SUR L'ADMISSIBILITÉ PAR RAPPORT À UN OPÉRATEUR INTÉGRAL LINÉAIRE

PAR

C. AVRAMESCU

Plusieurs problèmes de la théorie qualitative des équations intégrales se réduisent à la démonstration de l'existence des solutions d'une équation intégrale, dans un certain espace fonctionel D. Pour ces types de problèmes, la méthode développée par C. Corduneanu ([1], [2], [3]), s'avère très utile. Cette méthode constitue la transposition pour le cas des équations intégrales de la méthode de Massera-Schäffer [4], élaborée pour l'étude qualitative des équations différentielles ordinaires.

Dans la méthode de Massera-Schäffer-Corduneanu, le problème central est celui de *l'admissibilité* d'une paire d'espaces par rapport à un opérateur linéaire K; on dit que la paire d'espaces (B, D) est *admissible* par rapport à l'opérateur K, si on a l'inclusion $KB \subset D$.

Dans cette note, nous allons donner quelques conditions nécessaires et suffisantes d'admissibilité pour certaines paires d'espaces de fonctions continues sur $R_+ = [0, \infty)$ par rapport à un opérateur intégral linéaire du type de Fredholm.

1. Nous allons indiquer maintenant les notations utilisées dans ce travail.

Soient $g(t)$ et $G(t)$ deux fonctions continues sur R_+, à valeurs dans R, strictement positives. On note par C_g l'espace de Banach des applications continues de R_+ à R, telles que, pour tout $x \in C_g$ il existe un nombre positif a, qui dépend de x, de façon qu'on ait $|x(t)| \leqslant a \cdot g(t)$ pour tout $t \in R_+$. La norme de C_g sera définie par l'égalité

$$|x|_g = \sup_{t \in R_+} \frac{x(t)}{g(t)}.$$

La notation C_G aura une signification analogue. En particulier, pour $g(t) = 1$ l'espace C_g devient l'espace C des fonctions réelles, continues et bornées sur R_+.

Par C_g^l on note le sous-espace de C_g formé par les fonctions $x(t)$, telles que la $\lim_{t\to\infty}(x(t)/g(t))$ existe.

Par C_g^0 on note le sous-espace de C_g^l, formé par les fonctions $x(t)$, telles que $\lim_{t\to\infty}(x(t)/g(t)) = 0$.

Par C_ω on note le sous-espace de C formé par les fonctions périodiques de période ω.

Par C_c on note l'espace des fonctions réelles, continues sur R_+, muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de R_+; comme on sait, C_c est un espace de Fréchet.

Soit $K(t, s)$ une fonction définie et continue dans $R_+ \times R$ à valeurs dans R; nous allons considérer l'opérateur intégral

$$Kx = \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)ds.$$

Le symbole $\int_0^\infty x(t)dt$ sera considéré dans ce travail au sens de Riemann-Cauchy, c-à-d. $\int_0^\infty x(t)dt = \lim_{A\to\infty}\int_0^A x(t)dt$.

(Ce fait nous permet de considérer des fonctions qui ne sont pas intégrables au sens de Lebesgue).

2. Nous allons démontrer maintenant un premier résultat.

Théorème 1. *Soient B un sous-espace (fermé) de C_g et D un sous-espace (fermé) de C_G.*

Si la paire (B, D) est admissible par rapport à l'opérateur K, alors cet opérateur est continu de B à D.

Démonstration. Soit $t \in R$ fixé; considérons la famille d'applications

$$K_n x = (1/G(t)) \cdot \int_0^n K(t, s)\, x(s)ds. \tag{1}$$

L'égalité (1) représente, pour tout $n \in N$, une application linéaire de B à R. Si l'on pose,

$$a(t, n) = (1/G(t)) \cdot \sup_{s\in[0,n]} \{|K(t, s)| \cdot g(s)\},$$

alors on a l'inégalité

$$|K_n x| \leqslant a(t, n) \cdot |x|_g, \tag{2}$$

inégalité qui montre que l'application $K_n : B \to R$ est continue. Mais pour tout $x \in B$ on a

$$\lim_{n\to\infty} K_n x = Kx,$$

ce qui montre que l'application $x \to Kx$ est, pour tout t fixé, une application continue de B à R, étant la limite ponctuelle d'une suite d'applications linéaires et continues.

Considérons maintenant la famille d'opérateurs

$$K_t x = (1/G(t)) \cdot \int_0^\infty K(t, s) \cdot x(s)ds,$$

qui, pour tout $t \in R_+$ représente une application linéaire et continue de B à R; il existe donc une fonction positive $a(t)$, définie sur R_+, telle que

$$\left|(1/G(t)) \cdot \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)ds\right| \leqslant a(t) \cdot |x|_g, \qquad \forall x \in B_+. \tag{3}$$

Mais l'inclusion $KB \subset D\ (\subset C_G)$, implique l'existence, pour tout $x \in B$, d'un nombre positif $b(x)$, tel que,

$$\left|\int_0^\infty K(t, s)\, x(s)ds\right| \leqslant b(x) \cdot G(t), \qquad \forall t \in R_+. \tag{4}$$

Les inégalités (3) et (4) assurent, grâce au théorème de Banach-Steinhaus, l'existence d'un nombre positif A, tel que,

$$\left|(1/G(t)) \cdot \int_0^\infty K(t, s)\, x(s)ds\right| \leqslant A \cdot |x|_g, \qquad \forall t \in R_+,$$

d'où on tire que,

$$|Kx|_G \leqslant A \cdot |x|_g, \tag{5}$$

ce qui montre la continuité de l'opérateur K de B à D.

3. Nous allons démontrer maintenant quelques théorèmes concernant, l'admissibilité de certaines paires d'espaces par rapport à l'opérateur K;

Théorème 2. *La paire (C_g^0, C_G) est admissible par rapport à K, si et seulement s'il existe un nombre positif M, tel que,*

$$(6)\qquad \int_0^\infty |K(t,s)|\cdot g(s)ds < M\cdot G(t), \qquad \forall t\in R_+.$$

Démonstration. Montrons d'abord la suffisance de la condition (6). Soit donc $x\in C_g^0$; il existe alors un nombre positif a, tel qu'on ait $|x(t)| < a\cdot g(t)$, $\forall t\in R_+$. L'inégalité (6) nous assure que la fonction $(Kx)(t)$ est définie sur R_+, et qu'on a l'inégalité,

$$|(Kx)(t)| < aM\cdot G(t), \qquad \forall t\in R_+.$$

Il reste donc à montrer la continuité de la fonction $(Kx)(t)$. Soient $t, t_0\in [0, b]$; on peut écrire,

$$|(Kx)(t)-K(x)(t_0)| < \int_0^T |K(t,s)-K(t_0,s)|\,|x(s)|\,ds +$$

$$+\int_T^\infty |K(t,s)|\,|x(s)|\,ds + \int_T^\infty |K(t_0,s)|\,|x(s)|\,ds <$$

$$< a\cdot |x|_g\cdot \int_0^T |K(t,s)-K(t_0,s)|\,g(s)ds + 2M\sup_{t\geq T}(|x(t)|/g(t)).$$

On peut choisir T assez grand afin que $\sup_{t\geq T}(|x(t)|/g(t)) < (\varepsilon/4M)$, car $x(t)/g(t)\to 0$. Comme la fonction $K(t,s)\,g(s)$ est uniformément continue sur $[0, T]\times[0, b]$, il existe un nombre δ, tel que, pour $|t-t_0|<\delta$, on ait $|K(t,s)-K(t_0,s)|\,g(s) < \varepsilon/2Ta\cdot|x|_g$. Donc la fonction $(Kx)(t)$ est continue au point t_0.

Montrons maintenant la nécessité de la condition (6). Il faut montrer d'abord que l'intégrale qui y intervient, existe pour tout $t\in R_+$.

Supposons que dans un point t_0 cette intégrale n'existait pas. Alors on peut trouver un nombre positif T, tel qu'on ait

$$(7)\qquad \int_0^T |K(t_0,s)|\,g(s)ds > \lambda G(t_0)+1,$$

(λ étant un nombre positif, qui sera précisé dans ce qui suit).

Soit $\varphi(s) = \operatorname{sgn} K(t_0,s)$ $(s\in[0, T])$; d'après le théorème bien connu de Lusin, concernant la structure des fonctions mesurables, on peut trouver une fonction continue sur $[0, T]$, $\psi(s)$, avec $|\psi(s)|\leq 1$, qui diffère de φ sur un ensemble E de mesure aussi petite que l'on veut. De plus, on peut choisir $\psi(s)$ de façon qu'on ait $\psi(T)=0$

Posons

$$(9)\qquad f(t) = \begin{cases} \psi(t)\,g(t), & 0\leq t\leq T\\ 0 & T<t<\infty.\end{cases}$$

On a évidemment, $f\in C_g^0$, et $|f|_g\leq 1$; de plus, en prenant la mesure de E suffisamment petite, de l'inégalité (7) on obtient,

$$(10)\qquad \left|\int_0^\infty K(t_0,s)\,f(s)\,ds\right| < \lambda G(t_0).$$

D'autre part, la conclusion du théorème 1 assure l'existence d'un nombre positif λ, tel que,

$$(11)\qquad \left|\int_0^\infty K(t,s)\,f(s)ds\right| \leq \lambda\,|f|_g\,G(t), \qquad \forall t\in R_+, \quad \forall f\in C_g^0.$$

Mais les inégalités (10) et (11) sont contradictoires, et donc l'affirmation faite est fausse.

Supposons maintenant que l'inégalité (6) n'était pas vraie; alors pour tout entier positif m, on peut trouver $t_m\in R_+$, tel que,

$$(12)\qquad \int_0^\infty |K(t_m,s)|\,g(s)ds > (m+1)\,G(t_m).$$

On peut trouver alors un nombre positif T_m, assez grand pour qu'on ait

$$(13)\qquad \int_0^{T_m} |K(t_m,s)|\,g(s)ds \geq (m+1)\,G(t_m).$$

Pour tout m, on peut trouver, de la même manière que plus haut, une fonction continue $f_m\in C_g^0$, avec $|f_m|_g\leq 1$, et telle que

$$(14)\qquad \left|\int_0^\infty K(t_m,s)\cdot f_m(s)ds\right| > m\cdot G(t_m).$$

Mais si l'on prend dans (14) pour m une valeur plus grande que λ, alors les inégalités (11) et (14) sont contradictoires.

Remarque 1. La continuité de l'intégrale

$$\int_0^\infty K(t,s)g(s)\,ds, \tag{15}$$

n'est pas nécessaire pour l'admissibilité de la paire (C_g^0, C_G).

Remarque 2. L'admissibilité de la paire (C_g^0, C_G) par rapport à l'opérateur K, implique l'admissibilité de la même paire par rapport à l'opérateur,

$$|K|\,x = \int_0^\infty |K(t,s)|\,x(s)ds.$$

4. Le résultat contenu dans le théorème 2, nous permet de démontrer le

Théorème 3. *La paire (C_g^l, C_G) est admissible par rapport à l'opérateur K, si et seulement si*

1) *l'inégalité* (6) *est satisfaite;*

2) *la fonction* (15) *est continue sur R_+.*

La nécessité des conditions du théorème 3 est immédiate.

Pour démontrer leur suffisance il suffira de montrer que, pour tout $x \in C_g^l$, la fonction

$$(Kx)(t) = \int_0^\infty K(t,s)x(s)ds, \tag{17}$$

est continue sur R_+. Mais on peut écrire,

$$\int_0^\infty K(t,s)x(s)ds = \int_0^\infty K(t,s)\cdot y(s)ds + l\int_0^\infty K(t,s)g(s)ds,$$

où $l = \lim_{t\to\infty}(x(t)/g(t))$, $y(t) = (x(t)/g(t)) - l$. Comme $y \in C_g^0$, et comme la fonction (15) est continue, il résulte que la fonction (17) est continue.

5. Considérons maintenant le problème de l'admissibilité de la paire (C_g, C_G) par rapport à K. À ce but, nous allons utiliser l'hypothèse suivante:

Hypothèse H. *Pour tout $t_0 \in R_+$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe deux nombres positifs A et δ, tels qu'on ait,*

$$\int_A^\infty |K(t_0+\eta, s)|\,g(s)ds < \varepsilon, \tag{18}$$

pour tout η, avec $|\eta| < \delta$.

Remarquons que l'hypothèse H sera remplie en particulier, si l'intégrale $\int_0^\infty |K(t,s)|\,g(s)ds$ converge uniformément sur tout compact de R_+: la convergence uniforme de cette intégrale est équivalente à la continuité sur R_+ de la fonction $\int_0^\infty |K(t,s)|\,g(s)ds$.

Théorème 4. *Supposons que l'hypothèse* H *soit remplie.*

Alors la paire (C_g, C_G) est admissible par rapport à l'opérateur K, si et seulement si l'inégalité (6) *a lieu.*

Pour la démonstration de ce théorème, il suffira de montrer que, pour tout $x \in C_g$, la fonction (17) est continue sur R_+.

Soit donc $t_0 \in R_+$ arbitraire; on a alors,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\{K(t_0+\eta, s) - K(t_0, s)\}\,x(s)ds| &\leq \|x\|_g \cdot \int_0^A |K(t_0+\eta, s) - K(t_0, s)|\,g(s)\,ds + \\ &+ \|x\|_g\left(\int_A^\infty |K(t_0+\eta, s)|\,g(s)ds + \int_A^\infty |K(t_0, s)|\,g(s)ds\right), \end{aligned} \tag{19}$$

où A est le nombre qui figure dans (18). On peut choisir alors un nombre δ, tel que les intégrales qui interviennent dans le second membre de l'inégalité (19) soient aussi petites que l'on veut, pour $|\eta| < \delta$.

6. Il est naturel de savoir si l'hypothèse H est nécessaire pour l'admissibilité de la paire (C_g, C_G) par rapport à l'opérateur K; une comparaison avec un résultat déjà connu (cf. [5], ch. IV, § 13, no. 85) donne l'impression qu'elle est nécessaire. Mais nous n'avons pas trouvée une démonstration acceptable que dans un cas particulier (dans le même ordre d'idées, D. Petrovanu [6] a démontrée la nécessité d'une condition d'admissibilité, dans un cas particulier; plus tard, on a trouvé une démonstration pour le cas général, par exemple, dans [7]).

Lemme 1. *Supposons que pour tout $t_0 \in R_+$, il existe deux nombres positifs δ et A, tels que, pour tout $s \in [A, +\infty)$, et tout η avec $|\eta| < \delta$, la fonction* sgn $K(t_0+\eta, s)$ *soit une fonction seulement de s.*

Alors l'hypothèse H *est nécessaire pour l'admissibilité de la paire (C_g, C_G) par rapport à l'opérateur K.*

En effet, supposons que $KC_g \subset C_G$, sans que l'hypothèse H soit satisfaite. Alors il existe $t_0 \in R_+$ et $\varepsilon > 0$, tels que,

$$\int_A^\infty |K(t_0, s)|\,g(s)ds > \varepsilon, \tag{20}$$

où $\{t_n\}$ est une suite qui converge vers t_0, et A est un nombre positif, choisi assez grand pour que la fonction $\varphi(s) = \operatorname{sgn} K(t_n, s)$ soit une fonction qui dépend seulement de s, et qu'on ait,

$$\int_A^\infty |K(t_0, s)| g(s) ds < \varepsilon/2. \tag{21}$$

L'inégalité (20) s'écrit alors

$$\left| \int_A^\infty K(t_n, s) \varphi(s) g(s) ds \right| > \varepsilon.$$

En vertu du théorème de Lusin, on peut trouver alors une fonction continue sur $[A, \infty)$, $f(s)$, telle que $|f(s)| \leqslant 1$, et

$$\left| \int_A^\infty K(t_n, s) f(s) g(s) ds \right| \geqslant \varepsilon. \tag{22}$$

De plus, on peut choisir la fonction f telle que $f(A) = 0$; si on pose alors,

$$h(s) = \begin{cases} f(s) g(s) & s \geqslant A \\ 0 & s < A \end{cases},$$

on a $h \in C_g$ et,

$$\left| \int_0^\infty \{K(t_n, s) - K(t_0, s)\} h(s) ds \right| \geqslant \varepsilon/2 \tag{23}$$

et donc, la fonction $(Kh)(t)$ n'est pas continue dans t_0. La contradiction ainsi obtenue démontre le lemme.

7. Nous allons considérer maintenant le cas où $D = C_\omega$.

Théorème 5. *Admettons que l'hypothèse* H *est satisfaite.*

Alors, la paire (C_g, C_ω) *est admissible par rapport à l'opérateur* K, *si et seulement si,*

$$\int_0^\infty |K(t, s)| g(s) ds \leqslant M, \qquad \forall t \in R_+, \tag{24}$$

$$K(t + \omega, s) = K(t, s), \qquad \forall t, s \in R_+. \tag{25}$$

Démonstration. La suffisance des conditions (24), (25) est évidente; en effet, l'inégalité (24) assure l'existence de l'intégrale

$$y(t) = \int_0^\infty K(t, s) x(s) ds, \tag{26}$$

pour tout $x \in C_g$. L'hypothèse H assure la continuité de la fonction $y(t)$, et la condition (25) donne l'égalité,

$$y(t + \omega) = y(t), \qquad \forall t \in R_+.$$

La condition (24) est nécessaire pour l'admissibilité de la paire (C_g, C), et donc, à plus forte raison, elle est nécessaire pour l'admissibilité de la paire (C_g, C_ω).

Il reste à montrer la nécessité de la condition (25).

Soient t_0, $u \in R_+$, fixés. De l'inclusion $KC_g \subset C_\omega$, il s'ensuit

$$\int_0^\infty \{K(t_0 + \omega, s) - K(t_0, s)\} g(s) \cdot e^{iu s} ds = 0, \qquad \forall u \in R_+. \tag{27}$$

Cette égalité montre que la transformé de Fourier de la fonction $\{K(t_0 + \omega, s) - K(t_0, s)\} g(s)$ est nulle, dans tout point de R_+; comme cette fonction est absolument intégrable, il résulte qu'elle est nulle sur R_+ p.p., et donc, parce qu'elle est continue, cette fonction est nulle sur R_+. Comme $g(s) > 0$, on obtient ainsi la condition (25).

Le résultat contenu dans ce théorème généralise notre résultat de [8].

Théorème 6. *Admettons que l'hypothèse* H *est remplie. Alors la paire* (C_ω, C_ω) *est admissible par rapport à l'opérateur* K, *si et seulement si la condition* (24) *est vérifiée et*

$$\int_0^\infty \{K(t + \omega, s) - K(t, s)\} \cdot \exp\left(\frac{i\omega s}{2K\pi}\right) ds = 0, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \forall t \in R_+. \tag{28}$$

La démonstration de ce théorème est immédiate. En particulier, la suffisance des conditions s'obtient en tenant compte du fait que toute fonction périodique peut être approximée par des polynômes trigonométriques.

8. Nous allons faire maintenant quelques remarques sur l'opérateur intégral de Volterra,

$$Vx = \int_0^t K(t, s) x(s) ds.$$

Du théorème 4 il résulte que pour cet opérateur l'inclusion $VC \subset C_\omega$ est impossible.

Une propriété remarquable de l'opérateur de Volterra est donnée par le théorème suivant,

Théorème 7. *Soit D un sous-espace vectoriel de C_c, tel que D soit un espace de Banach, avec la topologie plus forte que celle de C_c. Si pour une certaine fonction $g(t)$ on a $VC_g^0 \subset D$, il résulte qu'on a l'inclusion $VC_c \subset D$.*

Démonstration. Soit $f \in C_c$ arbitraire; posons,

$$f_m(t) = \begin{cases} f(t) & t \in [0, m] \\ (f(m)/g(m)) \cdot g(t) \cdot e^{m-t}, & t \geq m. \end{cases}$$

On a, pour tout m, $f_m \in C_g^0$, et donc $Vf_m \in D$; de plus, $f_m \to f$ dans C_c. Mais l'opérateur $V: C_c \to C_c$ est continu, d'où, en vertu du théorème du graphique fermé, il résulte que $V: C_c \to D$ est continu. Donc la suite Vf_m converge dans D. Comme la limite d'une suite est unique, on déduit d'ici que $Vf \in D$.

9. Les résultats établis dans ce travail pour le cas des fonctions scalaires définies sur R_+, peuvent être généralisés pour le cas des fonctions vectorielles définies sur R.

Séminaire Mathématique
Université de Craiova

BIBLIOGRAPHIE

1. Corduneanu C. — *Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra*, Ann. Mat. pura ed Appl., 67, (1965), 349-363.
2. — *Some perturbation problems in the theory of integral equations*. Math. Syst. Theory, 1, (1966), 143-155.
3. — *Sur certaines équations intégrales de Volterra*, Funk. Ekv., 9, (1966), 77-83.
4. Massera, J. L., Schäffer, J. J. — *Linear differential equations and function spaces*, Academic Press, New York, 1966.
5. Dunford, N., Schwarz, J. — *Linear operators*, part. I, Interscience Publishers, New York, 1958.
6. Petrovanu, D. — *Equations Hammerstein intégrales et discrètes*, Ann. Mat. pura ed Appl., 4 (74), (1966), 227-254.
7. Avramescu, C. — *Sur l'existence des solutions des équations intégrales dans certains espaces fonctionnels*, Ann. Univ. Sci. Budapest., sect. Math., t. XIII, (1970), 19-34.
8. — *Sur l'existence des solutions périodiques pour des équations intégrales*, An. şt. Univ. Iaşi, Mat., tom. XV, fasc. 1, (1969), 59-69.

ASUPRA ADMISIBILITĂŢII ÎN RAPORT CU UN OPERATOR INTEGRAL LINIAR

Rezumat

Vom spune că perechea de spaţii (B,D) este admisibilă în raport cu un operator liniar K, dacă are loc incluziunea $KB \subset D$. În această Notă se dau condiţii necesare şi suficiente de admisibilitate pentru unele perechi de spaţii de funcţii continue pe $[0, \infty)$, în raport cu un operator liniar integral de tip Fredholm.

ÜBER DIE VOLTERRASCHE FUNKTIONENGLEICHUNG

VON

J. BLAŻ und K. ZIMA
Universität Katowice, Pädagogische Hochschule Rzeszów

1. Grundbegriffe und Bezeichnungen. Wir bezeichnen mit E^n den n-dimensionalen euklidischen Punktraum der reellen Punkten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\|x\| = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{1/2}$. Wenn die Koordinaten von zwei Punkten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ des Raumes E^n die Ungleichungen $x_i < y_i$ (bzw. $x_i \leqslant y_i$), $i = 1, 2, \ldots, n$ erfüllen, sagen wir dass der Punkt x dem Punkte y zuvorkommt, und schreiben $x < y$ (bzw. $x \leqslant y$). Für einen beliebigen Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$, dessen Koordinaten nicht-negativ sind, führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$(1) \qquad Q_a = \{x : 0 \leqslant x \leqslant a\}, \quad \Omega_a = \{x : x \leqslant a\}, \quad \Omega = \Omega_a \setminus Q_a.$$

Mit U bezeichnen wir eine bestimmte Menge von Vektorfunktionen $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_m(x)\}$, die auf der Menge Ω_a stetig sind und deren Werte aus einem m-dimensionalen euklidischen Vektorraum stammen. (Eine genaue Bestimmung der Menge U erfolgt in 2).

In der vorliegenden Arbeit spielt eine wichtige Rolle ein gewisser Operator $A(x, u)$, mit Definitionsbereich $D = Q_a \times U$ und Werte im Raume E^m. Für den Operator $A(x,u)$ nehmen wir die folgenden Bedingungen an:

1° $A(x,u)$ ist ein Volterrascher Operator, was bedeutet, dass für $\bar{u} \in U$, $\bar{\bar{u}} \in U$, $\mathring{x} \in Q_a$ und $\bar{u}(x) \equiv \bar{\bar{u}}(x)$ für $x \leqslant \mathring{x}$, die Gleichung $A(\mathring{x}, \bar{u}) = A(\mathring{x}, \bar{\bar{u}})$ gilt;

2° $A(x,u)$ ist ein stetiger Operator in der Menge D mit folgender Metrik $\delta[(\bar{x}, \bar{u}), (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{u}})] = \max[\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|, \sup_{x \in \Omega_a} \|\bar{u}(x) - \bar{\bar{u}}(x)\|]$, wo $\|u(x)\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |u_i(x)|^2\right)^{1/2}$.