d'équivalence donnent une infinité de topologies sur l'ensemble E des nombres irrationnels réels. Leur réunion et R^0_{11} et $\bigcap_{p_1 p_0} \tau_{R^0_{p_0 p_1}}$ est ausssi une topologie sur E.

BIBLIOGRAPHIE

1. Perron. O. — *Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale*, Sitzungsberichte d. Heidelberg. Akad. Wiss., 1921, Abh. 4 (1921), p. 55—70.
2. Negoescu N. — *Aproximarea asimetrică a numerelor iraționale prin raționale. Interpretarea geometrică*. An. şt. Univ. Iaşi, t. I (1955), p. 21—30.
3. Sudan G. — *Geometrizarea fracțiilor continue*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959, p. 39—45.

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ ŞI TOPOLOGII ASOCIATE CELOR MAI BUNE APROXIMĂRI ASIMETRICE

Rezumat

Folosind metoda lui O. Perron [1] s-a pus în evidență o funcție f definită prin formula (5). În primul rînd aici se demonstrează unele proprietăți ale funcției f, definite pe mulțimea E a numerelor iraționale, necesare pentru a introduce unele relații de echivalență pe E.

Pentru relațiile de echivalență cunoscute (R^0 şi R) pentru numere iraționale se dau opt proprietăți în propoziția 3. Observația 4 sugerează introducerea relațiilor de echivalență $\underline{R}^0$ şi $\underline{R}$ pentru care se extind cele opt proprietăți. Se pun aici în evidență deosebirile dintre cele două tipuri de relații de echivalență.

În § 3 se dau diagrame pentru relațiile introduse şi descompunerile canonice ale funcției f. Cu ajutorul laticelor de puncte, $\mathcal{L}^0_{p_0 p_1}(x)$ şi $\mathcal{L}^1_{p_0 p_1}(x)$, studiate în § 1, se introduc relațiile de echivalență $R^0_{p_0 p_1}$, $R_{p_0 p_1}$. Lucrarea se termină cu cîteva observații privitoare la topologiile pe E asociate relațiilor de echivalență R^0, R, $\underline{R}^0$, $\underline{R}$ şi $R^0_{p_0 p_1}$, $R_{p_0 p_1}$.

SUR UNE CONNEXION LINÉAIRE CANONIQUE DÉFINIE DANS UNE VARIÉTÉ DOUÉE D'UNE f-STRUCTURE

PAR

LUIS A. CORDERO

Sur une variété différentiable, douée d'une f-structure, on définit une connexion linéaire qui caractérise son intégrabilité, et on étudie le cas particulier où la variété est hor-chresmannienne, en rapportant cette connexion à la connexion canonique introduite par Vaisman, [5].

1. Soit V une variété différentiable, C^∞, dim $V = 2n + m$, douée d'une f-structure, c'est-à-dire, douée d'un champ f d'endomorphismes des espaces tangents (tenseur du type (1, 1)), tel que $f^3 + f = 0$.

Alors $Q = -f^2$, $P = 1 + f^2$ sont les projecteurs d'une structure presque-produit H sur V, donnée par $H = P - Q$; le fibré tangent a la décomposition $TV = \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Im} P = D \oplus D^1$, les fibrés de D et D^1 étant de dimensions $2n$ et m. On déduit $Qf = fQ = f$, $fP = Pf = 0$, d'où $\operatorname{Im} f \subseteq \subseteq \operatorname{Im} Q$ et si nous considérons $\psi = f|_D$, alors $\psi^2 = -I$, ce qui montre que ψ donne une structure complexe sur D et $\operatorname{Im} f = D$.

Nous noterons par $N(N_H)$ le tenseur de Nijenhuis de $f(H)$. Le tenseur N donne l'intégrabilité de f, D, D^1 et $f|_D$ dans la forme suivante : X, Y étant des champs de vecteurs arbitraires sur V.

1) D^1 est intégrable si et seulement si $N(PX, PY) = 0$,

2) D est intégrable si et seulement si $PN(fX, fY) = 0$.

Lorsque D est intégrable, $f|_D$ est une structure presque-complexe ; quand D et $f|_D$ sont simultanément intégrables, on dit que f est partiellement intégrable (3). Alors :

3) f est partiellement intégrable si et seulement si $N(fX, fY) = 0$,

4) f est intégrable si et seulement si $N(X, Y) = 0$.

Soit g une métrique riemannienne sur V, adaptée à la structure presque-produit, c'est-à-dire :

$$g(PX, QY) = 0$$

et soit ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Nous définissons une nouvelle connexion $\tilde{\nabla}$ sur V par :

$$\widetilde{\nabla}_X Y = Q\nabla_X QY - Q\nabla_{QY} PX + P\nabla_X PY - P\nabla_{PY} QX -$$
$$- 1/4\,\{Q(\nabla_{JY} f)\,QX + f(\nabla_{QY} f)QX + 2f(\nabla_{QX} f)QY\}$$

pour X, Y champs de vecteurs sur V quelconques.

La connexion $\widetilde{\nabla}$ vérifie les propriétés suivantes :

1) $\widetilde{\nabla} H = 0$,

2) $(\widetilde{\nabla}_{PX}\, g)\,(PY,\ PZ) = 0$.

La torsion T de $\widetilde{\nabla}$ est :

$$T(X,\ Y) = 1/8\,(QN(QX,\ QY) - N_H(X,\ Y))$$

d'où :

3) $PT(X,\ PY) = 0$,

4) $QT(fX,\ QY) = QT(X, fQY)$,

5) $\widetilde{\nabla}_{QX}(fQY) = f(\widetilde{\nabla}_{QX} QY)$.

Théorème 1. *On vérifie :*

a) $PT(X,\ Y) = 0$ *si et seulement si* D *est intégrable,*

b) $QT(PX,\ PY) = 0$ *si et seulement si* D^1 *est intégrable,*

c) *si* D *est intégrable,* $QT(QX,\ QY) = 0$ *si et seulement si* $f|_D$ *est intégrable,*

d) $\widetilde{\nabla}$ *est symétrique si et seulement si* D, D^1 *et* $f|_D$ *sont simultanément intégrables,*

e) f *est partiellement intégrable si et seulement si* $PT(X,\ Y) = QT(QX,\ QY)$.

Démonstration : a) $8PT(X,\ Y) = -PN_H(X,\ Y) = -P\,\{QX,\ QY\}$

b) $8QT(PX,\ PY) = -QN_H(PX,\ PY) = -Q\,\{PX,\ PY\}$

c) $8QT(QX\ \ QY) = QN(QX,\ QY)$; alors, puisque $N(X,\ Y) = PN(X,\ Y) + QN(X,\ Y)$ et $N(fX, fY) = 0$ si et seulement si $N(QX,\ QY) = 0$, on déduit c)

d) Si D, D' et $f|_D$ sont simultanément intégrables, il suit $N_H(X,\ Y) = N(QX,\ QY) = 0$, alors $\widetilde{\nabla}$ est symétrique. Réciproquement, $\widetilde{\nabla}$ étant symétrique, de a), b) et c) on déduit que D, D' et $f|_D$ sont simultanément intégrables.

e) est la conséquence immédiate de a) et c) .

Proposition 1. $\widetilde{\nabla} f = 0$ *si et seulement si* $N(PX, fY) = 0$.

Démonstration : Puisque $\widetilde{\nabla} f = 0$ si et seulement si

$$\widetilde{\nabla}_X(fY) = f(\widetilde{\nabla}_X Y),$$

on déduit que $(\widetilde{\nabla}_{QX} f) = 0$ en employant les propriétés 1) et 5) de $\widetilde{\nabla}$. De plus, $\widetilde{\nabla}_{PX}(fPY) = f(\widetilde{\nabla}_{PX} PY)$ trivialement, donc $\widetilde{\nabla}_{PX} f = 0$ si et seulement si

$$f(\widetilde{\nabla}_{PX} QY) = \widetilde{\nabla}_{PX} fY.$$

Mais

$$\widetilde{\nabla}_{PX} fY - f(\widetilde{\nabla}_{PX} QY) = -N(PX, fY)$$

d'où la conclusion.

Théorème 2. *f est intégrable si et seulement si $\widetilde{\nabla}$ est symétrique et $\widetilde{\nabla} f = 0$.*

Démonstration : Si f est intégrable, $N = 0$, donc $N_H = 0$ et $N(PX,\ fY) = 0$, et, par conséquent, $T = 0$ et $\widetilde{\nabla} f = 0$.

Réciproquement, $\widetilde{\nabla}$ symétrique implique que D, D^1 et $f|_D$ sont simultanément intégrables, donc $N(QX,\ QY) = N(PX,\ PY) = 0$; $\widetilde{\nabla} f = 0$ implique $N(PX,\ QY) = 0$. Donc $N = 0$.

2. La variété V est dite hor-chresmannienne si g vérifie

$$g(X, fX) = 0.$$

On peut introduire une forme fondamentale Ω par :

$$\Omega(X,\ Y) = g(QX, fY).$$

La connexion $\widetilde{\nabla}$ coïncide sur la variété hor-chresmannienne V avec la connexion canonique introduite par Vaisman [5] si, et seulement si

$$(\widetilde{\nabla}_{QX}\, g)\,(QY,\ QZ) = 0$$

pour X, Y, Z champs de vecteurs quelconques sur V.

D'ailleurs, on trouve [2] :

$$2g((\nabla_{QX} f)\,Y, Z) = \Omega(QX, N(Y, Z)) - d\Omega(QX,\ Y, Z) + d\Omega\,(QX, fY,\ fZ) +$$
$$+ g(\{QX, fY\},\ PZ) + g(\{fZ,\ QX\},\ PY).$$

Alors on trouve, après des calculs

$$4(\widetilde{\nabla}_{QX} g)\,(QY,\ QZ) = d\Omega(QX, fY,\ QZ) - d\Omega(QX,\ QY, fZ),$$

c'est-à-dire

$$(\widetilde{\nabla}_{QX} g)\,(QY,\ QZ) = 0 \Leftrightarrow d\Omega(QX, fY,\ QZ) = d\Omega(QX,\ QY, fZ) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow d\Omega(QX, fY, fZ) = -\,d\Omega(QX,\ QY,\ QZ).$$

On trouve alors la

Proposition 2. *Chacune des propriétés suivantes est une condition suffisante pour que $\widetilde{\nabla}$ soit la connexion canonique définie par Vaisman :*

a) $d\Omega|_D = 0$,

b) *V est sym-intégrable* [2]

c) *D est intégrable et $g|_D$ est kählerienne.*

Démonstration : On déduit c) compte tenu de l'égalité

$$d\Omega(QX, fY, fZ) - d\Omega(QX,\ QY,\ QZ) = 2g((\nabla_{QX} f)QY,\ QZ) -$$
$$- \Omega(QX,\ N(QY,\ QZ)).$$

Alors

$$(\tilde{\nabla}_{QX} g)(QY, QZ) = 0 \Leftrightarrow 2d\Omega(QX, QY, QZ) = \Omega(QX, N(QY, QZ)) - $$
$$- 2g((\nabla_{QX} f) QY, QZ)$$

et cette dernière expression met en évidence que a) n'est pas nécessaire. On trouve encore [2] :

$$(\tilde{\nabla}_X \Omega)(Y, Z) = (\tilde{\nabla}_X g)(Y, fZ) + g(Y, (\tilde{\nabla}_X f)Z),$$

donc, en particulier

$$(\tilde{\nabla}_{QX} \Omega)(QY, QZ) = (\tilde{\nabla}_{QX} g)(QY, fZ).$$

d'où, on trouve la

Proposition 3. $(\tilde{\nabla}_{QX} g)(QY, QZ) = 0$ *si, et seulement si* $(\tilde{\nabla}_{QX} \Omega)(QY, QZ) = 0$.

Proposition 4. *La condition a) de la proposition 2 est nécessaire si f est partiellement intégrable.*

Démonstration : En effet, en employant la formule (6.1) de [2] pour la connexion $\tilde{\nabla}$, on déduit :

$$d\Omega(QX, QY, QZ) = \sum_{\text{Cyc}} \{(\nabla_{QX} \Omega)(QY, QZ) + \Omega(T(QX, QY), QZ)\}$$

et si $(\tilde{\nabla}_{QX} g)(QY, QZ) = 0$ on a $(\tilde{\nabla}_{QX} \Omega)(QY, QZ) = 0$, donc

$$d\Omega(QX, QY, QZ) = \sum_{\text{Cyc}} \Omega(T(QX, QY), QZ);$$

mais f partiellement intégrable implique $QT(QX, QY) = 0$, alors

$$d\Omega(QX, QY, QZ) = 0.$$

Corollaire 1. *Si f est partiellement intégrable, $\tilde{\nabla}$ est la connexion définie par Vaisman si et seulement si $g|_D$ est kählerienne.*

Dans ce cas $Q(\nabla f) = 0$ et on trouve

$$\tilde{\nabla}_X Y = Q\nabla_X QY - Q\nabla_{QY} PX + P\nabla_X PY - P\nabla_{PY} QX.$$

Il résulte que la torsion T est

$$T(X, Y) = - Q\{PX, PY\}$$

et $T = 0$ donne la condition d'intégrabilité de D^1. De plus, $\tilde{\nabla}$ coïncide avec la seconde connexion définie dans [4] et [6].

BIBLIOGRAPHIE

1. De Barros C. M. — *Variétés hor-symplectiques*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 259 (1964), p. 1 291—1 294.
2. De Barros C. M. — *Variétés presque hor-complexes*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 260, (1965), p. 1 543—1 546.
3. Ishihara S. and Yano K. — *On integrability of a structure f satisfying $f^3 + f = 0$*. Quart. J. Math. Oxford, 15, (1964), p. 217—222.
4. Vaisman I. — *Variétés riemanniennes feuilletées*, Czechoslovak Math. J., 21 (96), (1971), p. 46—75.
5. Vaisman I. — *Connexions remarquables sur les variétés hor-ehresmanniennes*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A, (1971), p. 1 253—1 256.
6. Vidal E. — *Sur les variétés à structure de presque-produit complexe avec métrique presque-feuilletée*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A, (1971), p. 1 152 — 1 155

Département de Géometrie et Topologie
Santiago de Compostela
Espagne

ASUPRA UNEI CONEXIUNI LINEARE CANONICE DEFINITE PE O VARIETATE DOTATĂ CU O f-STRUCTURĂ

Rezumat

Pe o varietate diferențiabilă dotată cu o f-structură, se definește o conexiune lineară, care caracterizează integrabilitatea acestuia și se studiază cazul particular cînd varietatea este hor-ehresmanniană, raportînd această conexiune canonică introdusă de Vaisman [5].