# SUR LA FONCTION „PARTIE ENTIÈRE"

PAR

ION CREANGĂ et CARMEN ZITRON

*Communication présentée à la XIX-ième session scientifique de l'Université „Al. I. Cuza" de 26—31 octobre 1972*

§ 1. La fonction $E(x)$, notée parfois par $[x]$, a été introduite dans l'analyse et dans la théorie des nombres. Elle désigne le plus grand nombre entier qui est contenu dans un nombre réel, c'est-à-dire : $[x] \leqslant x < [x] + 1$.

Cette note poursuit une généralisation de cette fonction aux groupes abéliens et, par la suite, aux espaces linéaires.

On ne suppose pas la présence d'une relation d'ordre dans le groupe ou dans l'espace linéaire considérés, l'extension étant d'une autre nature.

§ 2. Soit $G$ un groupe abélien, dont l'opération a été notée additive, et $G'$ un sousgroupe de $G$. On considère le groupe quotient $G/G'$ et on désigne par $\mathcal{A}$ un système fixé de représentants des classes de $G/G'$ :

$$0,\ a,\ b,\ c,\ldots \tag{1}$$

Il est évident qu'on peut écrire chaque élément $x$ qui appartient à $G$, d'une manière unique sous la forme :

$$x = a + x',\ \text{où}\ a \in \mathcal{A}\ \text{et}\ x' \in G'. \tag{2}$$

Parce que $x'$ est uniquement déterminé, on peut définir la fonction :

$$E : G \to G'\ \text{par}\ E(x) = x'. \tag{3}$$

La correspondance (3) n'est pas linéaire, en général. En effet, $x$ et $y$ étant deux éléments de $G$, il résulte :

$$\begin{aligned} x &= a + x' \\ y &= b + y' \end{aligned}\quad \text{où}\ a, b \in \mathcal{A}\ ;\ x', y' \in G'. \tag{4}$$

On observe que $a + b \notin \mathcal{A}$, en général, donc on a :

(5) $$a + b = c + z', \text{ ou } c \in \mathcal{A},\ z' \in G',$$

et, encore :

(6) $$x + y = c + (y' + z' + x'),$$

d' où $$[(x + y)] = x' + y' + z',$$

et

(7) $$E(x + y) - E(x) - E(y) = z',$$

où l'élément $z'$ représente l'écart de la distributivité de l'application (3).

On considère en $G$ l'opération binaire :

(8) $$x \underset{E}{\circ} y = E(x + y) - E(x) - E(y),$$

qui applique le produit cartésien $G \times G$ dans $G'$.

Si on note $a = F(x)$, conformément à la relation (3) l'égalité (2) devient :

(9) $$x = F(x) + E(x), \text{ pour chaque élément } x \text{ de } G.$$

En (9), $F(x)$ et $E(x)$ représentent des généralisations de la partie fractionnaire et, respectivement, de la partie entière d'un nombre réel (quand $G$ est le groupe additif des nombres réels, $G'$ le sousgroupe additif des nombres entiers et $\mathcal{A}$ est l'intervalle $[0, 1]$).

En utilisant les notations de la théorie des nombres, la relation (9) devient :

(10) $$x = \{x\} + [x] \text{ où } \{x\} = F(x),\ [x] = E(x).$$

(on peut appeler $\{x\}$ la partie résiduelle de $x$ par rapport au sousgroupe $G'$).

On constate immédiatement, si on généralise la terminologie des applications homomorphes, que :

(11) $$\operatorname{Ker} E = \mathcal{A},\ \operatorname{Ker} F = G',\ \operatorname{im} E = G',\ \operatorname{im} F = \mathcal{A} :$$

(12) $$E(x) = x, \text{ pour } x \in G' :$$

(13) $$F(x) = x, \text{ pour } x \in \mathcal{A}.$$

De (8) et (9) on obtient :

(14) $$F(x + y) - F(x) - F(y) = -z' = -(E(x + y) - E(x) - E(y)).$$

Cette relation conduit à une nouvelle opération interne en $G$ :

(15) $$x \underset{F}{\circ} y = F(x + y) - F(x) - F(y)$$



Dans ces conditions l'égalité (14) devient :

(16) $$x \underset{F}{\circ} y = -x \underset{E}{\circ} y.$$

Le groupe $G$ muni de ces opérations est nilpotent du troisième ordre, et, par suite, ces opérations sont associatives.

En effet, en notant $x \underset{E}{\circ} y = u$, il résulte :

(17) $$(x \underset{E}{\circ} y) \underset{E}{\circ} z = u \underset{E}{\circ} z = E(u + z) - E(u) - E(z).$$

Parce que

(18) $$z = c + z',\ c \in \mathcal{A},\ z' \in G',$$

on obtient :

$$u + z = E(x + y) - E(x) - E(y) + E(z) + c,$$

$$E(u + z) = E(x + y) - E(x) - E(y) + E(z).$$

et

(19) $$E(u + z) - E(u) - E(z) = E(x + y) - E(x) - E(y) - E(u) = 0.$$

La commutativité des opérations (8) et (15) est évidente. Quant aux lois de distributivité, on remarque que, $x$, $y$, $z$ étant trois éléments de $G$, il résulte :

(20) $$x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z', \text{ où } a, b, c, \in \mathcal{A},\ x', y', z' \in G',$$

d'où

(21) $$x \underset{E}{\circ} (y + z) = x \underset{E}{\circ} (b + c + y' + z') = x \underset{E}{\circ} (d + t' + y' + z') =$$
$$= E(a + x' + y' + z' + t' + d) - E(a + x') - E(d + t' + y' + z') =$$
$$= E(k + u' + x' + y' + z') - E(a + x') - E(d + t' + y' + z') = u',$$

où on a noté :

(22) $$b + c = d + t'$$

(23) $$a + d = k + u'. \qquad k, d \in \mathcal{A},\ t', u' \in G'.$$

L'égalité (21) conduit à :

(24) $$x \underset{E}{\circ} (y + z) = E(x + y + z) - E(x) - E(y + z) = u'.$$

On obtient encore :

(25) $$v' = x \underset{E}{\circ} y + x \underset{E}{\circ} z = E(x + y) + E(x + z) - 2E(x) - E(y) - E(z).$$

En utilisant la notation :

(26) $$\Delta(x, y, z) = u' - v',$$

on constate que :

(27) $$\Delta(x, y, z) = E(x + y + z) - E(x + y) - E(y + z) - E(x + z) + \\ + E(x) + E(y) + E(z).$$

La fonction $\Delta(x, y, z)$ est, évidemment, une fonction symétrique en $x$, $y$, $z$.

On peut considérer, donc, $G$ comme un anneau commutatif dans lequel la distributivité est remplacée par (27).

§ 3. Soit, de nouveau, $G$ un groupe abélien (additif) et $G'$ un sous-groupe de $G$, $\mathcal{A}$ un système des représentants (1) des classes du groupe $G/G'$.

De la même manière que dans le paragraphe antérieur, on peut définir l'application (3), où $x$, $x'$ ont la signification donnée par (2).

On considère la loi de composition

(28) $$x \underset{L}{\circ} y = E(x - y) - E(x) + E(y).$$

Immédiatement il résulte que :

(29) $$x \underset{L}{\circ} x = 0.$$

En utilisant l'hypothèse supplémentaire que si $a \in \mathcal{A}$ alors $-a \in \mathcal{A}$, la fonction $E$ a la propriété suivante :

(30) $$E(-x) = -E(x),$$

parce que de (2) il résulte :

(31) $$-x = -a - x' : \quad -a \in \mathcal{A}, \ -x' \in G',$$

donc $$E(-x) = -E(x).$$

L'égalité (30) exprime que l'opération (28) est anticommutative

(32) $$x \underset{L}{\circ} y = -y \underset{L}{\circ} x.$$

En conséquence, la première condition d'une algèbre de Lie est remplie.

Les relations qui suivent montrent que l'identité de Jacobi est, elle aussi, remplie, c'est-à-dire :

(33) $$(x \underset{L}{\circ} y) \underset{L}{\circ} z + (y \underset{L}{\circ} z) \underset{L}{\circ} x + (z \underset{L}{\circ} x) \underset{L}{\circ} y = 0.$$



En effet, si l'on note

(34) $$x \underset{L}{\circ} y = u,$$

il résulte :

(35) $$u \underset{L}{\circ} z = E(u - z) - E(u) + E(z).$$

En utilisant (18), on obtient :

(36) $$u - z = E(x - y) - E(x) + E(y) - E(z) - e,$$

d'où

(37) $$E(u - z) = E(x - y) - E(x) + E(y) - E(z).$$

Donc

(38) $$(x \underset{L}{\circ} y) \underset{L}{\circ} z = E(x - y) - E(x) + E(y) - E(z) - \\ - (E(x - y) - E(x) + E(y)) + E(z) = 0.$$

Par symétrie il résulte :

(39) $$(y \underset{L}{\circ} z) \underset{L}{\circ} x = (z \underset{L}{\circ} x) \underset{L}{\circ} y = 0,$$

donc l'égalité (33) est démontrée.

En conclusion on peut dire que la relation (28) a installé dans le groupe $G$, une nouvelle structure associative, anticommutative, mais non-distributive.

§ 4. On considère un espace linéaire $V$ et $V'$ un sousespace de $V$. Evidemment que $V'_+$ est un diviseur normal de $V_+$ (où $V_+$ signifie le groupe additif d'espace $V$).

Conformément aux considérations du premier paragraphe, on sait qu'on peut définir l'application :

(40) $$E : V \to V'$$

par $E(x) = x'$, si $x = a + x'$ où $a$ est un élément de (1) et $x'$ est un élément de $V'$.

L'opération (8), définie dans $V$, garde les propriétés, déjà mises en évidence.

En plus, l'opération externe de l'espace linéaire $V$ permet de définir une nouvelle loi de composition externe :

(41) $$\ast : \quad K \times V \to V',$$

par

(42) $$\lambda \ast x = E(\lambda x) - \lambda E(x), \ \lambda \in K, \ x \in V.$$

On remarque que :

1°. En notant par 1 l'unité du corps $K$ sur lequel est défini $V$, on a :

(43) $$1 \ast x = 0, \text{ pour chaque } x \text{ de } V.$$

2°. Soit $\lambda$ un élément de $K$ et $x$, $y$ des éléments de $V$, il résulte :

$$\lambda \ast (x + y) = E(\lambda(x + y)) - \lambda E(x + y) = (\lambda x) \circ (\lambda y) - \lambda(x \circ y) + \\ + \lambda \ast x + \lambda \ast y,$$

d'où

(44) $$\lambda \ast (x + y) - \lambda \ast x - \lambda \ast y = (\lambda x) \circ (\lambda y) - \lambda(x \circ y).$$

Cette dernière relation exprime l'écart de la distributivité de la loi (42).

3°. Quand $x = 0$, où par 0 on a noté l'unité dans le groupe additif de $V$, on obtient :

(45) $$\lambda \ast 0 = 0, \text{ pour chaque } \lambda \text{ de } K.$$

4°. Soit $x$ un élément de $V'$ et $\lambda$ un élément de $K$, on a :

$$E(\lambda x) = \lambda x,$$

donc

(46) $$\lambda \ast x = 0.$$

5°. Dans le cas où $x$ est un élément de $\mathcal{A}$, il résulte :

(47) $$\lambda \ast x = E(\lambda x) \text{ pour chaque } \lambda \text{ de } K.$$

6°. On constate que l'opération (42) n'est pas distributive. On obtient :

$$(\lambda + \mu) \ast x = E(\lambda x + \mu x) - (\lambda + \mu)E(x) = (\lambda x) \circ (\mu x) + \\ + \lambda \ast x + \mu \ast x,$$

c'est-à-dire :

(48) $$(\lambda + \mu) \ast x - \lambda \ast x - \mu \ast x = (\lambda x) \circ (\mu x).$$

7°. On constate, de la même manière, que :

(49) $$(\lambda\mu) \ast x - \lambda \ast (\mu x) - \lambda(\mu \ast x) = 0.$$

En particulier on considère le cas des espaces linéaires qui ont un nombre fini de dimensions :

On suppose que la dimension de $V$ est $n$ et que la dimension de $V'$ est $(n - 1)$. Il résulte que l'espace $V/V'$ a la dimension 1.

Soit, donc, $a + V'$ une base dans $V/V'$. On constate que chaque élément $x$ de $V/V'$, s'exprime d'une manière unique sous la forme :

(50) $$\bar{x} = \lambda(a + V') \text{ où } \lambda \in K.$$

Si $b$ est un élément de (1) ((1) étant construit pour le cas de l'espace $V$), il résulte qu'il existe un élément $\lambda$ de $K$ de sorte que :



(51) $$b \equiv \lambda a \pmod{V'}.$$

L'opération (8) permet de définir, dans les nouvelles conditions, une nouvelle application.

Soient $x$, $y$ des éléments de $V$ : en utilisant (2) il résulte :

(52) $$\begin{cases} x = b + x' \\ y = c + y' \\ x + y = d + z' \end{cases}, \quad x', y', z' \in V'.$$

Mais la relation (51) montre que :

(53) $$\begin{cases} b = \lambda a + b' \\ c = \mu a + c' \\ d = \nu a + d'. \end{cases} \text{ où } \lambda, \mu, \nu \in K \text{ et } b', c', d' \in V'.$$

Il résulte que :

(54) $$x \circ y = (\lambda + \mu - \nu)a + (b' + c' - d')$$

d'où la correspondance :

(55) $$f : V \to K$$

définie par $f(x) = \lambda$, parce que chaque élément $x$ de $V$ est répresenté d'une manière unique, conformément aux relations (52) et (53), sous la forme

(56) $$x = \lambda a + x'', \quad \text{où } x'' \in V'.$$

**Remarques. 1°.**

(57) $$\operatorname{Ker} f = V',$$

égalité qui résulte en démontrant les deux inclusions :

a) si $x \in V'$, il résulte $x = 0 + x = 0 . a + x$ où $0 \in K$, donc $f(x) = 0$ et $x \in \operatorname{Ker} f$.

b) si $x \in \operatorname{Ker} f$ on a $f(x) = 0$, donc $x = f(x) . a + x''$, où $x'' \in V'$, c'est-à dire $x = x'' \in V'$.

2°. En utilisant la relation (54) on a :

(58) $$f(x \circ y) = \lambda + \mu - \nu.$$

Mais, conformément à (56) il résulte :

(59) $$\begin{cases} x = \lambda a + x'' \\ y = \mu a + y'', \\ x + y = \nu a + z'' \end{cases} \text{ où } x'', y'', z'' \in V'.$$

donc

(60) $$f(x) = \lambda\,; \quad f(y) = \mu\,; \quad f(x + y) = \nu,$$

d'où

(61) $$f(x \circ y) = f(x) + f(y) - f(x + y).$$

Cette relation montre que, en général, $f$ n'est pas un homomorphisme de groupes additifs.

3°. A partir des relations (52) et (53) :

(62) $$x = \lambda a + b' + x',$$
$$E(x) = x',\ f(x) = \lambda.$$

où

Soit $\alpha$ un élément de $K$ ; on a :

(63) $$\alpha x = c + y' = \mu a + (c' + y'),$$

où $E(\alpha x) = y'$, $f(\alpha x) = \mu$.

En utilisant (53) et (62) il résulte :

$$\alpha \ast x = E(\alpha x) - \alpha E(x) = \alpha b - c = (\alpha\lambda - \mu)a + (\alpha b' - c')$$

d'où $f(\alpha \ast x) = \alpha\lambda - \mu$, c'est-à-dire :

(64) $$f(\alpha \ast x) = \alpha f(x) - f(\alpha x).$$

Si $\alpha = 1$, où par 1 on a noté l'unité de $K$, on obtient :

$$f(1 \ast x) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XI$_A$, fasc. 1 (1965), pp. 21—25.

2. Creangă I. — *Algèbres de Lie, non-distributives.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVII, fasc. 1 (1971), pp. 17—23.

## ASUPRA FUNCŢIEI „PARTEA ÎNTREAGĂ"

**Rezumat**

Această notă îşi propune o generalizare a funcţiei „partea întreagă", cunoscută în analiză şi teoria numerelor, la cazul unui grup abelian oarecare şi apoi la cazul unui spaţiu vectorial. Se introduc produse externe, binare, care satisfac axiomele unei algebre Lie cu excepţia axiomei distributivităţii. Se obţin, de asemenea, operatori care prezintă o abatere de la legea de aditivitate.

# SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉTACOMPACITÉ

PAR

OLGA COSTINESCU

L'étude des espaces topologiques dont les recouvrements ouverts satisfont à certaines conditions a été stimulée par différents problèmes parmi lesquels il faut mentionner, en premier lieu, celui de la métrisabilité. En 1944, Dieudonné introduit la notion de paracompacité, en généralisant la notion de compacité, et étudie, dans ce cadre plus général, quelques problèmes sur les structures uniformes et sur la métrisabilité (voir [2]) ; mais, même avant ce moment, il y a eu des travaux qui ont essayé de donner des conditions de métrisabilité dans le langage des recouvrements. Dans ce sens, il faut mentionner les résultats obtenus par Alexandroff, Uryson et Tukey. Plus tard (en 1948), A. H. Stone a démontré qu'un espace topologique est paracompact si et seulement s'il est complètement normal, et que chaque espace métrisable est paracompact. Puis, Thron a montré que chaque espace pseudo-métrisable est paracompact (voir [7], pp. 220—224). Il faut mentionner encore le fait que les espaces qui généralisent les espaces quasi-compacts (voir [1], p. 96) en satisfaisant à des conditions plus faibles que celle de Borel-Lebesgue, intervient aussi dans l'étude d'autres problèmes importants, par exemple dans la théorie de la dimension (voir [4], pp. 278—280).

Dans ce cadre, assez général, les espaces métacompacts, hypocompacts, dénombrablement métacompacts et dénombrablement hypocompacts (voir [3], pp. 229—230) représentent les cas particuliers les plus intéressants.

Dans ce qui suit, nous allons étudier certains problèmes sur les espaces métacompacts ; d'abord quelques définitions.

**Définition 1.** *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux familles de sous-ensembles de $X$ : $\mathcal{A}'$ est, par définition, un raffinement de la famille $\mathcal{A}$ si quel que soit $A' \in \mathcal{A}'$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de manière que $A' \subset A$.*

**Définition 2.** *On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles d'un ensemble $X$ est ponctuellement finie si chaque point de $X$ se trouve dans un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{A}$ au plus.*