OPÉRATEURS INTÉGRAUX FOURIER NON-LINÉAIRES

PAR

T. JUCAN

Soient $\Omega_1 \subset R^{n_1}$ et $\Omega_2 \subset R^{n_2}$ deux ouverts. Nous allons considérer formellement l'opérateur :

$$Au(x) = \iint e^{i\varphi(x,y,\xi)}\, a(x, y, \xi, u(y))\, dy d\xi : \tag{1.1}$$

où $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ et $\xi \in R^N$.

Si $a(x, y, \xi, u(y)) = a(x, y, \xi)\, u(y)$, alors cet opérateur est un opérateur intégral Fourier linéaire introduit par Hörmander dans [1]. Si nous supposons que $n_1 = n_2 = N$, $\varphi(x, y, \xi) = \langle x-y, \xi \rangle$ et $a(x, y, \xi, u(y)) = \sum_{\alpha \leq m} \xi^\alpha a_\alpha(x, y, u(y))$, alors l'opérateur (1.1) est un opérateur différentiel non-linéaire de forme divergente

$$Au(x) = \sum_{\alpha \leq m} D_y^\alpha a_\alpha(x, y, u(y))\, |_{y=x}$$

Nous supposons que le symbole $a(x, y, \xi, u(y))$ satisfait aux conditions suivantes :

1) $a(x, y, \xi, \eta)$ appartient à $\mathcal{E}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2 \times R^N \setminus \{0\}, R)$,

2) $a(x, y, \xi, 0) = 0$,

3) $|D_x^\alpha D_y^\beta D_\xi^\gamma [D^\varepsilon a(x, y, \xi, u) - D^\varepsilon a(x, y, \xi, v)]| \leq C_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,K_1,K_2}$

$(1 + |\xi|)^{m+\delta|\alpha|+\delta|\beta|-\rho|\gamma|} |u-v|$,

pour $x \in K_1 \subset \Omega_1$, $y \in K_2 \subset \Omega_2$, $\xi \in R^N \setminus \{0\}$, $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ et K_1, K_2 des compacts. Nous supposons aussi que la fonction phase satisfait aux conditions suivantes :

4) φ est une fonction à valeurs réelles et appartient à $\mathcal{E}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2 \times R^N)$

5) φ est une fonction homogène du degré 1 relativement à ξ. Nous noterons par $S^m_{\rho,\delta}$, l'ensemble des fonctions $a(x, y, \xi, \eta)$ qui satisfont aux conditions 1), 2) et 3). Considérons l'oscillateur intégral

$$I_\varphi(a) = \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(y,\xi)}\, a(y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi.$$

Lemme. *Si $a(x, y, \xi, u(y)) \in S^m_{\rho,\delta}$, φ satisfait aux conditions 4), 5) et n'a pas de points critiques (y, ξ) pour $\xi \neq 0$, alors pour $u \in \mathcal{O}^\infty_0(\Omega_2)$, $I_\varphi(a)$ existe.*

Démonstration. La démonstration est analogue à celle de [1]. Dans les conditions données on peut construire un opérateur différentiel M d'ordre 1, ayant la propriété suivante : $Me^{i\varphi(y,\xi)} = e^{i\varphi(y,\xi)}$.

En effet, si nous supposons

$$M = \sum_{j=1}^{N} a'_j(y, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^{n_2} b'_l(y, \xi) \frac{\partial}{\partial y_l} + \varkappa(\xi),$$

où $a'_j(y, \xi) = -i(1 - \varkappa(\xi))\, \psi(y, \xi)\, |\xi|^2 \dfrac{\partial \varphi(y, \xi)}{\partial \xi_j}$,

$$b'_l(y, \xi) = -i(1 - \varkappa(\xi))\, \psi(y, \xi) \frac{\partial \varphi(y, \xi)}{\partial y_l}.$$

$$\psi(y, \xi) = \frac{1}{|\xi|^2 \sum_{j=1}^{N} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}\right)^2 + \sum_{l=1}^{n_2} \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_l}\right)^2}$$

et $\varkappa(\xi)$ est une fonction qui appartient à $\mathcal{O}^\infty_0(R^N)$ avec $\varkappa(\xi) = 1$ pour ξ appartenant à un voisinage de l'origine de R^N. Alors on vérifie par calcul que $Me^{i\varphi(y,\xi)} = e^{i\varphi(y,\xi)}$. La construction de $\psi(y, \xi)$ nous fait voir que $\psi(y, \xi)$ est une fonction homogène du degré -2, qui est définie pour tous les (y, ξ) avec $\xi \neq 0$ et $\psi(y, \xi) \in \mathcal{O}^\infty(\Omega_2 \times R^N \setminus \{0\})$. Nous notons par L l'opérateur adjoint de M

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j(y, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^{n_2} b_l(y, \xi) \frac{\partial}{\partial y_l} + c(y, \xi),$$

où $a_j(y, \xi) = -a'_j(y, \xi)$; $b_l(y, \xi) = -b'_l(y, \xi)$ et

$$c(y, \xi) = \varkappa(\xi) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial a_j(y, \xi)}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^{n_2} \frac{\partial b_l(y, \xi)}{\partial y_l}.$$

De la construction de l'opérateur M on conclut que les inégalités suivantes :

$$|D^\alpha_y D^\beta_\xi a_j(y, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,k} (1 + |\xi|)^{\delta\alpha - \rho|\beta|},$$

$$|D^\alpha_y D^\beta_\xi b_l(y, \xi)| \leqslant C^1_{\alpha,\beta,k} (1 + |\xi|)^{-1+\delta|\alpha| - \rho\beta},$$

et

$$|D^\alpha_y D^\beta_\xi c(y, \xi)| \leqslant C^2_{\alpha,\beta,k} (1 + |\xi|)^{-1+\delta|\alpha| - \rho\beta},$$

où K est un compact de Ω_2 sont satisfaites.

Nous avons ensuite :

$$I_\varphi(a) = \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(y,\xi)}\, a(y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi = \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(y,\xi)}\, La(y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi =$$

$$= \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(y,\xi)} \left| \sum_{j=1}^{N} a_j(y, \xi) \frac{\partial a(y, \xi, u(y))}{\partial \xi_j} + \sum_{l=1}^{n_2} b_l(y, \xi) \frac{\partial a(y, \xi, u(y))}{\partial y_l} + \right.$$

$$\left. + c(y, \xi)\, a(y, \xi, u(y)) \right| dy\, d\xi.$$

Puisque

$$a_j(y, \xi) \frac{\partial a(y, \xi, u(y))}{\partial \xi_j} \in S^{m-\rho}_{\rho,\delta}, \quad b_l(y, \xi) \frac{\partial a(y, \xi, u(y))}{\partial y_l} \in S^{m+\delta-1}_{\rho,\delta},$$

$$c(y, \xi) = a(y, \xi, u(y)) \in S^{m-1}_{\rho,\delta},$$

il résulte que $La(y, \xi, u(y)) \in S^{m-t}_{\rho,\delta}$ avec $t = \min(1 - \delta, \rho)$. Si nous répétons k fois cette opération, il résulte que :

$$L^k a(y, \xi, u(y)) \in S^{m-kt}_{\rho,\delta}.$$

Si k est suffisamment grand de sorte que $m - kt < -N$, alors pour $a(y) \in \mathcal{O}^\infty_0(\Omega_2)$, $I_\varphi(a)$ existe. De ce résultat, nous pouvons déduire le théorème suivant sur l'opérateur intégral Fourier.

Théorème 1. *Si le symbole $a(x, y, \xi, u(y))$ satisfait aux conditions 1), 2) et 3), la fonction $\varphi(x, y, \xi)$ satisfait aux conditions 4), 5) et, pour chaque point x fixé, la fonction $\varphi(x, y, \xi)$ n'a pas de points critiques (y, ξ) pour $\xi \neq 0$, alors l'opérateur Fourier non-linéaire est une application de $\mathcal{O}^k_0(\Omega_2)$ en $\mathcal{O}^j(\Omega_1)$ si k et j satisfont au condition $m + j - kt < -N$.*

Démonstration. On a :

$$Au(x) = \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(x,y,\xi)}\, a(x, y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi = \iint_{\cdot\cdot} e^{i\varphi(x,y,\xi)}\, L^k_{y,\xi} a(x, y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi.$$

Si le symbole a satisfait aux conditions 1), 2), 3) et $\varphi(x, y, \xi)$ satisfait aux conditions 4), 5) et la condition de l'énoncé du théorème est satisfaite alors $Au(x)$ existe selon le lemme démontré.

Étudions maintenant les dérivées de Au :

$$D_x^\alpha Au(x) = \iint \sum_{|\alpha'| \leqslant \alpha} D_x^{\alpha'} e^{i\varphi(x,y,\xi)} D_x^{\alpha-\alpha'} L_{y,\xi}^k a(x, y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi =$$

$$= \iint \sum_{|\alpha'| \leqslant \alpha} (-1)^{\alpha'} \sum{}^* (\varphi^{(\eta_1)}(x, y, \xi))^{\lambda^1} \cdots\cdots (\varphi^{(\eta^{r(\alpha')})}(x, y, \xi))^{\lambda^{r(\alpha')}} e^{i\varphi(x,y,\xi)} \times$$

$$\times D_x^{\alpha-\alpha'} L_{y,\xi}^k a(x, y, \xi, u(y))\, dy\, d\xi,$$

où

$$\eta^i = (\eta_1^i, \ldots, \eta_{n_1}^i); \quad \lambda^i \text{ sont des nombres naturels}$$

$$\varphi^{(\eta^i)}(x, y, \xi) = D_{x_1}^{\eta_1^i} D_{x_2}^{\eta_2^i} \cdots D_{x_{n_2}}^{\eta_{n_2}^i} \varphi(x, y, \xi),$$

et $\sum^*$ signifie la somme selon toutes les valeurs que peuvent prendre λ^i et η_j^i de sorte que $\sum_{i=1}^{r(\alpha')} \lambda^i \eta_j^i = \alpha'_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n_1$.

Si on tient compte du fait que $a(x, y, \xi, \eta) \in S_{\rho,\delta}^m$, il résulte que

$$L^k a(x, y, \xi, u(y)) \in S_{\rho,\delta}^{m-kt} \text{ et } D_x^{\alpha-\alpha'} L^k a(x, y, \xi, u(y)) \in S_{\rho,\delta}^{m+\rho|\alpha-\alpha'|-kt}.$$

Puisque $\varphi(x, y, \xi)$ est une fonction homogène du degré 1 relativement à ξ, ses dérivées par rapport à x seront homogènes du même degré, donc

$$|D^\alpha Au(x)| \leqslant C_\alpha \iint (1 + |\xi|)^{|\alpha'| + m + \rho|\alpha-\alpha'| - kt} \psi_{\alpha'}(x, y) |u(y)|\, dy\, d\xi,$$

où $\psi_{\alpha'}(x, y)$ sont les fonctions qui appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Si on choisit k suffisament grand de sorte que $m + |\alpha| - kt < -N$, alors cette intégrale existe, donc $A : \mathcal{C}_0^k(\Omega_2) \to \mathcal{C}^j(\Omega_1)$. Puisque k est arbitraire il résulte que $A : \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_2) \to \mathcal{C}^\infty(\Omega_1)$.

La continuité des opérateurs intégraux Fourier nonlinéaires dans les espaces $H_0^s(\Omega)$. Pour $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, nous définissons la norme par

$$\|u\|_s^2 = \int \sum_{|\alpha| \leqslant s} \binom{s}{|\alpha|} |D^\alpha u(x)|^2\, dx.$$

L'espace complété dans cette norme de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sera noté par $H_0^s(\Omega)$. Pour $u, v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega_1)$ nous évaluons

$$\|Au(x) - Av(x)\|_s^2 = \iint \sum_{|\alpha| \leqslant s} \binom{s}{|\alpha|} |D^\alpha [Au(x) - Av(x)]|^2\, dx =$$

$$= \int \sum_{|\alpha| \leqslant s} \binom{s}{|\alpha|} \left| D_x^\alpha \iint e^{i\varphi(x,y,\xi)} L_{y,\xi}^k [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))]\, dy\, d\xi \right|^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int \sum_{|\alpha| \leqslant s} \binom{s}{|\alpha|} \left\{ \iint \sum_{|\alpha'| \leqslant \alpha} \left| \sum{}^* \varphi^{(\eta^1)}(x, y, \xi)^{\lambda^1} \cdots \varphi^{(\eta^{r(\alpha')})}(x, y, \xi) \right|^{r(\alpha')} \times \right.$$

$$\left. \times \left| D_x^{\alpha-\alpha'} L^k [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))] \right| dy\, d\xi \right\}^2 dx.$$

Compte tenu du fait que $a \in S_{\rho,\delta}^m$ et de la construction de l'opérateur L, il résulte que

$$L^k [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))] \in S_{\rho,\delta}^{m-kt},$$

et

$$D_x^{\alpha-\alpha'} [L^k a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))] \in S_{\rho,\delta}^{m-kt+\rho|\alpha-\alpha'|}.$$

La fonction $\varphi(x, y, \xi)$ étant homogène du degré 1 relativement aux variables ξ, il résulte que l'intégrande de la dernière relation appartient à $S_{\rho,\delta}^{m-kt+|\alpha|}$. Par conséquent, si $m - kt + s < -N$, l'intégrale relative aux variables ξ existe.

Passons maintenant à des évaluations effectives. Soit le terme général $D_x^{\alpha-\alpha'} L^k [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))]$: il a la forme suivante $D_x^{\alpha-\alpha'} D_y^\beta D_\xi^\gamma [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))]$ où $|\beta|$ et $|\gamma|$ peuvent être au plus k.

Allors on a

$$|D_x^{\alpha-\alpha'} D_y^\beta D_\xi^\gamma [a(x, y, \xi, u(y)) - a(x, y, \xi, v(y))]| =$$

$$= |D_x^{\alpha-\alpha'} D_\xi^\gamma \{\sum_{|\beta'| \leqslant |\beta|} D_y^{\beta-\beta'} D_u^{\beta'} a(x, y, \xi, u) D^{\beta'} u(y) - D_y^{\beta-\beta'} D_v^{\beta'} a(x, y, \xi, v) D^{\beta'} v(y)\}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\beta'| \leqslant |\beta|} \{ |D_x^{\alpha-\alpha'} D_\xi^\gamma D_y^{\beta-\beta'} [D_u^{\beta'} a(x, y, \xi, u) - D_v^{\beta'} a(x, y, \xi, v)]| \, |D^{\beta'} u(y)| +$$

$$+ |D_x^{\alpha-\alpha'} D_\xi^\gamma D_y^{\beta-\beta'} D_v^{\beta'} a(x, y, \xi, v)| \, |D^{\beta'} v(y) - D^{\beta'} u(y)| \} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\beta'| \leqslant |\beta|} [C_1 (1 + |\xi|)^{m+\rho(|\alpha-\alpha'| + |\beta|) - \delta|\gamma|} |D^{\beta'} u(y)| \, |u(y) - v(y)| +$$

$$+ C_2 (1 + |\xi|)^{m+\rho(|\alpha-\alpha'| + |\beta|) - \delta|\gamma|} |D^{\beta'} v(y) - D^{\beta'} u(y)| \, |v(y)|] \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sum_{|\beta'| \leqslant |\beta|} (1 + |\xi|)^{m+\rho(|\alpha-\alpha'| + |\beta|) - \delta|\gamma|} [|D^{\beta'} u(y)| \, |u(y) - v(y)| +$$

$$+ |D^{\beta'} u(y) - D^{\beta'} v(y)| \, |v(y)|].$$

Donc

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s^2 \leq C_4 \iiint \sum_{|\alpha| \leq s} (1 + |\xi|)^{m-kt+s} \sum_{\beta' \leq \beta} \psi_{\alpha',\beta'}(x, y) \, | D^{\beta'} u(y) | \, | u(y) -$$

$$- v(y) | + | D^{\beta} u(y) - D^{\beta} v(y) | \, | v(y) | \, | dx \, dy \, d\xi.$$

Si nous supposons que les fonctions $\psi_{\alpha',\beta'}(x, y)$ sont intégrables par rapport à x alors on obtient :

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s^2 \leq C_5 (\| u \|_k^2 + \| v \|_0^2) \| u - v \|_k^2 ;$$

d'où il résulte que

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s \leq C(\| u \|_{kt} \| v \|_0) \| u - v \|_k.$$

De la dernière relation il résulte que A est un opérateur continu $H_0^k(\Omega_2) \to H_0^s(\Omega_1)$. En particulier, si $n_1 = n_2 = N$ $\Omega_1 = \Omega_2$ et $\varphi(x, y, \xi) = < x - y, \xi >$ nous obtenons le même résultat pour les opérateurs pseudodifférentiels.

BIBLIOGRAPHIE

Hörmander L. — *Fourier Integral Operators*, Acta Math. 127, pp. 78—93.

OPERATORI INTEGRALI FOURIER NELINIARI

Rezumat

În această lucrare se consideră operatori integrali Fourier neliniari, care generalizează atît operatorii integrali Fourier liniari cît și operatorii diferențiali neliniari de formă divergentă.

Se studiază continuitatea acestor operatori de la $H^k(\Omega_2)$ la $H^s(\Omega_1)$ cu s și k numere naturale și satisfăcînd condiția $m + s - kt < -N$ unde $t = \min(1 - \delta, \varrho)$.

SUR LE COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

ADOLF HAIMOVICI

1. Le but de ce travail est d'étendre à un système d'équations aux dérivées partielles, certains résultats de la théorie de Liapounoff sur la stabilité par rapport aux données initiales. Plus précisément dans la théorie des équations differentielles

$$\frac{du}{dx} = Au + f(x, u),$$

on remplacera l'opérateur d/dx par un opérateur élliptique $a_{ij} \, \partial^2/\partial x_i \, \partial x_j$, et on étudiera pour un demi espace $R_+^p = \{x;\ x \in R^p,\ x_p \geq 0\}$ le comportement de la solution du problème de Dirichlet. On constatera l'analogie de certains résultats avec ceux de la théorie classique de Liapounoff, exprimés à l'aide des racines caractéristiques de la matrice A.

D'ailleurs un problème analogue a été étudié récemment [1] pour un système hyperbolique

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = Au + f(x, u).$$

2. Préliminaires. Considérons le système

$$\mathfrak{L} u = Bu, \tag{1}$$

où :

1) $\mathfrak{L}$ est l'opérateur

$$\mathfrak{L} = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p). \tag{2}$$