SUR LES GROUPES DE LIE-BANACH

PAR

A. BEJANCU

En utilisant la méthode des formes différentielles banachiques, nous démontrons le premier et le deuxième théorème de Sophus Lie pour un groupe de Lie-Banach quelconque. À l'aide de ces deux théorèmes nous obtenons le théorème fondamental pour les sous-groupes d'un groupe de Lie-Banach. Pour un groupe de Lie-Banach modelé d'un espace de Banach réflexif, qui admet des bases topologiques dénombrables, ces théorèmes ont été obtenus par Gh. Gheorghiev dans [3].

1. Soient $\mathbf{E}$ un espace de Banach réel, U un ouvert de $\mathbf{E}$ et $\omega : U \to GL(\mathbf{E})$ un champ de corepères de classe C^∞ sur U. A. D. Michal a démontré dans ([5], p. 22) le théorème suivante :

Théorème 1. *L'équation différentielle*

$$\frac{dy}{dx} = \omega^{-1}(y) \circ \omega(x) \tag{1}$$

est complètement intégrable, si et seulement si, l'application

$$C : U \times \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

$$C(x, u, v) = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, \omega^{-1}(x, u))(\omega^{-1}(x, v)) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, \omega^{-1}(x, v))(\omega^{-1}(x, u)) \tag{2}$$

est indépendante de la première variable.

Soient M une variété différentielle de classe C^∞ modelée par l'espace de Banach $\mathbf{E}$ et (V, φ) une carte locale dans $e \in M$.

Théorème 2. *Un champ de corepères de classe C^∞, $\omega : U \to GL(\mathbf{E})$ $U \subset V$, définit une structure de groupe de Lie-Banach local sur un voisinage de e, si et seulement si, l'équation différentielle* (1) *est complètement intégrable.*

Démonstration. Si ω est une forme linéaire banachique invariante d'un groupe de Lie-Banach local G, nous avons démontré dans [1] que

l'application (2) est le tenseur de structure pour G et ne dépend pas de x. Donc l'équation (1) est complètement intégrable, compte tenu du théorème 1.

Réciproquement, si l'équation (1) est complètement intégrable, soit L_x la solution ayant les données initiales $(0, x)$. Nous définissons une lois de composition partielle sur U, par la formule

$$x \circ y = L_x(y).$$

Soient $x, y \in U$ tels qu'ils existe $x \circ y$. Alors, $h = L_{x \circ y}$ est une solution de (1) telle que $L_{x \circ y}(0) = x \circ y$ et on a :

$$D_z(L_x \circ L_y) = D_{y \circ z} L_x \circ D_z L_y = \omega^{-1}((L_x \circ L_y)(z)) \circ \omega(L_y(z)) \circ \omega^{-1}(L_y(z)) \circ \omega(z) = \\ = \omega^{-1}((L_x \circ L_y)(z)) \circ \omega(z).$$

Donc, $g = L_x \circ L_y$ est une solution de l'équation (1) et $g(0) = x \circ y$. Alors, on a :

$$L_{x \circ y} = L_x \circ L_y,$$

c'est-à-dire la loi de composition est associative. On désigne par $z = \pi(x, y)$ la solution qui prend la valeur y pour $0 \in U$. On sait ([2], p. 107) que si nous faisons varier y, l'application π est de classe C^∞, et

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial y}\right)(x, y) \in GL(\mathbf{E}),$$

ce qui permet de tirer $y = \psi(x, z)$, en utilisant le théorème des fonctions implicites, avec ψ de classe C^∞. Nous allons noter par $U_1 \times U_1$ le domain de ψ. Alors, pour tout $x \in U_1$ on désigne $\bar{x} = \psi(x, 0)$ et on a :

$$\bar{x} \circ x = L_x(\bar{x}) = \pi(x, \bar{x}) = \pi(x, \psi(x, 0)) = 0.$$

Il est évident que $x \circ 0 = x$ parce que L_x est une solution avec les données initiales $(0, x)$. L'identité est une solution de (1) et donc

$$0 \circ x = L_0(x) = x.$$

Donc U est un groupe de Lie-Banach local. Le champ de corepères qui définit ce groupe est invariant à gauche :

$$D_x L_a = \omega^{-1}(L_a(x)) \circ \omega(x) \quad \text{ou :} \quad \omega(a \cdot x) \circ D_x L_a = \omega(x).$$

Le théorème 2 généralise le premier théorème de Sophus Lie bien connu pour un groupe de Lie.

Théorème 3. *L'équation différentielle* (1) *est complètement intégrable, si et seulement si, il existe une application*

$$[\,,\,] : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \to \mathbf{E}$$

bilinéaire, continue et alternée, tel que :

$$(3) \qquad \langle d\omega(x), u \times v \rangle = -[\langle \omega(x), u \rangle, \langle \omega(x), v \rangle] \; \forall x \in U, \; u, v \in \mathbf{E}.$$

Démonstration. Supposons que l'équation (1) est complètement intégrable ; le théorème 2 nous assure qu'il existe un groupe de Lie-Banach local G et ω est invariante sur G. Dans [1] nous avons obtenu les équations de structure de G sous la forme

$$\langle d\omega(x), \; \omega^{-1}(x, u) \times \omega^{-1}(x, v) \rangle = C(u, v).$$

Donc, nous allons définir $[\,,\,] = -C$ et alors (3) est évidente.

Réciproquement, si on suppose (3), alors :

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, u)(v) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, v)(u) = -[\langle \omega(x), u \rangle, \langle \omega(x), v \rangle].$$

Nous remplaçons u par $\omega^{-1}(x, u)$ et v par $\omega^{-1}(x, v)$ et nous obtenons

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, \omega^{-1}(x, u))(\omega^{-1}(x, v)) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)(x, \omega^{-1}(x, v))(\omega^{-1}(x, u)) = -[u, v].$$

Donc, l'application (2) est indépendante de x et alors du théorème 1, vol suit que l'équation (1) est complètement intégrable.

Les théorèmes 2 et 3 nous donnent le deuxième théorème de Lie pour les groupes de Lie-Banach :

Théorème 4. *Un champ de corepères de classe C^∞, $\omega : U \to GL(\mathbf{E})$ $U \subset V$, définit une structure de groupe de Lie-Banach local sur U si et seulement si ω vérifie la relation (3).*

2. Nous supposons maintenant que $\mathbf{E}$ a une structure d'algèbre de Lie et $\mathbf{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $\mathbf{E}$. On sait [4] qu'il existe un groupe de Lie-Banach local U avec l'algèbre de Lie $\mathbf{E}$. On désigne par $\omega : U \to GL(\mathbf{E})$ la forme linéaire banachique invariante sur U [1].

Théorème 5. *$\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie dans $\mathbf{E}$, si et seulement si, il existe un ouvert $V \subset \mathbf{F}$ et une forme linéaire banachique $\theta : V \to GL(\mathbf{F})$ de classe C^1 telle que l'équation :*

$$(4) \qquad \frac{dy}{dx} = \omega^{-1}(y) \circ \theta(x)$$

est complètement intégrable.

Démonstration. Supposons que (4) est complètement intégrable. On a :

$$\omega^{-1}\left(y, \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, u)(v)\right) + \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y, \theta(x, u)(\omega^{-1}(y, \theta(x, v))) = \\ = \omega^{-1}\left(y, \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, v)(u)\right) + \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y, \theta(x, v))(\omega^{-1}(y, \theta(x, u)))$$

pour tout $x \in V$, $y \in U$ et $u, v \in \mathbf{F}$. Mais $\omega(y) \in GL(\mathbf{E})$, donc :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x,u)(v) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x,v)(u) = \omega\left(y, \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y, \theta(x,v))(\omega^{-1}(y, \theta(x,u)))\right) -$$

$$- \omega\left(y, \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y, \theta(x,u))(\omega^{-1}(y, \theta(x,v)))\right).$$

Dans cette dernière relation remplaçons u par $\theta^{-1}(x, u)$ et v par $\theta^{-1}(x, v)$. Alors :

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,u))(\theta^{-1}(x,v)) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,v))(\theta^{-1}(x,u)) =$$

$$= \omega\left(y, \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y,v)(\omega^{-1}(y,u))\right) - \omega\left(y, \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y,u)(\omega^{-1}(y,v))\right).$$

On calcule la différentielle partielle de Fréchet de la relation

$$\omega(y, \omega^{-1}(y, u)) = u$$

par rapport à y, en direction $\omega^{-1}(y, v)$ et on a :

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)(y, \omega^{-1}(y,u))(\omega^{-1}(y,v)) = -\omega\left(y, \left(\frac{\partial \omega^{-1}}{\partial y}\right)(y,u)(\omega^{-1}(y,v))\right).$$

Compte tenu de cette relation dans (5) on a :

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,u))(\theta^{-1}(x,v)) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,v))(\theta^{-1}(x,u)) =$$

$$= \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)(y, \omega^{-1}(y,u))(\omega^{-1}(y,v)) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)(y, \omega^{-1}(y,v))(\omega^{-1}(y,u)).$$

Si on désigne par C_U le tenseur de structure de U, pour tout $u, v \in \mathbf{F}$ on a:

$$(6) \qquad C_U(u,v) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,u))(\theta^{-1}(x,v)) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)(x, \theta^{-1}(x,v))(\theta^{-1}(x,u)) \in \mathbf{F}$$

c'est-à-dire $\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie.

Réciproquement, si $\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie, alors soit H le groupe de Lie-Banach local ayant $\mathbf{F}$ comme algèbre de Lie et $\theta : V \subset H \to GL(\mathbf{F})$ la forme linéaire banachique invariante sur H. Si on désigne par C_H le tenseur de structure de H, on a :

$$(7) \qquad C_H(u,v) = C_U(u,v) \qquad \forall u, v \in \mathbf{F}.$$

En utilisant l'expression locale pour le tenseur de structure pour un groupe de Lie-Banach, nous obtenons que (7) implique (6). La condition d'intégrabilité de l'équation (1) est alors satisfaite puisque toutes les étapes de la démonstration directe sont réversibles q. e. d.

Nous nous proposons maintenant d'obtenir un théorème qui caractérise les sous-groupes de Lie-Banach à l'aide du théorème 5. Soient G un groupe de Lie-Banach modelé par l'espace de Banach $\mathbf{E}$ ω sa forme invariante à gauche et (U, φ) une carte locale dans l'unité $e \in G$. $\mathbf{F}$ est un sous-espace fermé dans $\mathbf{E}$.

Théorème 6 *Une forme linéaire banachique de classe C^1*

$$\theta : U \to GL(\mathbf{F})$$

envariante à gauche sur G détermine un sous-groupe de Lie-Banach H de G, ayant θ comme forme banachique invariante à gauche, si et seulement si, l'équation différentielle

$$(8) \qquad \frac{dy}{dx} = \omega^{-1}(y) \circ \theta(x)$$

st complètement intégrable.

Démonstration. Supposons que θ définit un sous-groupe H de G. Alors $\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathbf{E}$ et en vertu du théorème 5, l'équation (8) est complètement intégrable.

Réciproquement, si (8) est complètement intégrable, alors $\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathbf{E}$. Soit H le sous-groupe de Lie de G [4] ayant $\mathbf{F}$ comme algèbre de Lie et donc θ est invariante à gauche sur H q.e.d.

Soient $L(\mathbf{E})$ l'algèbre de Lie-Banach des applications linéaires continues de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{E}$ et $\mathbf{F}$ un sous-espace vectoriel fermé dans $L(\mathbf{E})$.

Corollaire 1. *$\mathbf{F}$ est une sous-algèbre de Lie dans $L(\mathbf{E})$, si et seulement si, il existe un ouvert $V \subset \mathbf{F}$ et une forme linéaire banachique $\theta : V \to GL(\mathbf{F}$, de classe C^1, telle que l'équation différentielle :*

$$(9) \qquad \frac{dy}{dx} = y \circ \theta(x) \qquad (x, y) \in V \times GL(\mathbf{E})$$

soit complètement intégrable.

En effet, sur $GL(\mathbf{E})$ on a :

$$\omega^{-1}(y) = D_e L_y = L_y.$$

Ainsi, le corollaire résulte du théorème 5.

Corollaire 2. *Une forme linéaire banachique, de classe C^∞*

$$\theta : V \to GL(\mathbf{F})$$

invariante à gauche sur $GL(\mathbf{E})$ *définit un sous-groupe de Lie* $H \subset GL(\mathbf{E})$ *ayant* 0 *comme forme banachique invariante à gauche, si et seulement si, l'équation* (9) *est complètement intégrable.*

La démonstration résulte du théorème 6 et du corollaire 1.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bejancu A. — *Formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach et groupes de Lie-Banach*, An. şt. Univ. Iaşi, t. XVIII, fasc. 1, (1972), 125—137.
2. Cartan H. — *Formes différentielles*, Hermann, Paris, 1967.
3. Gheorghiev Gh. — *Sur les groupes de Lie-Banach*, Rev. Roum. de Math. pures et appl., 15, nr. 10 (1970), p. 1 611—1 623.
4. Maissen B. — *Lie-Gruppen mit Banachräumen als Parameterräume*, Acta. Math., 108 (1962), 229—269.
5. Michal A. D. — *Le calcul différentiel dans les espaces de Banach*, Gauthier-Villars, Paris, 1964.

ASUPRA GRUPURILOR LIE-BANACH

Rezumat

Prin metoda formelor diferenţiale banachice, dezvoltată în [1], se obţin primele două teoreme ale lui Lie pentru grupuri Lie-Banach. Cu ajutorul lor se obţine teorema fundamentală relativ la subgrupurile unu grup Lie-Banach.

ON SOME HOMOTOPY LIFTING AND EXTENSION PROPERTIES FOR SEQUENCES OF CONTINUOUS MAPS

BY

I. POP

Presented at the National Conference of Geometry and Topology, Jassy, December 19 – 23, 1971

1. The main aim of this paper is to define the concept of fH-sequence by analogy with that one of f-sequence [1] and to give necessary and sufficient conditions for a sequence $X_1 \xrightarrow{p_1} X_2 \xrightarrow{p_2} X_3$ to be a fH-sequence.

The covering sequences are introduced and as application we prove that the connected locally path connected spaces are the objects of a category with covering projections as morphisms.

The dual notion, is also considered, namely the f'-sequence, which extends the notion of cofibration. A necessary and sufficient condition that a sequence be f'-sequence is given and a theorem of duality is proved.

2. A sequence of topological spaces and continuous maps

$$X_1 \xrightarrow{p_1} X_2 \xrightarrow{p_2} X_3 \tag{1}$$

is called to be a fH-sequence, if for every topological space Y, every continuous map $f : Y \to X_1$ and every homotopy, $F : Y \times I \to X_2$ for $p_1 \circ f$ there exists a homotopy $G : Y \times I \to X_1$ for f, such that $p_2 p_1 G = p_2 F$.

Remarks 1. The map $p : X \to Y$ is a Hurewicz fiber space if and only if the sequence $X \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{1_Y} Y$ and $X \xrightarrow{1_X} X \xrightarrow{p} Y$ are fH-sequences.

2. If p_1 or $p_2 \circ p_1$ in (1) is a Hurewicz fiber space then (1) is a fH-sequence.

A sequence

$$X_1 \xrightarrow{p_1} X_2 \xrightarrow{p_2} X_3 \to \ldots\ldots X_i \xrightarrow{p_i} X_{i+1} \xrightarrow{p_{i+1}} X_{i+2} \to \ldots\ldots \tag{2}$$

is called a fH-sequence if $X_i \xrightarrow{p_i} X_{i+1} \xrightarrow{p_{i+1}} X_{i+2}$ is fH-sequence for $i \geqslant 1$.