Se definesc șirurile de acoperire și ca o aplicație se arată că spațiile conexe și local liniar conexe formează o categorie ale cărei morfisme sînt proiecții de acoperire.

Se consideră noțiunea duală aceleia de fH-șir și anume f'-șir, care generalizează noțiunea de cofibrare. Se dau condiții necesare și suficiente ca un șir să fie f'-șir și se demonstrează o teoremă de dualitate.

SUR LA THÉORIE GLOBALE DES CONNEXIONS PROJECTIVES. LE GROUPE D'HOLONOMIE

PAR

GH. MURĂRESCU

1. Introduction. Soit $P(M,G)$ un espace fibré principal qui a M comme base et G comme groupe structural et $E(M, G, P(M, G))$ l'espace fibré associé, soudé à la base M[2], [4]. Soit $P(M, H)$, $H \subset G$, l'espace fibré principal réduit, dont l'existence est assurée par l'existence de la soudure. Sur $P(M, H)$ on définit une connexion Cartan par une 1-forme ω donnée sur $P(M, H)$, avec des valeurs dans g — l'algèbre de Lie de G — et satisfaisant aux conditions :

a) $\omega(A^*) = A$ pour chaque $A \in h$ — l'algèbre de Lie de $H \subset G$;

b) $R_a^* \omega = \mathrm{ad}\,(a^{-1})\omega$ pour chaque $a \in H$;

c) $\omega(X) = 0$ implique $x = 0$ sur $P(M, H)$.

2. Les connexions projectives. Soit $G = PL(n, R)$ le groupe projectif qui actionne sur P^n (l'espace projectif) par $y^i = (a^i + a^i_j x^j)/(1 + a_j x^j)$ et H le sous-groupe (d'isotropie pour $O(0, \ldots, 0) \in P^n$) défini localement par $a^i = 0$ [1]. Nous avons défini [7] une connexion projective sur $P = P(M, H)$ comme une connexion Cartan. Cette connexion est donnée par la 1-forme $\omega = (\omega^i, \omega^i_j, \omega_j)$ ayant des valeurs dans $g = pl(n, R) = R^n + gl(n, R) + R^{*n}$.

Les équations de structure pour la connexion projective sont [4], [7] :

$$
\begin{aligned}
& d\omega^i + \omega^i_k \wedge \omega^k = \Omega^i, \\
(1) \qquad & d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \omega^i \wedge \omega_j + \delta^i_j\, \omega^k \wedge \omega_k = \Omega^i_j, \\
& d\omega_j + \omega_k \wedge \omega^j_k = \Omega_j,
\end{aligned}
$$

$\Omega' = (\Omega^i)$ étant la forme de torsion et $\Omega'' = (\Omega^i_j, \Omega_j)$ la forme de courbure.

[1]) Pour la théorie locale des espaces a connexion projective, voir [1].

Si $\sigma : U \to P$ est une section sur P, nous avons :

(⁂) $\sigma^*\omega = {}_v\omega = {}_v\Gamma\, dx$ (écriture abrégée, sans des indices).

Nous avons obtenu [7] les relations :

$$\omega^i = \tilde{a}^i_k\, {}_v\omega^k, \quad (\tilde{a}^i_k a^k_j = \delta^i_j).$$

$$(2) \qquad \omega^i_j = \tilde{a}^i_k\, {}_i\omega^k_h\, a^h_j + \tilde{a}^i_k\, {}_i\omega^l\, a_j + \delta^i_j\, \tilde{a}^k_h\, {}_v\omega^h\, a_k + \tilde{a}^i_k\, da^k_j,$$

$$\omega_j = {}_i\omega_k\, a^k_j - a_k\, \tilde{a}^h_k\, {}_v\omega^k_l\, a^l_j - a_h\, \tilde{a}^h_k\, {}_v\omega^k\, a_j - a_h\, \tilde{a}^h_k\, da^k_j + da_j$$

et la règle selon laquelle se transforment les coefficients de la connexion projective ${}_v\Gamma = ({}_v\Gamma^i_k, {}_v\Gamma^i_{jk}, {}_v\Gamma_{jk})$.

Les formes $\Omega = (\Omega^i, \Omega^i_j, \Omega_j)$ ont les expressions [7] :

$$(3) \qquad \Omega^i = \tfrac{1}{2} R^i_{kl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \quad \Omega^i_j = \tfrac{1}{2} R^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \quad \Omega_j = \tfrac{1}{2} R_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l.$$

Les formes ${}_v\omega$ sont linéaires en dx^k $(k = 1, \ldots, n)$. D'après (2), nous avons :

— les formes ω^i sont linéaires en dx^k ;
— les formes ω^i_j sont linéaires en dx^k et da^k_j ;
— les formes ω_j sont linéaires en dx^k, da^k_j, da^j.

Nous pouvons écrire les relations (2) :

$$\omega^i = \tilde{a}^i_k\, {}_v\omega^k,$$

$$(2') \qquad \omega^i_j = \tilde{a}^i_k\, {}_v\omega^k_h\, a^h_j + a_j\, \omega^i + \delta^i_j\, a_k\, \omega^k + \tilde{a}^i_k\, da^k_j,$$

$$\omega_j = {}_i\omega_k\, a^k_j - a_k\, \omega^k_j + a_j\, a_k\, \omega^k + da_j.$$

En notant $\omega' = (\omega^i)$ et $\omega'' = (\omega^i_j, \omega_j)$ (cette séparation est géométrique), nous avons la

Définition 1. *Le champ X de vecteurs tangents à P s'appelle vertical si $\omega'(X) = 0$: le champ X s'appelle horizontal si $\omega''(X) = 0$.*

Théorème 1. *Si X est horizontal sur P alors $(R_a)_* X$ est aussi horizontal.*

Démonstration. Nous avons pour $a \in H$,

$$[\mathrm{ad}(a^{-1})\, \omega]^i = \tilde{a}^i_k\, \omega^k,$$

$$(4) \qquad [\mathrm{ad}(a^{-1})\, \omega]^i_j = \tilde{a}^i_k\, \omega^k_h\, a^h_j + \tilde{a}^i_k\, \omega^k\, a_j + \delta^i_j\, a^k_h\, \omega^h\, a_k,$$

$$[\mathrm{ad}(a^{-1})\, \omega]_j = \omega_k\, a^k_j - a_h\, \tilde{a}^h_k\, \omega^k_l\, a^l_j - a_h\, \tilde{a}^h_k\, \omega^k\, a_j.$$

D'après la définition d'une connexion Cartan, on déduit :

$$R^*_a\, (\omega^i_j, \omega_j) = \mathrm{ad}\, (a^{-1})(\omega^i_j, \omega_j)$$

pour chaque $a \in H$, où $\mathrm{ad}(a^{-1}) : h = gl(n, R) + R^{*n} \to h$ est l'application : $pl(n, R)/R^n \to pl(n, R)/R^n$, induite par $\mathrm{ad} : g = pl\,(n, R) \to g$.

Compte tenu de (4), le théorème résulte.

La connexion projective étant donnée, pour chaque $u \in P$, nous avons : $T_u = T_{u(v)} + T_{u(H)}$, où $T_{u(v)}$ est le sous-espace tangent à la fibre locale et $T_{u(H)}$ est le sous-espace horizontal (qui est isomorphe avec T_x, $x = \pi(u)$).

Définition 2. *Une forme différentiable $\tilde{\omega}$ définie sur P s'appelle horizontale si $\tilde{\omega}\,(X) = 0$ pour X vertical et s'appelle verticale si $\tilde{\omega}\,(X) = 0$ pour X horizontal.*

Tout de suite on constate que ω' est une 1-forme horizontale et Ω' est une 2-forme horizontale pendant que ω'' est une 1-forme verticale et Ω'' este une 2-forme verticale.

Théorème 2. *Dans la base naturelle $(\partial/\partial x^m, \partial/\partial a^i_j, \partial/\partial a_j)$ dans l'espace tangent T_u en $u \in P$, le champ horizontal X_m au-dessus du champ $\partial/\partial x^m$ $(m = 1, \ldots, n)$ a l'expression :*

$$(5) \qquad X_m = \partial/\partial x^m - (a^h_j\, {}_v\Gamma^k_{hm} + a_j\, {}_v\Gamma^k_m + a^k_j\, \tilde{a}^h_p\, a_h\, {}_i\Gamma^p_m)(\partial/\partial a^k_j) - \\ -({}_v\Gamma_{km}\, a^k_j + a_j\, a_k\, a^k_l\, {}_v\Gamma^l_m)\,((\partial/\partial a_j).$$

Démonstration. D'après (2) et (⁂) nous avons :

$$\omega^i = \tilde{a}^i_k\, {}_v\Gamma^k_m\, dx^m,$$

$$(2'') \qquad \omega^i_j = \tilde{a}^i_k\, (a^h_j\, {}_v\Gamma^k_{hm} + a_j\, {}_v\Gamma^k_m + a^k_j\, \tilde{a}^h_p\, a_h \cdot {}_v\Gamma^p_m)\, dx^m + \tilde{a}^i_k\, da^k_j,$$

$$\omega_j = a_i\, \omega^i_j + ({}_v\Gamma_{km}\, a^k_j + a_j\, a_k\, a^k_l\, {}_v\Gamma^l_m)\, dx^m + da_j.$$

Si $X \in T_u$, alors $X = X^m\, (\partial/\partial x^m) + X^i_j\, (\partial/\partial a^i_j) + X^j\, (\partial/\partial a_j)$.

D'après (5) et (2'') on constate que $\omega^i_j\, (X_m) = 0$, $\omega_j\, (X_m) = 0$, c'est-à-dire $\omega''(X_m) = 0$, q. e. d.

Remarques. 1. Compte tenu de la règle selon laquelle se transforment les coefficients de la connexion projective ${}_v\Gamma$, on constate que (5) a un caractère géométrique.

2. Dans le cas spécial, lorsque $a_k = 0$ (le cas d'une connexion projective définie par une connéxions linéaire et un tenseur de type (0, 2)), le champ X_m a l'expression :

$$(5') \qquad X_m = [\partial/\partial x^m - (a^h_j\, {}_v\Gamma^k_{hm})\, (\partial/\partial a^k_j)] - ({}_v\Gamma_{km}\, a^k_j)\, (\partial/\partial a_j).$$

D'après la règle selon laquelle se transforment les coefficients ${}_v\Gamma$, [7], on constate que ${}_v\Gamma_{km}$ est un tenseur de type (0, 2).

L'expression dans les parenthèses [...] de (5') nous donne le champ horizontal d'une connexion linéaire ([5], p. 143).

3. D'après (5) on constate que :

$$\pi(X_m) = (\partial/\partial x^m) \in T_x, \; x = \pi(u), \; u \in P, \; x \in M.$$

Les formules (5) déterminent en coordonnées locales l'isomorphisme $T_{u(H)} \to T_x$.

Comme dans le cas des connexions usuelles [5], on définit le *lift horizontal* d'un champ vectoriel (et d'une courbe sur M) et *le transport parallèle* comme l'isomorphisme $\tau : H_{x_0} \to H_{x_1}$ (le long de la courbe $\tau = x(t) \in M$). Ces isomorphismes forment un groupe lorsque τ est fermée.

D'après le théorème 1 on constate que pour chaque $a \in H$, nous avons : $\tau \circ R_a = R_a \circ \tau$.

Définition 3. *Le groupe des isomorphismes de la fibre locale* : $\pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ *définis par le transport parallèle le long d'une courbe fermée en* $x \in M$ *s'appelle le groupe d'holonomie de la connexion projective* ω *sur* P *en* x.

Dans le cas spécial de la courbe fermée homotope à zéro, on définit *le groupe réduit d'holonomie*.

Parce que l'isomorphisme $\tau : \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(x)$ se réalise à l'aide du lift horizontal $\tau^* = u(t) = (x(t), a_j^i(t), a_j(t))$, $t \in [0, 1]$, nous avons le

Théorème 3. *Le groupe d'holonomie de la connexion projective dans chaque point de la variété* M *peut être réalisé comme un sous-groupe du groupe structural* H.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cartan E. — *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*. Paris, 1937.
2. Ehresmann C. — *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Coll. Top., Bruxelles, 1950, p. 29—55.
3. Hangan T. — *Sur les connexions projectives*. Rev. de Math. pures et appl., T. 3, 1958, p. 265—276.
4. Kobayashi S. — *Theory of connections*. Ann. Mat. pura ed appl., 43, 1967, p. 119—194.
5. Kobayash S., Nomizu K. — *Foundations of Differential Geometry*, vol. I, Newi York, 1963.
6. Lumiste I. G. — *Les connexions dans les espaces fibrés homogènes* (en. I. russe). Mat. Sbor., T. 69 (111), 1966, nr. 3.
7. Murărescu Gh. — *Sur la théorie globale des connexions projectives*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 269, pp. 141—143.

ASUPRA TEORIEI GLOBALE A CONEXIUNILOR PROIECTIVE. GRUP DE OLONOMIE

Rezumat

Se definește [7] o conexiune proiectivă pe fibratul principal $P(M, H)$, unde H este subgrupul proiectiv de izotropie al punctului $O(0, \ldots, 0)$ din spațiul proiectiv P^n, cu ajutorul unei conexiuni Cartan [2], [4].

Se dau, din [7], expresiile formei de conexiune $\omega = (\omega^i, \omega_j^i, \omega_j)$, (2), (2′), (2″), ecuațiile de structură (1) și expresiile (4) pentru ad $(a^{-1})\omega$.

Se definesc câmpuri și forme verticale și orizontale pe spațiul P în legătură cu care se demonstrează teoremele 1 și 2.

Ca și în cazul conexiunilor uzuale se definește transportul paralel în lungul unei curbe de pe M cu ajutorul căruia se definește apoi grupul de olonomie pentru conexiunea proiectivă ω de pe spațiul P. Se demonstrează (teorema 3) că acest grup se poate realiza ca un subgrup al grupului structural H.

SOME RESULTS CONCERNING THE ASYMPTOTIC EQUIVALENCE OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

BY

PAVEL TALPALARU

§ 1. **Introduction.** In this paper, we shall give some general results on the asymptotic relationship between the solutions of a linear differential system and its perturbed integro-differential system. The relationship between the asymptotic behavior of a homogeneous differential equation and a nonhomogeneous perturbation of that differential equation has been widely investigated. The problem considered in this article is in the general spirit of the investigations at of Ja. V. Bykov ([3] quoted after [10]), Ju. A. Vedi [10], T. G. Hallam and J. W. Heidel [6] and F. Brauer and J. S. W. Wong [4]. Recently D. L. Lovelady [7], [8] studied this problem in a more general case, taking into account functional differential equations in Banach spaces.

The hypotheses which will be imposed upon our equations are extensions of those suggested by [4] and [6].

Consider the homogeneous linear system

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1}$$

where $A(t)$ is an $n \times n$ matrix, whose real-valued components are defined and continuous for $t \in R_{t_0} = [t_0, \infty)$, and the perturbed integro-differential system

$$\dot{y} = A(t)y + f(t, y) + \int_{t_0}^{t} k(t, s, y(s))ds, \tag{2}$$

where $f(t, y)$ is a continuous function for $t \in R_{t_0}$ and $\| y \| < \infty$, and $k(t, s, y)$ is a continuous function of t, s, y for $t_0 \leqslant s \leqslant t < \infty$ and $\| y \| < \infty$.

Everywhere we consider x, y, f, k real n-vectors. The norm of a matrix or a vector is defined as the sum of the absolute value of each of the components and will be denoted, as above, by $\| \cdot \|$.