11. Que N. V. — *Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales*. Ann. de l'Institut Fourier, T. 17, 1 (1967).
12. Weinstein A. — *Symplectic structures on Banach manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., T. 75 (1969).

G-STRUCTURES D'ORDRE SUPÉRIEUR SUR LES VARIÉTÉS BANACHIQUES

Résumé

A l'aide du concept de groupoïde différentiable de classe C^p, introduit par Ver Eecke, ayant la variété banachique V comme base (§ 0) on définit les structures d'ordre $k (k \leq p)$ sur V comme étant des sections d'un fibré associé au groupoïde de k-jets des difféomorphismes de la variété V et l'on associe à celle-ci un système différentiel linéaire et homogène d'ordre k.

On applique ces considérations aux cas particuliers de certaines structures d'ordre premier (presque produit, r-π-structures et presque quaternioniennes) et d'ordre second (les prolongements des structures données par les sections F dans le fibré $L(T(V), T(V))$, en notant par $T(V)$ la fibration tangente à V.

QUASI-CONNEXIONS SUR VARIÉTÉS DIFFÉRENTIABLES. II

PAR

ELENA VAMANU

Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞ à n dimensions, et φ un champ de tenseurs du type (1.1), non-dégénéré. Notons par F l'algèbre des fonctions réelles de classe C^∞ sur V_n et par L le module des champs de vecteurs sur V_n.

Tout d'abord, nous allons rappeler la notion de quasi-connexion qui a été donnée dans [3], [4]. *On appelle quasi-connexion sur V_n une loi D qui fait correspondre à chaque vecteur $X \in L$ la représentation linéaire D_X de l'espace L dans lui-même, donnée par les propriétés suivantes :*

1'. $D_{fX+gY} = fD_X + gD_Y$,

2'. $D_X fY = fD_X Y + \delta f(X) Y$

pour tout $f, g \in F$ et $X, Y \in L$.

On peut associer à une quasi-connexion D sur V_n les tenseurs de torsion et de courbure à l'aide des opérateurs :

1) $T(X,Y) = D_X Y - D_Y X - \Psi([\varphi X, \varphi Y])$ pour tout $X, Y \in L$,

2) $R(X,Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}$ pour tout $X, Y \in L$, ψ étant la réciproque du tenseur φ et [,] l'opération crochet.

A la quasi-connexion donnée D on peut associer deux autres quasi-connexions :

3) $D'_X Y = D_Y X + \psi([\varphi X, \varphi, Y])$ et

4) ${}^m D_X Y = \frac{1}{2}(D_X Y + D'_X Y)$,

nommées respectivement la quasi-connexion transposée et la quasi-connexion moyenne. Cette dernière quasi-connexion est sans torsion *).

Dans cette Note nous allons présenter des nouveaux résultats concer-

*) Pour des détails relatifs à ces questions voir [4].

nant les quasi-connexions. Dans le § 1 on donne une caractérisation géométrique des quasi-connexions sans torsion et sans courbure et dans le § 2 on étudie quelques propriétés des paires de quasi-connexions.

§ 1. Considérons sur V_n la quasi-connexion D à coefficients Γ^i_{jk} et un champ de vecteurs v. En utilisants la dérivée covariante par rapport à D, nous avons

$$D_j v_i = v_{i,h}\, \varphi^h_j - \Gamma^h_{ji} v_h, \tag{1.1}$$

d'où l'on obtient

$$\psi^j_k D_j v_i - \psi^j_i D_j v_k = v_{i,k} - v_{k,i} - (\Gamma^h_{ji}\psi^j_k - \Gamma^h_{jk}\psi^j_i) v_h .$$

Donc v est gradient si et seulement si nous avons

$$\psi^j_k D_j v_i - \psi^j_i D_j v_k = -(\Gamma^h_{ji}\psi^j_k - \Gamma^h_{jk}\psi^j_i) v_h. \tag{1.2}$$

A l'aide de cette observation nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une quasi-connexion D soit sans torsion et sans courbure est que l'espace V_n admette n champs de vecteurs covariants μ^a_i $(a = 1, \ldots, n)$ avec la propriété que*

$$D_k \mu^a_i = 0, \tag{1.3}$$

soient linéairement indépendants, de sorte que les covecteurs

$$\nu^a_i = \psi^h_i \mu^a_h \tag{1.4}$$

soient des gradients.

En effet, le système (1.3) admet n solutions linéairement indépendantes si et seulement si ses conditions d'intégrabilité sont identiquement satisfaites en vertu du système. On constate sans difficulté que celles-ci ont lieu si le tenseur de courbure de la quasi-connexion D est nul.

Dans ces conditions, par l'intermédiaire de (1.4), nous avons

$$D_j \nu^a_i = (D_j \psi^h_i) \mu^a_h,$$

d'où il résulte

$$\psi^j_k D_j \nu^a_i - \psi^j_i D_j \nu^a_k = T^h_{jm} \psi^j_k \psi^m_i \mu^a_h - (\Gamma^m_{ji}\psi^j_k - \Gamma^m_{jk}\psi^j_i) \nu^a_m.$$

Compte tenu de (1.2), il en résulte que les vecteurs ν^a_i sont des gradients si et seulement si nous avons

$$T^h_{jm} \psi^j_k \psi^m_i \mu^a_h = 0. \tag{1.5}$$

Comme les vecteurs μ^a_h sont linéairement indépendants et le tenseur φ^i_j est non-dégénéré, il résulte que les relations (1.5) sont équivalentes avec l'annulation du tenseur de torsion de la quasi-connexion D et donc le théorème est démontré.

§ 2. Dans ce paragraphe nous allons élargir certains résultats sur les paires de connexions linéaires données dans [2] aux paires de quasi-connexions.

Soient ${}^1D$ et ${}^2D$ les deux quasi-connexions sur V_n.

Définition. *On appelle opérateur de courbure mixte de la paire $({}^1D, {}^2D)$ l'opérateur*

$$\rho(X,Y) = \frac{1}{2}\{[{}^1D_X, {}^2D_Y] + [{}^2D_X, {}^1D_Y] - {}^1D_{\psi([\varphi X, \varphi Y])} - {}^2D_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}\}, \qquad \forall X, Y \in L. \tag{2.1}$$

Cet opérateur détermine un champ de tenseurs du type (1.3) antisymétrique en X et Y. Celui-ci sera appelé le champ de tenseurs de la courbure mixte de ces deux quasi-connexions.

En considérant un voisinage de coordonnées (U, x^i) muni de repères naturels, on trouve la formule

$$\rho^h_{kij} = \frac{1}{2}\Big[\overset{2}{\Gamma}{}^m_{jk}\overset{1}{\Gamma}{}^h_{im} - \overset{2}{\Gamma}{}^m_{ik}\overset{1}{\Gamma}{}^h_{jm} + \overset{1}{\Gamma}{}^m_{jk}\overset{2}{\Gamma}{}^h_{im} - \overset{1}{\Gamma}{}^m_{ik}\overset{2}{\Gamma}{}^h_{jm} + \overset{2}{\Gamma}{}^h_{jk,m}\varphi^m_i - \overset{2}{\Gamma}{}^h_{ik,m}\varphi^m_j + \overset{1}{\Gamma}{}^h_{jk,m}\varphi^m_i - \overset{1}{\Gamma}{}^h_{ik,m}\varphi^m_j + \big(\overset{1}{\Gamma}{}^h_{mk} + \overset{2}{\Gamma}{}^h_{mk}\big)\psi^m_{l,n}\varphi^n_{[i}\varphi^l_{j]}\Big], \tag{2.2}$$

qui donne les composantes du tenseur de la courbure mixte à l'aide des coefficients de ces deux quasi-connexions et du tenseur.

Remarque. Si v est un champ de vecteurs, alors on peut obtenir les formules suivantes de commutation :

$${}^2D_k {}^1D_j v_i - {}^2D_j {}^1D_k v_i + {}^1D_k {}^2D_j v_i - {}^1D_j {}^2D_k V_i = 2\rho^m_{ijk} v_m + {}^1T^m_{jk} {}^2D_m v_i + {}^2T^m_{jk} {}^1D_m v_i , \tag{2.3}$$

${}^1T^i_{jk}$ et ${}^2T^i_{jk}$ étant les composantes des tenseurs de torsion de ces deux quasi-connexions dans le voisinage U.

Considérons maintenant la quasi-connexion $\mathfrak{D}$ donnée par

$$\mathfrak{D}_X = \frac{1}{2}({}^1D_X + {}^2D_X), \tag{2.4}$$

que nous allons appeler quasi-connexion moyenne de la paire $({}^1D, {}^2D)$.

Remarque. Quand ${}^2D$ est la quasi-connexion transposée de ${}^1D$, $\mathfrak{D}$ coïncide avec la quasi-connexion moyenne de ${}^1D$.

Maintenant, si l'on désigne par $\mathfrak{R}(X,Y)$, ${}^1R(X,Y)$, ${}^2R(X,Y)$ les champs des opérateurs qui donnent les courbures de ces trois quasi-connexions on démontre le résultat suivant :

Entre les courbures des quasi-connexions ${}^1D$, ${}^2D$, $\mathfrak{D}$ et la courbure mixte de la paire ${}^1D$, ${}^2D$ il y a relation

$$2\rho(X,Y) = 4\mathfrak{R}(X,Y) - {}^1R(X,Y) - {}^2R(X,Y) \tag{2.5}$$

pour tout $X,Y \in L$.

Remarque. Si les quasi-connexions ${}^1D$ et ${}^2D$ coïncident, alors $\rho(X,Y)$ se réduit à $R(X,Y)$. $(R(X,Y) = {}^1R(X,Y) = {}^2R(X,Y) = \mathfrak{R}(X,Y))$.

Maintenant, nous allons introduire la notion *d'algèbre de déformation* de deux quasi-connexions.

On sait que la différence de deux quasi-connexions est un tenseur qui sera appelé tenseur de déformation comme dans le cas des connexions, linéaires.

Considérons maintenant l'opérateur

$$\tau_X = {}^2D_X - {}^1D_X, \tag{2.6}$$

qui sera appelé opérateur de déformation de la paire $({}^1D, {}^2D)$.

A l'aide de l'opérateur τ_X on peut définir une opération entre les champs de vecteurs de L donnée par

$$X \cdot Y = \tau_X Y, \qquad \forall X,Y \in L, \tag{2.7}$$

qui sera appelé produit.

On vérifie aisément que, par rapport à cette opération, L est une algèbre sur l'anneau F.

L'algèbre définie par (2.7) sera nommée algèbre de déformation de la paire de quasi-connexions $({}^1D, {}^2D)$ et sera notée par $\mathfrak{L}$.

Enfin, on peut introduire l'opérateur

$$K(X,Y) = \frac{1}{4}[\tau_X, \tau_Y]. \tag{2.8}$$

Compte tenu de (2.1), (2.5), (2.6) et (2.8), on trouve que pour toute paire de quasi-connexions $({}^1D, {}^2D)$ sur V_n on a les formules :

$$2\rho(X,Y) + 4K(X,Y) = {}^1R(X,Y) + {}^2R(X,Y), \tag{2.9}$$

$$\rho(X,Y) + K(X,Y) = \mathfrak{R}(X,Y). \tag{2.10}$$

Nous nous occuperons maintenant de certaines propriétés de l'algèbre $\mathfrak{L}$.

D'abord, un calcul simple nous conduit aux résultats suivants

$$X \cdot Y - Y \cdot X = {}^2T(X,Y) - {}^1T(X,Y), \tag{2.11}$$

$$X \cdot Y + Y \cdot X = 2({}^{2m}D_X Y - {}^{1m}D_X Y), \tag{2.12}$$

${}^{1m}D$ et ${}^{2m}D$ étant les quasi-connexions moyennes associées respectivement aux quasi-connexions ${}^1D$, ${}^2D$.

$$X \cdot (Y \cdot Z) - Y \cdot (X \cdot Z) = 4K(X,Y)Z. \tag{2.13}$$

De ces dernières formules il résulte :

a) L'algèbre $\mathfrak{L}$ est commutative si et seulement si les quasi-connexions ${}^1D$ et ${}^2D$ ont la même torsion.

b) L'algèbre $\mathfrak{L}$ est anticommutative si et seulement si les quasi-connexions moyennes associées à ${}^1D$ et ${}^2D$ coïncident.

c) Dans l'algèbre $\mathfrak{L}$ on a la loi

$$X \cdot (Y \cdot Z) = Y \cdot (X \cdot Z)$$

si et seulement si $K(X,Y)Z = 0$, c'est-à-dire, d'après (2.9), la courbure mixte de la paire $({}^1D, {}^2D)$ est la moyenne arithmétique des courbures de ${}^1D$ et ${}^2D$.

d) L'algèbre $\mathfrak{L}$ est simultanément commutative (anticommutative) et associative si les conditions de a) (respectivement b)) et de c) sont simultanément vérifiées.

e) L'algèbre $\mathfrak{L}$ est une algèbre Lie si et seulement si ${}^1D$ et ${}^2D$ ont les mêmes quasi-connexions moyennes et

$$\mathfrak{R}(X,Y)Z + \mathfrak{R}(Y,Z)X + \mathfrak{R}(Z,X)Y = \rho(X,Y)Z + \rho(Y,Z)X + \rho(Z,X)Y$$

pour tout $X, Y, Z \in L$.

Supposons maintenant que le tenseur φ donné, détermine sur V_n une φ-π-structure [1]. Les quasi-connexions, par rapport auxquelles la dérivée covariante de ce tenseur est nulle, sont nommées quasi-connexions complètement réductibles [3].

Compte tenu de cette remarque, on peut démontrer immédiatement le

Théorème 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que les quasi-connexions* ${}^1D$ *et* ${}^2D$ *soient complètement réductibles est que le produit défini plus haut jouisse de la propriété*

$$X \cdot \varphi Y = \varphi(X \cdot Y) \text{ pour tout } X,Y \in L$$

et la quasi-connexion moyenne $\mathfrak{D}$ *de la paire* $({}^1D, {}^2D)$ *soit complètement réductible.*

Remarque. Si le tenseur φ se réduit au tenseur de Kronecker, les quasi-connexions deviennent des connexions linéaires sur V_n et les résultats de ce paragraphe coïncident avec celles de [2].

B I B L I O G R A P H I E

1. H s u C. J. — *On some properties of π-structures on differentiable manifolds.* Tohoku Math. Journ. *12* (1960), pp. 429-454.
2. V a i s m a n I. — *Sur quelques formules du calcul de Ricci global.* Comm. Math. Helvetici, *41*, f. 2 (1966-1967), pp. 73-87.
3. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe spații dotate cu o r-π-structură.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVI (1970), p. 117-125.
4. V a m a n u E. — *Cvasi-conexiuni pe varietăți diferențiabile.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t XVI (1970), pp. 383-388.

CVASI-CONEXIUNI PE VARIETĂȚI DIFERENȚIABILE. II

Rezumat

În [4] au fost abordate o serie de probleme legate de teoria cvasi-conexiunilor pe varietăți diferențiabile. Prezenta Notă se referă tot la cvasi-conexiuni pe varietăți diferențiabile. § 1 conține o caracterizare geometrică a cvasi-conexiunilor fără curbură şi fără torsiune, iar în § 2 se consideră unele probleme legate de perechi de cvasi-conexiuni ca: cvasi-conexiunea medie a două cvasi-conexiuni, algebra de deformare a două cvasi-conexiuni etc.

TENSOR INTEGRAL AND EXTERIOR DERIVATIVE OF DOUBLE TENSORIAL FORMS

BY

J. GOTTLIEB

Relying on A. M o ó r's works [7], [8], we defined [2], [3], [4] in the case of a n-dimensional parallelizable space, a multiple tensor integral on a p-dimensional domain ($p \leqslant n$), established Stokes-type formulae and with their help we defined the exterior derivative of exterior tensorial forms. In this work we shall generalize these results in the case of the space with linear connection.

Introduction. Let V_n be a n-dimensional space with linear connection having the connection coefficients Γ^i_{kl}, x and $x' \in V_n$. Let T_x and $T_{x'}$ be the tangent vectorial spaces in x, x' respectively and T^*_x and $T^*_{x'}$ be their duals. One calls bi-tensor [11], an element of the space $(\otimes_\alpha T_x) \otimes (\otimes_\beta T^*_x) \otimes (\otimes_\gamma T_{x'}) \otimes (\otimes_\delta T^*_{x'})$ defined over the space $V_n \times V_n$.

We shall admit the convention that the indices with prime, without prime respectively, would refer to the points x', x respectively. Thus, $T^i_{\cdot j'}$ for instance are the components of the bi-tensor $T \in T_x \otimes T^*_{x'}$.

With the change of coordinates

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i (x^k), \tag{0.1}$$

the components of the bi-tensor T transform themselves according to the relation

$$\bar{T}^i_{\cdot k'} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial x'^p}{\partial \bar{x}'^k} T^j_{\cdot p'}, \tag{0.2}$$

which may be generalized for several numbers of indices.