

STATICA BARELOR ELASTICE MONOTROPE NEOMOGENE

DE

A. RADU

Intr-o lucrare anterioară [3] am studiat echilibrul elastic al barelor cilindrice izotrope în cazul cînd coeficienții de elasticitate ai materialului sînt funcții de clasă C^2 în domeniul secțiunii transversale a barei.

Scopul lucrării prezente este de a extinde rezultatele obținute în lucrarea citată la cazul barelor elastice monotrope sau transversal izotrope, în aceeași ipoteză asupra coeficienților de elasticitate ai materialului. Sistemul de tensiuni îl considerăm antiplan [1], [2]. În acest articol vom folosi notațiile și unele rezultate din lucrările [2], [3], [4].

§ 1. Probleme la limită pentru bare monotrope neomogene. Considerăm o bară finită de lungime L limitată de una sau mai multe suprafețe cilindrice (prismatice) și de două plane normale suprafeței laterale. Presupunem cunoscute forțele masice, forțele care acționează pe suprafața laterală și pe bazele barei.

Alegem un sistem de coordonate carteziene ortogonale $Ox_1x_2x_3$, astfel ca planul x_1Ox_2 să conțină una dintre baze, iar axa Ox_3 să fie paralelă la generatoarele suprafeței laterale și cu sensul pozitiv spre material. Planul x_1Ox_2 este antiplanul acestui sistem elastic.

Presupunem că secțiunea transversală a barei este un domeniu multiplu conex Ω , a cărui frontieră Γ este formată dintr-un număr finit de curbe $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ simple, închise, rectificabile și fără puncte comune, Γ_0 fiind conturul exterior, iar $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ contururile interioare. Unghiul pe care-l face tangenta la curba Γ_j (pentru $j = 0, 1, \dots, m$) cu axa Ox_3 , satisface o condiție Hölder.

Fie $\sigma_n(\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3})$ sarcina aplicată într-un punct al suprafeței laterale, în care \mathbf{n} este versorul normalei exterioare. Forța masică $\mathbf{F}(F_1, F_2, F_3)$ o presupunem independentă de x_3 [2].

Forțele aplicate pe baza $x_3 = 0$ sînt static echivalente cu o forță $\mathbf{R}(R_1, R_2, R_3)$ aplicată în punctul 0 și un cuplu al cărui moment este $\mathbf{M}(M_1, M_2, M_3)$. Sistemul acesta de forțe îl presupunem compatibil cu sistemul antiplan considerat. Forțele aplicate pe baza $x_3 = L$ trebuie să fie astfel încît să realizeze echilibrul barei împreună cu forțele masice și celelalte sarcini aplicate și, în plus, să fie compatibile cu tensiunile antiplane.

Componentele tensiunii pe baza $x_3 = 0$ le notăm prin $\sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{33}^0$; tensiunile σ_{31} și σ_{23} sînt independente de x_3 , iar σ_{33}^0 reprezintă valoarea tensiunii σ_{33} pentru $x_3 = 0$.

Exprimînd faptul că tensiunile ce acționează pe capătul $x_3 = 0$ al barei și sarcinile exterioare aplicate sînt static echivalente, obținem condițiile

$$(1.1) \quad \int_{\Omega} \sigma_{31} d\omega = R_1, \quad \int_{\Omega} \sigma_{23} d\omega = R_2,$$

$$(1.2) \quad \int_{\Omega} (x_1 \sigma_{23} - x_2 \sigma_{31}) d\omega = M_3,$$

$$(1.3) \quad \int_{\Omega} \sigma_{33}^0 d\omega = R_3, \quad \int_{\Omega} x_2 \sigma_{33}^0 d\omega = M_1, \quad \int_{\Omega} x_1 \sigma_{33}^0 d\omega = -M_2.$$

Pe suprafața laterală avem

$$(1.4) \quad n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{12} = \sigma_{n1}, \quad n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22} = \sigma_{n2},$$

$$(1.5) \quad n_1 \sigma_{31} + n_2 \sigma_{23} = \sigma_{n3}.$$

Deoarece $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_{31}, \sigma_{23}$ sînt prin ipoteză independente de x_3 [2], rezultă că $\sigma_{n1}, \sigma_{n2}, \sigma_{n3}$ trebuie să fie independente de x_3 .

Presupunem că planul de izotropie a materialului coincide cu antiplanul sistemului ($x_3 = 0$). Neomogenitatea materialului o presupunem transversală, prin urmare cei cinci coeficienți de elasticitate $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{11}$ nu depind de x_3 .

Considerăm porțiunea din bară cuprinsă între baza $x_3 = 0$ și o secțiune transversală arbitrară $x_3 = h$, $h \in [0, L]$ și notăm cu σ_{33} valoarea lui σ_{33} pentru $x_3 = h$. Fie O' punctul în care axa Ox_3 intersectează planul $x_3 = h$ și $O'x'_1, O'x'_2$ axele paralele și de același sens cu Ox_1, Ox_2 respectiv. Porțiunea din bară precizată mai înainte fiind în echilibru, deducem

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma_{33} d\omega - R_3 + \int F_3 d\tau + \int \sigma_{n3} d\Sigma = 0, \\ \int_{\Omega} x_1 \sigma_{23} d\omega + M_2 - hR_1 + \int x_1 F_3 d\tau + \int (h - x_3) F_1 d\tau + \\ + \int x_1 \sigma_{n3} d\Sigma + \int (h - x_3) \sigma_{n1} d\Sigma = 0, \\ \int_{\Omega} x_2 \sigma_{31} d\omega - M_1 - hR_2 + \int x_2 F_3 d\tau + \int (h - x_3) F_2 d\tau + \\ + \int x_2 \sigma_{n3} d\Sigma + \int (h - x_3) \sigma_{n2} d\Sigma = 0, \end{array} \right.$$

unde $d\omega$ este elementul de arie al secțiunii transversale, $d\Sigma$ este elementul de arie al suprafeței laterale și $d\tau$ elementul de volum al barei. Integralele din relațiile precedente sînt extinse respectiv pe secțiunea transversală Ω , suprafața laterală și volumul porțiunii de bară considerată.

Punînd $d\tau = d\omega dx_3$, $d\Sigma = ds dx_3$, unde ds este elementul de arc al conturului secțiunii transversale și avînd în vedere că $F_i, \sigma_{ni} (i = \overline{1, 3})$ sînt independente de x_3 , rezultă

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \sigma_{33} d\omega + h \left(\int_V \sigma_{n3} ds + \int_{\Omega} F_3 d\omega \right) = R_3, \\ \int_{\Omega} x_1 \sigma_{23} d\omega + h \left(\int_V x_1 \sigma_{n3} ds + \int_{\Omega} x_1 F_3 d\omega - R_1 \right) + \\ + \frac{1}{2} h^2 \left(\int_V \sigma_{n1} ds + \int_{\Omega} F_1 d\omega \right) = -M_2, \\ \int_{\Omega} x_2 \sigma_{31} d\omega + h \left(\int_V x_2 \sigma_{n3} ds + \int_{\Omega} x_2 F_3 d\omega - R_2 \right) + \\ + \frac{1}{2} h^2 \left(\int_V \sigma_{n2} ds + \int_{\Omega} F_2 d\omega \right) = M_1, \end{array} \right.$$

pentru orice $h \in [0, L]$.

Avind în vedere forma lui σ_{33} dedusă în [2], avem

$$(1.8) \quad \sigma_{33} = \sigma_{33}^0 + k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0)h,$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0$ sînt constante reale și

$$(1.9) \quad k = c_{33} - 2 \frac{c_{13}^2}{c_{11} + c_{12}}.$$

Introducînd valoarea lui σ_{33} din (1.8) în (1.7), indentificînd coeficienții diverselor puteri ale lui h și ținînd seama de condițiile (1.3), obținem

$$(1.10) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0) k d\omega = - \int_{\Omega} F_3 d\omega - \int_{\Gamma} \sigma_{n3} ds, \\ \int_{\Omega} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0) x_j k d\omega = R_j - \int_{\Gamma} x_j F_3 d\omega - \int_{\Gamma} x_j \sigma_{n3} ds, \quad (j=1, 2) \end{cases}$$

și

$$(1.11) \quad \int_{\Omega} F_j d\omega + \int_{\Gamma} \sigma_{nj} ds = 0, \quad (j=1, 2).$$

Analog ca în cazul izotrop, punctul de coordonate

$$(1.12) \quad x_j^* = \frac{1}{S} \int_{\Omega} x_j k d\omega, \quad (j=1, 2),$$

unde

$$S = \int_{\Omega} k d\omega,$$

se numește *centru de masă (greutate) redus* al domeniului Ω .

Cantitățile

$$(1.13) \quad \bar{I}_{11} = \int_{\Omega} x_2^2 k d\omega, \quad \bar{I}_{22} = \int_{\Omega} x_1^2 k d\omega, \quad \bar{I}_{12} = \int_{\Omega} x_1 x_2 k d\omega,$$

se numesc *momente de inerție reduse* ale domeniului Ω în raport cu axele Ox_1, Ox_2 respectiv și *moment centrifug redus* al aceluiași domeniu.

De asemenea, notăm

$$(1.14) \quad I_{11}^* = \int_{\Omega} (x_2 - x_2^*)^2 k d\omega, \quad I_{22}^* = \int_{\Omega} (x_1 - x_1^*)^2 k d\omega, \quad I_{12}^* = \int_{\Omega} (x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) k d\omega,$$

ale căror semnificații sînt evidente.

Se verifică ușor relațiile

$$I_{11}^* = \bar{I}_{11} - Sx_2^{*2}, \quad I_{22}^* = \bar{I}_{22} - Sx_1^{*2}, \quad I_{12}^* = \bar{I}_{12} - Sx_1^*x_2^*.$$

Deoarece, ca și în cazul izotrop [3], problema generală poate fi descompusă în două probleme cvasi-independente și anume, o problemă de deformare plană și o problemă antiplană pură, putem studia separat aceste două probleme.

În această lucrare vom studia numai problema antiplană pură, adică problema determinării tensiunilor $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ cînd se dă rezultanta (R_1, R_2, R_3) și momentul resultant al tensiunilor (M_1, M_2, M_3) aplicate pe baza $x_3 = 0$, sarcina $(0, 0, \sigma_{n3})$ pe suprafața laterală, forța masică $(0, 0, F_3)$ și $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$.

§ 2. Determinarea tensiunii normale σ_{33} . Pentru problema antiplană pură, avem [2]

$$(2.1) \quad \sigma_{33} = k[(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_0)x_3 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_0],$$

unde $\beta_1, \beta_2, \beta_0$ sînt constante reale.

Cele șase constante care intră în expresia lui σ_{33} le determinăm din condițiile la limită.

Procedînd în mod analog ca în cazul izotrop [3], deducem

$$(2.2) \quad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{\Delta^*} (I_{11}^* R_1^* - I_{12}^* R_2^*), & \alpha_2 = \frac{1}{\Delta^*} (-I_{12}^* R_1^* + I_{22}^* R_2^*), \\ \alpha_0 = \frac{1}{\Delta^*} [(I_{12}^* x_2^* - I_{11}^* x_1^*) R_1^* + (I_{12}^* x_1^* - I_{22}^* x_2^*) R_2^*] - \\ - \frac{1}{S} \left(\int_{\Omega} F_3 d\omega + \int_{\Gamma} \sigma_{n3} ds \right), \end{cases}$$

$$(2.3) \quad \begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{\Delta^*} (I_{12}^* M_1^* + I_{11}^* M_2^*), & \beta_2 = \frac{1}{\Delta^*} (I_{22}^* M_1^* + I_{12}^* M_2^*), \\ \beta_0 = \frac{1}{\Delta^*} [(I_{12}^* x_1^* - I_{22}^* x_2^*) M_1^* + (I_{11}^* x_1^* - I_{12}^* x_2^*) M_2^*] + \frac{R_3}{S}, \end{cases}$$

unde

$$(2.4) \quad \begin{cases} R_j^* = R_j - \int_{\Omega} (x_j - x_j^*) F_3 d\omega - \int_{\Gamma} (x_j - x_j^*) \sigma_{n3} ds, \quad (j=1, 2), \\ M_1^* = M_1 - x_2^* R_3, \quad M_2^* = M_2 + x_1^* R_3, \quad \Delta^* = I_{11}^* I_{22}^* - I_{12}^{*2}. \end{cases}$$

Cînd axele de coordonate sînt axe principale centrale reduse, avem

$$x_1^* = x_2^* = 0, \quad I_{12} = 0$$

și formulele precedente se simplifică.

Tensiunea normală σ_{33} fiind astfel determinată, rămîne să ne ocupăm de tensiunile tangențiale σ_{31} și σ_{32} . Studiul tensiunilor tangențiale îl vom face separat în cazul cînd tensiunea σ_{33} este independentă de x_3 și cînd aceasta depinde de x_3 .

§ 3. Cazul cînd σ_{33} este independentă de x_3 . În cazul acesta avem

$$(3.1) \quad z_1 = z_2 = z_0 = 0,$$

iar $c_{13}/(c_{11} + c_{12})$ poate fi o funcție arbitrară din $C^2(\bar{\Omega})$.

Rezultă

$$(3.2) \quad 0 = -\frac{2c_{13}}{c_{11} + c_{12}} (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_0)$$

și, deoarece 0 este o funcție armonică, trebuie să avem

$$(3.3) \quad \Delta \left| (\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_0) \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}} \right| = 0.$$

Fiindcă am presupus că $c_{13}/(c_{11} + c_{12})$ este o funcție arbitrară din $C^2(\bar{\Omega})$, deducem

$$(3.4) \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_0 = 0.$$

Prin urmare, pentru modelul considerat, tensiunea normală σ_{33} este nulă. Din ecuațiile (1.3) rezultă condițiile necesare pentru ca problema să fie posibilă

$$(3.5) \quad R_3 = 0, \quad M_1 = M_2 = 0.$$

Ecuațiile (1.10) dau condițiile

$$(3.6) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} F_3 d\omega + \int_{\Gamma} \sigma_{33} ds = 0, \\ \int_{\Omega} x_j F_3 d\omega + \int_{\Gamma} x_j \sigma_{33} ds = R_j, \quad (j = 1, 2), \end{cases}$$

care sînt satisfăcute identic în virtutea ecuațiilor de echilibru și a condițiilor la limită (1.1) și (1.5).

Componentele tangențiale ale tensiunii σ_{31} și σ_{32} , care sînt diferite de zero, pot fi determinate cu ajutorul funcției complexe

$$(3.7) \quad w = \frac{1}{\sqrt{c_{11}}} (\sigma_{33} + i\sigma_{31}),$$

care satisface ecuația cu derivate areolare

$$(3.8) \quad w_z = (\ln \sqrt{c_{11}})_z \bar{w} - \frac{1}{2} \gamma \sqrt{c_{11}} - i \frac{1}{2\sqrt{c_{11}}} F_{33}, \quad z = x_1 + ix_2$$

și condiția la limită

$$(3.9) \quad \operatorname{Re}[t'(s) w(t)] = -\frac{\sigma_{33}}{\sqrt{c_{11}}}, \quad t \in \Gamma,$$

unde γ este o constantă reală, iar $t'(s) = dx_1/ds + i dx_2/ds$.

Ecuațiile (1.1) sînt identic satisfăcute în baza ecuațiilor de echilibru, a condiției (1.5) și a condițiilor (3.6). Ecuația (1.2) poate fi satisfăcută prin alegerea convenabilă a constantei γ , deci ea servește pentru determinarea lui γ cînd se cunoaște M_3 .

Presupunînd satisfăcute condițiile (3.6), tensiunile tangențiale σ_{31} și σ_{32} le determinăm din ecuațiile (3.7) — (3.9). Pentru studiul problemei la limită (3.8) — (3.9) vom utiliza metoda lui I. N. Vekua [4], sub forma în care am folosit-o în [3]. Vom renunța la unele considerații și calcule intermediare și vom da direct rezultatul final.

Numind problema la limită (3.8) — (3.9) problema A, vom mai considera problema omogenă \hat{A}

$$(3.10) \quad w_z = (\ln \sqrt{c_{11}})_z \bar{w}, \quad \operatorname{Re}[t'(s) w(t)] = 0, \quad t \in \Gamma$$

și problema omogenă conjugată \hat{A}_*

$$(3.11) \quad w_z^* = -(\ln \sqrt{c_{11}})_z \bar{w}^*, \quad \operatorname{Re}[w^*(t)] = 0, \quad t \in \Gamma.$$

Evident, problema \hat{A}_* are soluția netrivială

$$(3.12) \quad w^*(z) = iK \sqrt{c_{11}},$$

unde K este o constantă reală arbitrară.

Notînd cu n indicele problemei A și cu n^* indicele problemei \hat{A}_* , avem

$$(3.13) \quad n = m - 1, \quad n^* = 0.$$

Fie l și l^* numărul de soluții liniar independente ale problemelor A și \hat{A}_* respectiv. Avînd în vedere (3.13), deducem

$$(3.14) \quad l = m, \quad l^* = 1.$$

Prin urmare, orice soluție nebanală a problemei \hat{A}_* este de forma (3.12). Putem enunța astfel rezultatul:

Condiția necesară și suficientă de existență și unicitate a soluției problemei A este

$$(3.15) \quad i \int_{\Gamma} w^*(t) \frac{\sigma_{n3}}{\sqrt{c_{11}}} ds + \operatorname{Re} \left[\int_{\Omega} \left(\gamma \sqrt{c_{11}} + \frac{iF_3}{\sqrt{c_{11}}} \right) w^*(z) d\omega \right] = 0,$$

pentru orice soluție nebanală $w^*(z)$ a problemei Λ_* .

Având în vedere forma (3.12) a lui $w^*(z)$, condiția (3.15) devine

$$\int_{\Gamma} \sigma_{n3} ds + \int_{\Omega} F_3 d\omega = 0,$$

care coincide cu prima ecuație a sistemului (3.6), satisfăcut în baza ecuațiilor de echilibru și a condițiilor la limită.

Astfel, am demonstrat teorema de existență și unicitate a soluției problemei considerate. Această metodă teoretică de studiu nu permite găsirea efectivă a soluției. În unele cazuri concrete soluția efectivă poate fi obținută pe alte căi.

Teorema lui R. Bredt asupra circulației tensiunilor tangențiale se extinde fără dificultate la cazul considerat. Într-adevăr, fie c o curbă simplă, închisă și rectificabilă, interioară domeniului Ω și δ domeniul limitat de această curbă. Circulația tensiunilor tangențiale în cazul monotrop neomogen o definim prin formula

$$\mathcal{J} = \int_{\Gamma} \frac{1}{c_{11}} T_s ds = \int_{\Gamma} \frac{1}{c_{11}} (\sigma_{31} dx_1 + \sigma_{32} dx_2).$$

Avem

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{c_{11}}} (w dz - \bar{w} d\bar{z}) = \int_{\delta} \left[\left(\frac{w}{\sqrt{c_{11}}} \right)_z + \left(\frac{\bar{w}}{\sqrt{c_{11}}} \right)_{\bar{z}} \right] d\omega,$$

și, ținând cont de ecuația (3.8), obținem relația

$$(3.16) \quad \mathcal{J} = -\gamma \text{măs } \delta,$$

care reprezintă teorema lui R. Bredt.

Determinarea deplasărilor. Deplasările se determină din sistemul

$$(3.17) \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \varepsilon_{12} = 0, \quad \varepsilon_{23} + i\varepsilon_{31} = \frac{1}{c_{11}} w,$$

Rezultă următorul sistem de ecuații

$$(3.18) \quad \begin{cases} u_{\bar{z}} = 0, & u_z + \bar{u}_{\bar{z}} = 0, & u_{3,3} = 0, \\ \bar{u}_{,3} + 2u_{3,1} = -\frac{2i}{\sqrt{c_{11}}} w, \end{cases}$$

unde u este deplasarea complexă

$$u(z, x_3) = u_1 + iu_2.$$

În mod analog ca în [3], deducem

$$(3.19) \quad \begin{cases} u(z, x_3) = u_1 + iu_2 = -\frac{1}{2} i\gamma z x_3, \\ u_3 = \frac{1}{2} [H(z) + \bar{H}(\bar{z})] + \frac{i}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{c_{11}}} \left[\frac{w(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\bar{w}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right] d\omega, \end{cases}$$

unde în expresia lui u am neglijat o constantă aditivă, iar $H(z)$ este o funcție olomorvă în Ω , care se determină din condiția

$$(3.20) \quad H(z) - \bar{H}(\bar{z}) = \frac{i}{\pi} \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{c_{11}}} \left[\frac{w(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{\bar{w}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta} - \bar{z}} \right] d\omega - \frac{1}{2} i\gamma z \bar{z}.$$

§ 4. Cazul cînd σ_{33} depinde de x_3 . După cum am arătat în [2], în acest caz trebuie să avem

$$(4.1) \quad \frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}} = \text{const.}$$

Funcția w definită prin (3.7) se determină din următoarea problemă la limită

$$(4.2) \quad \begin{aligned} w_{\bar{z}} &= (\ln \sqrt{c_{11}})_z \bar{w} - \frac{ik}{4\sqrt{c_{11}}} (z\bar{z} + z\bar{z} + 2z_0) + \\ &+ \frac{ic_{13}\sqrt{c_{11}}}{4(c_{11} + c_{12})} (z\bar{z} - \alpha\bar{z}) - \frac{\gamma}{2}\sqrt{c_{11}} - \frac{iF_3}{2\sqrt{c_{11}}}, \end{aligned}$$

$$(4.3) \quad \operatorname{Re} [t'(s) w(t)] = -\frac{\sigma_{n3}}{\sqrt{c_{11}}}, \quad t \in \Gamma,$$

unde $z = z_1 + iz_2$.

Deoarece ecuația (4.2) diferă de ecuația (3.8) doar prin termenul liber, deducem că problema la limită (4.2) - (4.3) admite soluție unică întotdeauna. Condiția necesară și suficientă pentru aceasta se reduce la prima ecuație a sistemului (1.10).

Teorema lui R. Bredt se stabilește fără dificultate și în acest caz. Pentru determinarea deplasărilor avem sistemul

$$(4.4) \quad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\frac{c_{13}}{c_{11} + c_{12}} \varepsilon_{33}, & \varepsilon_{12} = 0, & \varepsilon_{31} + i\varepsilon_{32} = \frac{1}{\sqrt{c_{11}}} i\psi, \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} [(\bar{\alpha}x + \alpha\bar{x} + 2\alpha_0)x_3 + \bar{\beta}x + \beta\bar{x} + 2\beta_0], & \beta = \beta_1 + i\beta_2. \end{cases}$$

Sistemul (4.4) fiind de tipul sistemului (4.5) din lucrarea citată [3], se poate integra prin aceeași metodă.

Observație. Dacă presupunem că între cei cinci coeficienți de elasticitate există relațiile

$$c_{33} = c_{11}, \quad c_{13} = c_{12}, \quad c_{11} = c_{11} - c_{12}$$

atunci mediul elastic este izotrop și, punind

$$c_{11} = \lambda + 2\mu, \quad c_{12} = \lambda, \quad c_{13} = 2\mu,$$

regăsim rezultatele din [3].

BIBLIOGRAFIE

1. Milne-Thomson L. M. — *Aniplane elastic systems*. Ergebnisse der Mathematik, Springer-Verlag, 1962.
2. Radu A. — *Sisteme elastice antiplane neomogene*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, t. XIII (1967), p. 145–159.
3. Radu A. — *Echilibrul barelor elastice izotrope neomogene*. An. șt. Univ. Iași, Matematică, t. XIII (1967), p. 421–442.
4. Веква И. И. — *Обобщенные аналитические функции*. Москва, 1959.

LA STATIQUE DES BARRES ÉLASTIQUES MONOTROPES NON HOMOGENES

Résumé

On étudie l'équilibre d'une barre cylindrique monotrope (transversalement isotrope) sous l'action d'un système de forces qui agissent sur les bases, des forces appliquées sur la surface latérale et des forces de masse, pour le cas où les coefficients d'élasticité du matériel sont des fonctions de classe C^2 .

Après avoir déterminé la tension normale σ_{33} , les tensions tangentielles σ_{31} et σ_{32} , on étudie séparément pour le cas où la tension σ_{33} est indépendante de x_3 et le cas où elle est une fonction de x_3 .

En utilisant la méthode des fonctions analytiques généralisées de I. N. Vekua, on démontre l'existence et l'unicité de la solution du problème aux limites considéré.

ON THE RECIPROCITY THEOREM IN THE LINEAR ELASTODYNAMICS

BY

D. IEȘAN

The reciprocity theorem in the dynamic theory of linear elasticity was established [1] by Graffi using the Laplace transform.

In 1967 we gave [2] a method to obtain the reciprocity theorems without using the Laplace transform. The advantage of this method lies in the fact that it avoids extraneous analytical restrictions upon the states involved.

The results seems to be of sufficient interest to be reproduced separately with particular reference to classical theory of elasticity since it may be overlooked in a paper which is primarily concerned with other theory.

Let \bar{V} be a regular (in the sense of Kellog) region of space occupied by a elastic material whose boundary is Σ . Moreover V is the interior of \bar{V} and n_i are components of the unit outward normal to Σ . Throughout this paper a rectangular coordinate system Ox_k ($k = 1, 2, 3$) is employed.

The basic equations of the linear theory of homogeneous and anisotropic elastic solid are:

equations of motion

$$(1) \quad t_{ij,j} + F_i = \rho \ddot{u}_i,$$

constitutive equations

$$(2) \quad t_{ij} = C_{ijkl} e_{kl},$$

geometrical equations

$$(3) \quad 2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$