui Hahn-Banach să demonstrăm că oricare ar fi 1-forma ω de tip $(1, 0)$ are loc

$$\omega(P[QX, QY]) = 0.$$

Dar după 8), pentru o asemenea formă, avem $d\omega(QX, QY) = 0$, deci

$$\omega(P[QX, QY]) = \omega([QX, QY]) = QX\omega(QY) - QY\omega(QX) = 0.$$

5) $\Rightarrow$ 1).

Este absolut analogă demonstraţiei din [9] referitoare la structuri aproape-complexe. Teorema este complet demonstrată.

Aceste consideraţii se extind fără dificultate pentru cazul r-π-structurilor definite în Ex. 6° din § 1.

O r-π-structură este echivalentă cu a da r proiectori $P_1, \ldots, P_r$ a căror sumă este I, sau cu o descompunere într-o sumă directă de n termeni a complexificaţiei fibratului tangent al varietăţii V.

Integrabilitatea se poate caracteriza prin:

Teorema 3.2. *Pentru orice varietate V de clasă C^ω, cu o r-π-structură, următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

1) *r-π-structura este integrabilă.*

2) $T(X, Y) = -\sum_{i=1}^{n} P_i N_{P_i}(X, Y) = 0$, $\forall X, Y \in C^\omega(T(V))$.

3) $P_i[P_j X, P_k Y] = 0$, $\quad i = 1, \ldots, r$, $\quad j, k \in \{(i, \ldots, r)\} - \{i\}$.

Omitem demonstraţia, ea fiind în linii mari analogă celei date pentru teorema 3.1.

B. *Varietăţi cu structură aproape cuaternionică*

În exemplul 7 din § 1 s-a definit o C^k-structură aproape cuaternionică pe o C^{r+1}-varietate $V(0 \leq r \leq \omega;\ 0 \leq k \leq \omega,\ k \leq r)$ prin două C^k-secţiuni regulate F, G ale fibratului $L(T(V), T(V))$ ce satisfac condiţiile

$$F \circ F = -I, \qquad G \circ G = -I, \qquad H = F \circ G = -G \circ I.$$

Definiţia 3.1. *Structura aproape cuaternionică dată pe varietatea V se zice integrabilă dacă $\forall x \in V$ există o hartă astfel încît pe ea operatorii F G, H au expresii constante.*

Altfel spus, fie V o varietate analitică peste corpul cuaternionilor Q ale cărui elemente generatoare le notăm prin 1, i, j, k. Se vede imediat că produsul prin i, j, k pe fiecare spaţiu tangent defineşte o structură aproape cuaternionică pe V şi deci expresia operatorilor F, G, H într-o hartă este constantă. Deci o structură aproape cuaternionică este integrabilă dacă operatorii F, G, H derivă dintr-o structură cuaternionică pe V.

Fie $\pi = (E, \pi, V)$ un C^r-fibrat banachic real; C^r-fibratul banachic π^Q peste corpul Q, asociat lui π şi numit hipercomplexificaţia sa, se poate defini prin următoarea proprietate universală:

Există V-morfismul de C^r-fibrate banachice reale $\gamma : \pi \to \pi^Q$ astfel ca, oricare ar fi V-morfismul de fibrate peste Q: $f : \pi \to \eta$, cu η un fibra banachic oarecare peste Q, există şi este unic un V-morfism f^Q. $\pi^Q \to \eta$, Q-liniar pe fibre, astfel că diagrama următoare este comutativă

$$\begin{tikzcd} \pi \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "f"'] & \pi^Q \arrow[d, "f^Q"] \\ & \eta \end{tikzcd}$$

Dacă V se reduce la un punct, obţinem hipercomplexificaţia unui spaţiu banachizabil real.

Putem lua $\pi^Q = \pi \oplus_V \pi \oplus_V \pi \oplus_V \pi$, produsele prin i, j, k pe fibra acestuia fiind definite prin:

$$i(a, b, c, d) = (-b, a, -d, c),$$
$$j(a, b, c, d) = (-c, d, a, -b),$$
$$k(a, b, c, d) = (-d, -c, b, a).$$

Morfismul γ este atunci injecţia pe primul factor. Spaţiul C^r-secţiunilor în π^Q este hipercomplexificatul spaţiului C^r-secţiunilor în π şi formează modul peste inelul $C^r_Q(V)$ al C^r-funcţiilor definite pe V cu valori în Q.

În cazul particular al fibratului tangent $T(V)$ la o C^{r+1}-varietate V, modulul $\mathbf{Z}^r(V)$ al C^r-secţiunilor în $T_Q(V)$ este constituit din derivări locale de la $C^{r+1}_Q(V)$ în $C^r_Q(V)$ în modul următor: identificînd $\mathbf{X}^r(V)$ (mulţimea C^r-cîmpurilor de vectori reali pe V) cu imaginile prin γ_* în $\mathbf{Z}^r(V)$, un $Z \in \mathbf{Z}^r(V)$ se poate exprima:

$$Z = X + iY + jR + kT, \quad \text{cu } X, Y, R, T \in \mathbf{X}^r(V)$$

şi atunci

$$Zf = Xf + iYf + jRf + kTf.$$

Mai mult, croşetul $\mathbf{X}^r(V) \times \mathbf{X}^r(V) \to \mathbf{X}^{r-1}(V)$ se prelungeşte la $\mathbf{Z}^r(V)$. Vom numi $\mathbf{Z}^r(V)$ mulţimea C^r-cîmpurilor de vectori hipercomplexi pe V.

Notăm prin σ', σ'', σ''' cele trei operaţii de involuţie netriviale pe Q, definite prin

$$\sigma' q = iqi^{-1}; \qquad \sigma'' q = jqj^{-1}; \qquad \sigma''' q = kqk^{-1}, \qquad \forall q \in Q.$$

Propoziţia 3.3. *Următoarele date sînt echivalente:*

a) *O structură aproape cuaternionică pe V;*

b) *Un subfibrat M în $T_Q(V)$, astfel ca*

$$T_Q(V) = M \oplus_V \sigma' M \oplus_V \sigma'' M \oplus_V \sigma''' M \text{ şi}$$
$$M \cap \sigma' M \cap \sigma'' M \cap \sigma''' M = (0);$$

c) *Un proiector $P : T_Q(V) \to T_Q(V)$ astfel ca $I = P + \sigma' P + \sigma'' P + \sigma''' P$ şi ortogonali doi cîte doi.*

Demonstraţie. a) $\Rightarrow$ b). Asociem la F, G, H: $T(V) \to T(V)$ morfismele unice $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{H}$: $T_Q(V) \to T_Q(V)$ astfel ca

$$\gamma \circ F = \bar{F} \circ \gamma; \qquad \gamma \circ G = \bar{G} \circ \gamma; \qquad \gamma \circ H = \bar{H} \circ \gamma.$$

Notînd cu $\bar{I}$ aplicaţia identică pe $T_Q(V)$, au loc relaţiile

$$\bar{F} \circ \bar{F} = -\bar{I}, \qquad \bar{G} \circ \bar{G} = -\bar{I}, \qquad \bar{H} = \bar{F} \circ \bar{G} = -\bar{G} \circ \bar{F}.$$

Fie $\bar{I} : T(V) \to T(V)$ privit ca un morfism cu valori într-un fibrat cuaternionie şi $\bar{I}^Q$-morfismul asociat ce verifică $\bar{I}^Q \circ \gamma = \bar{I}$. Fie M nucleul morfismului $\bar{I}^Q$ care este un subfibrat hipercomplex şi

$$M = \{\mathfrak{X} \in T_Q(V);\ \bar{F}\mathfrak{X} = -i\mathfrak{X};\ \bar{G}\mathfrak{X} = -j\mathfrak{X};\ \bar{H}\mathfrak{X} = k\mathfrak{X}\}.$$

Subfibratul M ale cărui secţiuni sînt vectorii triproprii pentru $(-i, -j, -k)$ satisfac condiţia b).

Pentru aceasta este suficient să arătăm că

$$M \cap \{\sigma' M \oplus \sigma'' M \oplus \sigma''' M\} = \{0\}.$$

Fie $\mathfrak{X}$ aparţinînd acestei intersecţii, deci

$$\mathfrak{X} = \sigma' X + \sigma'' Y + \sigma''' Z; \text{ cu } X, Y, Z \in M.$$

Atunci $\bar{F}\mathfrak{X} = -\mathfrak{X}i = -(\sigma' X + \sigma'' Y + \sigma''' Z)i = (\sigma' X + \sigma'' Y + \sigma''' Z)i$, întrucît $\bar{I}$ comută cu involuţiile σ. Rezultă $\mathfrak{X} = \sigma' X$, dar

$$G\mathfrak{X} = -\mathfrak{X}f = \sigma'(GX) = \mathfrak{X}j$$

şi $\mathfrak{X}$ este vectorul nul.

Un vector real X se descompune

$$X = x + \sigma' x + \sigma'' x + \sigma''' x = h(x), \qquad x \in M$$

şi prin aceasta se indentifică $T(V)$ cu M.

b) $\Rightarrow$ c) şi c) $\Rightarrow$ b), fiind aproape evidente, demonstrăm:

b) $\Rightarrow$ a). Folosind indentificarea h, obţinem

$$FX = -xi - (\sigma' x)i + (\sigma'' x)i + (\sigma''' x)i,$$
$$GX = -xj + (\sigma' x)j - (\sigma'' x)j + (\sigma''' x)j,$$
$$HX = -xk + (\sigma' x)k + (\sigma'' x)k - (\sigma''' x)k$$

care satisfac condiţiile din definiţie.

Sistemul diferenţial asociat structurii va fi:

$$(*) \quad \begin{cases} (DF)(X) = F \circ DX + DX \circ F = 0, \\ DG(X) = G \circ DX + DX \circ G = 0, \\ DH(X) = H \circ DX - DX \circ H = 0, \\ F \circ F = -I, \ G \circ G = -I, \ H = F \circ G = -G \circ F. \end{cases}$$

Teorema 3.3. *Condiţia*

1. *O structură cuaternionică pe V este integrabilă, implică*

2. *Fasciculul secţiunilor locale ale fibratului $T(V)$ este local generat de soluţiile locale ale sistemului diferenţial (*) iar acesta implică*

3. $T(X, Y) = \frac{2}{3}[N_F(X, Y) + N_G(X, Y) + N_H(X, Y)] = 0,$

$$\forall X, Y \in C^\infty(T(V))$$

Demonstraţia rezultă imediat, folosind implicaţiile 1) $\Rightarrow$ 2) şi 2) $\Rightarrow$ 3) din teorema 3.1, aplicaţia A.

Tensorul din 3) este tensorul de structură al varietăţii aproape cuaternionice şi a fost considerat pentru prima dată, în cazul finit-dimensional, de Bonan în [2].

Se pot extinde şi consideraţiile legate de conexiuni compatibile cu structurile din aplicaţiile A şi B. Pentru cazul A şi alte cazuri interesante, acest lucru a fost făcut în [4].

C. *Prelungirea structurilor aproape complexe şi aproape-produs la fibratul tangent*

V va nota, ca şi pînă aici, o varietate banachică de clasă C^∞ modelată pe spaţiul Banach E. $T(V)$, fibratul tangent la V este atunci un $GL(E)$-fibrat de bază V.

Vom avea nevoie de fibratul tangent de ordinul al doilea $\tau_{T(V)}: T^2(V) \to T(V)$, a cărui structură de varietate fibrată vectorială este definită prin hărţile fibrate $(T^2_\alpha, T_\alpha, \tau_V^{-1}(U))$, unde (U, α) este o hartă pe V.

Rezultă deci comutativitatea diagramei:

$$\begin{tikzcd}
\tau_{T(V)}^{-1}(\tau_V^{-1}(U)) \arrow[r, "T^2_\alpha"] \arrow[d, "\tau_{T(V)}"'] & \alpha(U) \times E \times E \times E \arrow[d] \\
\tau_V^{-1}(U) \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "\tau_V"'] & \alpha(U) \times E \arrow[d] \\
U \arrow[r, "\alpha"] & \alpha(U),
\end{tikzcd}$$

săgeţile verticale din stînga desemnînd proiecţiile pe primul factor.

Reproducem şi diagrama rombică comutativă următoare:

$$\begin{tikzcd}
 & T^2(V) \arrow[dl, "\tau_{T(V)}"'] \arrow[dr, "T\tau_V"] & \\
T(V) \arrow[dr, "\tau_V"'] & & T(V) \arrow[dl, "\tau_V"] \\
 & V &
\end{tikzcd}$$

care determină două structuri de varietate pe $T^2(V)$

$$T\tau_V : T^2(V) \to T(V) \text{ şi}$$
$$\tau_{T(V)} : T^2(V) \to T(V)$$

legate prin involuţia canonică $\omega : T^2(V) \to T^2(V)$ dată local prin

$$(x, e_2, e_3, e_4) = (x, e_3, e_2, e_4).$$

Pentru mai multe detalii a se vedea [1].

Dacă notăm prin $\mu: GL(E)\times GL(E)\to GL(E)$ multiplicarea de grup pe grupul Lie-Banach $GL(E)$, atunci $TGL(E)$ se va organiza, după cum se vede imediat, ca grup Lie-Banach cu legea de multiplicare

$$T\mu: TGL(E)\times TGL(E)\to TGL(E).$$

Vom demonstra

Propoziția 3.4. *Fibratul $T^2(V)$ este un $TGL(E)$-fibrat.*

Este suficient pentru aceasta să arătăm că dacă $GL(E)$ operează pe E prin $\rho: GL(E)\times E\to E$, atunci $TGL(E)$ operează efectiv, ca un grup liniar, pe $T(E)$ prin

$$T\rho: TGL(E)\times T(E)\to T(E).$$

Structura de spațiu liniar pe $T(E)$ poate fi determinată astfel: la $\sigma_c: E\to E$ dată de $\sigma_c(v)=cv$ și $\tau_y: E\to E$; $\tau_y: E\to E$; $\tau_y(y)=x+y$; $\tau_y(x)=x+y$ se asociază:

$$c\circ X_0=(T\tau_c)X_0,\qquad X_1\oplus X_2=T\tau_{x_0}X_1+T\tau_{x_1}X_2,$$
$$\text{cu } X_i\in T_{x_i}(E)\ (i=0,1,2),$$

care definesc pe $T(E)$ structura de spațiu vectorial anunțată.

Pentru ca $T\rho$ să fie o realizare este necesar și suficient să dovedim

1°. $T\rho(A_0,\ c\circ X_0)=c\circ T(A_0,\ X_0),\qquad A_0\in T_{a_0}GL(E),$

2°. $T\rho(A_0,\ X_1\oplus X_2)=T\rho(A_0,\ X_1)\oplus T\rho(A_0,\ X_2),$

3°. $T\rho(A_0\cdot A_1,\ X_0)=T\rho(A_0,\ T\rho(A_1,\ X_0)),$

unde $\qquad A_1\in T_{a_1}GL(E)$ și $A_0\cdot A_1=T_\mu(A_0,\ A_1)$.

1°. $T\rho(a_0,\ cx_0)\ (A_0,\ c\circ X_0)=(\rho(a_1,\ cx_0),\ D\rho(a_0,\ cx_1)\ (A_0,\ c\circ X_0))=$
$=(\rho(a_0,\ cx_1),\ \rho(A_0,\ cx_1)+\rho(a_0,\ c\circ X_0))$.

Pe de altă parte

$$c_0\cdot T\rho(a_0,\ x_1)(A_0,\ X_0)=c(\rho(a_0,\ x_0),\ \rho(A_0,\ x_0)+\rho(a_0,\ X_0))$$

și cum ρ definea o realizare, rezultă 1°.

2°. $T\rho(a_0,\ x_1+x_2)(A_0,\ X_1\oplus X_2)=(\rho(a_0,\ x_1+x_2),\ \rho(A_0,\ x_1+x_2)+$
$+\rho(a_0,\ X_1+X_2)=(\rho(a_0,\ x_1),\ \rho(A_0,\ x_1)+\rho(a_0,\ X_1))+(\rho(a_0,\ x_2),\ \rho(a_0,\ x_2)+$
$+\rho(a_0,\ X_2))=T\rho(a_0,\ x_1)(A_0,\ X_1)+T\rho(a_0,\ x_2)(A_0,\ X_2)$.

3°. Folosind $\rho\circ(\mu\times 1_E)=\rho\circ(1_{GL(E)}\times\rho)$, rezultă

$$T\rho(A_0\cdot A_1,\ X_0)=T\rho(T\mu(A_0,\ A_1),\ X_0)=(T\rho\circ T\mu\times 1_{T(E)})(A_0,\ A_1,\ X_0)=$$
$$=(T\rho\times T(\tau_1\times 1_E))(A_0,\ A_1,\ X_0)=T(\rho\circ(\mu\times 1_E))(A_0,\ A_1,\ X_0)=$$
$$=T(\rho\times(1_{GL(E)}\times\rho))(A_0,\ A_1,\ X_0)=T\rho(T1_{GL(E)}\times T\rho)(A_0,\ A_1,\ X_0)=$$
$$=T\rho(A_0,\ T\rho(A_1,\ X_0)).$$

Notînd cu R_a translația la dreapta pe $GL(E)$, definită de $a\in GL(E)$, obținem

$$TR_a: T_{1_{GL(E)}}(GL(E))\to T_a GL(E))$$

și fie $A\in T_a(GL(E))$, cu $A=TR_a(\bar{A})$, cu $\bar{A}\in L(E)\simeq T_{1_{GL(E)}}(GL(E))$.

Propoziția 3.5. $A(x,\ v)=(\rho(a,\ x),\ \rho((\mu(\bar{A},\ a),\ x)+\rho(a,\ v))$ cu $(x,\ v)\in T(E)=E\times E$.

Pentru demonstrație observăm că

$$TR_a(1_{GL(E)},\ \bar{A})=(a,\ DR_a(1_{GL(E)})(\bar{A}))=(a,\ \mu(\bar{A},\ a))=(a,\ \bar{A}.a)$$

și

$$(a,\ A.a)(x,\ v)=(\rho(a,\ x),\ D\rho(a,\ x)(A.a,\ v))=(\rho(a,x),\rho(A.a,\ x)+\rho(a,\ v))=$$
$$=(\rho(a,\ x),\ \rho(\mu(A,\ a),\ x)+\rho(a,\ v)).$$

Corolar. $(TR_a)(A)\circ TR_{a'}(A')=Taa'(A'+ad(a^{-1})A')$.

Pe baza propoziției 3.4, și a propoziției 3.5, care descrie efectiv operația grupului $TGL(E)$ pe $T(E)$, stabilim, ca și în [8], următoarea injecție

$$j: T(GL(E))\to GL(T(E)),$$
$$j: A\to j(A),\ \text{unde}$$
$$j(A)(X)=T\rho(A,\ X),\qquad X\in T(E)\ \text{și}$$
$$(**)\qquad j(TR_a\bar{A})=\begin{pmatrix} a & 0\\ \bar{A}.a & a\end{pmatrix}.$$

Propoziția 3.6. *Dacă $\mathbf{F}\in L(E)$, cu $\mathbf{F}\circ\mathbf{F}=\pm 1_E$, atunci $T\mathbf{F}\in L(T(E))$ și*

$$(T\mathbf{F})\circ(T\mathbf{F})=\pm 1_{T(E)}.$$

În adevăr, $T\mathbf{F}$ este un endomorfism liniar pe $T(E)$ și

$$(T\mathbf{F})\circ(T\mathbf{F})=T(\mathbf{F}\circ\mathbf{F})=T(\pm 1_E)=\pm 1_{T(E)}.$$

Mai mult:

$$(***)\qquad (T\mathbf{F})(x,\ v)=(\mathbf{F}(x),\ (\mathbf{F}(v))=\begin{pmatrix}\mathbf{F} & 0\\ 0 & \mathbf{F}\end{pmatrix}(x,\ v).$$

Propoziția 3.7. *Dacă $G\subset GL(E)$ este definit prin:*

$$G=\{a\mid a\in GL(E),\quad a\mathbf{F}=\mathbf{F}a\},$$

atunci $\tilde{G}\subset GL(T(E))$, unde $\tilde{G}=j(G)$ are proprietatea $\forall\tilde{a}\in\tilde{G}$, $\tilde{a}\circ T\mathbf{F}=T\mathbf{F}\circ\tilde{a}$.

Demonstrația este imediată, ținînd seamă de (**) și (***).

Remarcăm, în continuare, că injecția j determină o injecție j_V a fibratelor $T(P(V))$ și $P(T(V))$ de bază V, unde $P(V)$ notează un G-fibrat principal de bază V, iar $P(T(V))$ un G-fibrat principal de bază $T(V)$:

$$j_V : T(P(V)) \to P(T(V))$$

dată pentru două hărți $\Phi_U : U \times G \to P(U)$,

$$\Psi_U : T(U) \times \widetilde{G} \to P(T(U)),$$

prin

$$j_V \mid T(P(U)) = \Psi U \circ (1_{T(U)} \times j) \circ (T\Phi_U)^{-1}.$$

Prin urmare, unei secțiuni s în $P(V)$ i se asociază o secțiune $\tilde{s}$ în $P(T(V))$ prin:

$$\tilde{s} = j_V \circ Ts.$$

Folosind operatorul $\mathbf{F}$ din propoziția 3.2, definim o secțiune F în $L(T(\mathbf{V}), T(V))$ cu proprietatea $F \circ F = \pm I$, adică o structură aproape-produs și o structură aproape complexă pe U, astfel: pentru o hartă (U, α) pe V

$$F_U = T_\alpha^{-1} \circ (I \times \mathbf{F}) \circ T_\alpha.$$

Pentru ca F să verifice condiția cerută, se vede ușor că este necesar și suficient ca pentru o altă hartă (U', β) cu $U \cap U' \neq \emptyset$, $(I \times \mathbf{F})$ să comute cu $T\alpha \circ T_\beta^{-1} : \beta(U \cap U') \times E \to \alpha(U \cap U') \times E$, și astfel obținem o reducere a grupului $GL(E)$ la G din propoziția 3.7.

Folosind propozițiile 3.6, 3.7 și observațiile precedente, definim o secțiune $\widetilde{F}$ în $L(T^2V, T^2(V))$ cu proprietatea $\widetilde{F} \circ \widetilde{F} = \pm I$, prin:

$$\widetilde{F}_U = (T_\alpha^2)^{-1} \circ [I \times T\mathbf{F}] \circ T_\alpha^2,$$

care determină o reducere a grupului structural $GL(E^2)$ la G.

Obținem astfel o structură aproape-produs și o structură aproape complexă pe $T(V)$, pe care le vom numi prelungirile la $T(V)$ ale structurilor date de F.

Vom determina acum sistemul diferențial asociat la $\widetilde{F}$ prin teorema 2.1. Notînd cu $\widetilde{X}$ un cîmp pe $T(V)$, sistemul va avea forma

$$(D\widetilde{F})(\widetilde{X}') + \widetilde{F}' \circ D\widetilde{X}' - D\widetilde{X}' \circ \widetilde{F}' = 0.$$

Într-o scriere locală, aceasta revine la următoarele:

Fie $X : x \to (x, X'_x)$ un cîmp pe V. Atunci

$$\widetilde{X} = TX : (y, Y'_y) \to (y, X'_y, Y'_y, DX'(y)(Y'_y))$$

și deci

$$\widetilde{X}' : (y, Y'_y) \to (Y'_y, DX'(y)(Y'_y))$$

și atunci

$$D\widetilde{X}'(y, Y'_y) = \begin{pmatrix} DY'(y) & 1_E \\ D^2X'(y)(Y'_y) & DX'(y) \end{pmatrix}$$

și

$$(F' \circ D\widetilde{X}')(y, Y'_y) = \begin{pmatrix} F'_y \circ DY'(y) & F'_y \\ F'_y \circ D^2X'(y)(Y'_y) & F'_y \circ DX'(y) \end{pmatrix},$$

$$(D\widetilde{X}' \circ \widetilde{F}')(y, Y'_y) = \begin{pmatrix} DY'(y) \circ F'_y & F'_y \\ D^2X'(y)(Y'_y) \circ F'_y & DX'(y) \circ F'_y \end{pmatrix};$$

$$(D\widetilde{F})(y, Y'_y)(\widetilde{X}'_{(y, Y'_y)}) = \begin{pmatrix} DF'(y)(Y'_y) & 0 \\ 0 & DF'(y)(DX'(y)(Y'_y)) \end{pmatrix}.$$

Obținem atunci următorul sistem de ordinul al doilea:

$$\begin{cases} DF'(y)(Y'_y) + F'_y \circ DY'(y) - DY'(y) \circ F'_y = 0, \\ F'_y \circ (D^2X'(y)(Y'_y)) - D^2X'(y)(Y'_y) \circ F'_y = 0, \\ DF'(y)(DX'(y)(Y'_y)) + F'_y \circ DX'(y) - DX'(y) \circ F'_y = 0. \end{cases}$$

Rezultă imediat, observînd forma sistemului de mai sus și folosind teorema 3.1:

Propoziția 3.8. *Dacă F este integrabilă, atunci și $\widetilde{F}$ este integrabilă și reciproc.*

BIBLIOGRAFIE

1. Abraham R. și Robbin J. — *Transversal mappings and flows.* Amsterdam, 1967.
2. Bonan E. — *Sur les Q-structures de type quaternionien.* Thèse, Juin, 1967.
3. Bourbaki N. — *Variétés différentiables.* Fasciculă de rezultate.
4. Cruceanu V. — *Conexiuni compatibile cu anumite structuri pe fibrate vectoriale banachice.* Comunicare la sesiunea științifică jubiliară „A. Myller", august 1970.
5. Ver Eecke P. — *Introducción a las conexiones de orden superior.* Publicaciones del Depart. de Geometria y Topologia, Zaragoza, 1968.
6. Kuiper N. — *The homotopy type of the unitary group of Hilbert space.* Topology 3 (1965).
7. Лang С. — *Введение в теорию дифференцируемых многообразий.* Москва, 1967.
8. Morimoto A. — *Prolongations of G-structures to tangent bundles.* Nagoya Math. Journal, T. 32 (1968).
9. Penot J. P. — *Sur le théorème de Frobenius.* 1968–1969.
10. Rodrigues A. M. — *The first and second fundamental theorems of Lie for Lie pseudogroups.* Journal of Math., t. 84, (1962).

11. Que N. V. — *Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales.* Ann. de l'Institut Fourier, T. 17, 1 (1967).
12. Weinstein A. — *Symplectic structures on Banach manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc., T. 75 (1969).

G-STRUCTURES D'ORDRE SUPÉRIEUR SUR LES VARIÉTÉS BANACHIQUES

Résumé

A l'aide du concept de groupoïde différentiable de classe C^p, introduit par Ver Eecke, ayant la variété banachique V comme base (§ 0) on définit les structures d'ordre $k (k \leqslant p)$ sur V comme étant des sections d'un fibré associé au groupoïde de k-jets des difféomorphismes de la variété V et l'on associe à celle-ci un système différentiel linéaire et homogène d'ordre k.

On applique ces considérations aux cas particuliers de certaines structures d'ordre premier (presque produit, r-π-structures et presque quaternioniennes) et d'ordre second (les prolongements des structures données par les sections F dans le fibré $L(T(V), T(V))$, en notant par $T(V)$ la fibration tangente à V.

QUASI-CONNEXIONS SUR VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES. II

PAR

ELENA VAMANU

Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞ à n dimensions, et φ un champ de tenseurs du type (1.1), non-dégénéré. Notons par F l'algèbre des fonctions réelles de classe C^∞ sur V_n et par L le module des champs de vecteurs sur V_n.

Tout d'abord, nous allons rappeler la notion de quasi-connexion qui a été donnée dans [3], [4]. *On appelle quasi-connexion sur V_n une loi D qui fait correspondre à chaque vecteur $X \in L$ la représentation linéaire D_X de l'espace L dans lui-même, donnée par les propriétés suivantes :*

1'. $D_{fX+gY} = fD_X + gD_Y$,

2'. $D_X fY = fD_X Y + \delta f(X) Y$

pour tout $f, g \in F$ et $X, Y \in L$.

On peut associer à une quasi-connexion D sur V_n les tenseurs de torsion et de courbure à l'aide des opérateurs :

1) $T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - \Psi([\varphi X, \varphi Y])$ pour tout $X, Y \in L$,

2) $R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}$ pour tout $X, Y \in L$, ψ étant la réciproque du tenseur φ et [,] l'opération crochet.

A la quasi-connexion donnée D on peut associer deux autres quasi-connexions :

3) $D'_X Y = D_Y X + \psi([\varphi X, \varphi, Y])$ et

4) $^m D_X Y = \frac{1}{2}(D_X Y + D'_X Y)$,

nommées respectivement la quasi-connexion transposée et la quasi-connexion moyenne. Cette dernière quasi-connexion est sans torsion *).

Dans cette Note nous allons présenter des nouveaux résultats concer-

*) Pour des détails relatifs à ces questions voir [4].