Donc

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s^2 \leq C_1 \iiint \sum_{|\alpha| \leq s} (1 + |\xi|)^{m-kt+s} \sum_{\beta' \leq \beta} \psi_{\alpha',\beta'}(x, y) \, | D^{\beta'} u(y) | \, | u(y) -$$

$$- v(y) | + | D^{\beta} u(y) - D^{\beta} v(y) | \, | v(y) | \, dx \, dy \, d\xi.$$

Si nous supposons que les fonctions $\psi_{\alpha',\beta'}(x, y)$ sont intégrables par rapport à x alors on obtient :

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s^2 \leq C_3 (\| u \|_k^2 + \| v \|_0^2) \| u - v \|_k^2 ;$$

d'où il résulte que

$$\| Au(x) - Av(x) \|_s \leq C(\| u \|_k + \| v \|_0) \| u - v \|_k.$$

De la dernière relation il résulte que A est un opérateur continu $H_0^k(\Omega_2) \to H_0^s(\Omega_1)$. En particulier, si $n_1 = n_2 = N$ $\Omega_1 = \Omega_2$ et $\varphi(x, y, \xi) = < x - y, \xi >$ nous obtenons le même résultat pour les opérateurs pseudodifférentiels.

BIBLIOGRAPHIE

Hörmander L. — *Fourier Integral Operators*, Acta Math. 127, pp. 78—93.

OPERATORI INTEGRALI FOURIER NELINIARI

Rezumat

În această lucrare se consideră operatori integrali Fourier neliniari, care generalizează atît operatorii integrali Fourier liniari cît și operatorii diferențiali neliniari de formă divergentă.

Se studiază continuitatea acestor operatori de la $H^k(\Omega_2)$ la $H^s(\Omega_1)$ cu s și k numere naturale și satisfăcînd condiția $m + s - kt < -N$ unde $t = \min(1 - \delta, \varrho)$.

SUR LE COMPORTEMENT DES SOLUTIONS D'UN PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR

ADOLF HAIMOVICI

1. Le but de ce travail est d'étendre à un système d'équations aux dérivées partielles, certains résultats de la théorie de Liapounoff sur la stabilité par rapport aux données initiales. Plus précisément dans la théorie des équations differentielles

$$\frac{du}{dx} = Au + f(x, u),$$

on remplacera l'opérateur d/dx par un opérateur élliptique $a_{ij} \, \partial^2/\partial x_i \, \partial x_j$, et on étudiera pour un demi espace $R_+^p = \{x : x \in R^p, x_p \geq 0\}$ le comportement de la solution du problème de Dirichlet. On constatera l'analogie de certains résultats avec ceux de la théorie classique de Liapounoff, exprimés à l'aide des racines caractéristiques de la matrice A.

D'ailleurs un problème analogue a été étudié récemment [1] pour un système hyperbolique

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1 \, \partial x_2 \ldots \partial x_n} = Au + f(x, u).$$

2. Préliminaires. Considérons le système

$$\mathfrak{L} u = Bu, \tag{1}$$

où :

1) $\mathfrak{L}$ est l'opérateur

$$\mathfrak{L} = a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \, \partial x_j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, p). \tag{2}$$

a_{ij} étant des constantes-coefficients d'une forme quadratique positivement définie et $a_{ij} = a_{ji}$.

2) B est une matrice carrée constante non-singulière

$$B = (b_{ij}), \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n); \tag{3}$$

3) u est le vecteur de R^n

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Effectuons sur (1) la transformation linéaire

$$\bar{u}^i = s^i_j u^j,$$

$S = (s^i_j)$ étant une matrice constante non-singulière : (1) devient alors

$$\mathfrak{L}\bar{u} = S^{-1} B S \bar{u}.$$

On choisira S de manière que $S^{-1} B S$ soit la matrice canonique de Jordan correspondante à B. On arrive alors à un système écrit sous une forme que nous appelerons canonique, et dont nous écrivons seulement le sous-système correspondant au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_1)^k$. Une intégrale quelconque de (1) sera évidemment une combinaison linéaire d'intégrales de tels sous-systèmes. Soit :

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}u_1 &= \lambda_1 u_1, \\ \mathfrak{L}u_2 &= u_1 + \lambda_1 u_2, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{L}u_k &= u_{k-1} + \lambda_1 u_k \end{aligned} \tag{5}$$

ce sous-système, dans lequel nous avons renoncé à la barre de u_i, pour simplifier la notation.

3. Solution élémentaire de $\mathfrak{L}u - \lambda_1 u$. Etudions d'abord l'équation

$$\mathfrak{L}u_1 - \lambda_1 u_1 = 0. \tag{6}$$

Cherchons une solution ayant l'expression

$$u_1 = v(z), \quad z = \sqrt{-\lambda_1 w},$$
$$w = A_{rs}(x_r - x_r^0)(x_s - x_s^0),$$

les A_{rs} étant les compléments de a_{rs} dans $\det A$, divisés par $\det A$. On vérifie alors que :

$$\mathfrak{L}u_1 - \lambda_1 u_1 = -\lambda_1 \left(v''(z) + \frac{p-1}{z} v'(z) - v(z)\right) = 0.$$

et en posant encore :

$$v = z^{-\nu} V_1(z), \qquad \nu = \frac{p}{2} - 1,$$

on arrive à

$$\mathfrak{L}u_1 - \lambda_1 u_1 = -\lambda_1 z^{-\nu} \left[V_1'' + \frac{1}{z} V_1' - \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) V_1 \right] = 0. \tag{7}$$

Il résulte que :

A. Si p est impair, un système fondamental de solutions est

$$V_1^{(1)}(z) = J_\nu(z), \qquad V_1^{(2)}(z) = J_{-\nu}(z).$$

B. Si p est pair, un système fondamental de solutions est

$$V_1^{(1)}(z) = J_\nu(z), \qquad V_1^{(2)}(z) = Y_\nu(z),$$

c'est-à-dire, pour (6), un système fondamental de solutions est, dans le cas **A**

$$u_1^{(1)}(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \qquad u_1^{(2)}(z) = z^{-\nu} J_{-\nu}(z), \tag{8}$$

tandis que dans le cas **B**, un tel système est donné par

$$u_1^{(1)}(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \qquad u_1^{(2)}(z) = z^{-\nu} Y_\nu(z). \tag{9}$$

Dans les deux cas, la deuxième solution est, à un facteur près, une solution fondamentale de l'opérateur $\mathfrak{L} - \lambda_1$. En effet, si $\varphi \in C_0'(R)$ et $\tilde{E}_\nu$ est cette seconde solution, on a :

$$\int (\mathfrak{L}\varphi - \lambda_1 \varphi) \tilde{E}_\nu(z)\, dx = \lim_{\rho \to 0} \int_{\omega^\rho} a_{ij} \left(\tilde{E}_\nu \frac{d\varphi}{dx_j} - \varphi \frac{d\tilde{E}_\nu}{dx_j} \right) \cos \alpha_i \, d\sigma,$$

ω^ρ étant la frontière de l'hyperellipsoïde

$$A_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) \leqslant \rho^2,$$

$\cos \alpha_i$ étant les cosinus directeurs de la normale à cet hyperellipsoïde, et ρ un paramètre positif. En effectuant les calculs, on arrive à

$$\int (\mathfrak{L}\varphi - \lambda_1 \varphi) \tilde{E}_\nu(z)\, dx = -\lambda_1 \omega_p \sqrt{a}\, \varphi(x_0) \lim_{\rho \to 0} (\rho^p \tilde{E}_{\nu+1}(z)),$$

où ω_p est l'aire de l'hypersphère unitaire de R^p et $a = \det A$. Or on a (voir [2, p. 74]).

$$\lim_{z \to 0} \left(z^{\nu+1} J_{-\nu-1} \right) = 2^{\nu+1} \frac{1}{\Gamma(-\nu)}, \qquad \text{pour } p\text{-impair},$$

et

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\rho^{\nu+1}\,Y_{\nu+1}\right) = -\frac{2^{\nu+1}}{\pi}\,\nu!, \qquad \text{pour } p\text{-impair}$$

Il résulte donc le

Théorème 1. *Une solution élémentaire de* $\mathfrak{L}-\lambda_1$, *est, dans le cas p-impair*

$$E_\nu(z) = -\frac{\Gamma(-\nu)}{2^{\nu+1}\,\lambda_1^{\nu+1}\,\omega_p\sqrt{a}}\,z^{-\nu}\,J_{-\nu}(z) + \alpha z^{-\nu}\,J_\nu(z), \tag{10}$$

et dans le cas p-pair

$$E_\nu(z) = -\frac{\pi}{2^{\nu+1}\,\lambda_1^{\nu+1}\,\omega_p\sqrt{a}\;\nu!}\,z^{-\nu}Y_\nu(z) + \alpha z^{-\nu}\,J_\nu(z). \tag{11}$$

Dans le même ordre d'idées remarquons encore les identités suivantes :

Quel que soit σ, on a :

$$\frac{\partial\,(z^\sigma J_\sigma)}{\partial x_i} = [\sigma z^{\sigma-1} J_\sigma + z^\sigma J'_\sigma]\,\frac{\partial z}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2(z^\sigma J_\sigma)}{\partial x_i\,\partial x_j} = [\sigma(\sigma-1)\,z^{\sigma-2} J_\sigma + 2\sigma z^{\sigma-1} J'_\sigma + z^\sigma J''_\sigma]\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\,\frac{\partial z}{\partial x_j} +$$

$$+ [\sigma z^{\sigma-1} J_\sigma + z^\sigma J'_\sigma]\,\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\,\partial x_j},$$

$$(\mathfrak{L}-\lambda_1)\,(z^\sigma J_\sigma) = -\lambda_1[\sigma(\sigma+p-2)\,z^{\sigma-2} J_\sigma + (2\sigma+p-1)\,z^{\sigma-1} J'_\sigma +$$

$$+ z^\sigma J''_\sigma + z^\sigma J_\sigma].$$

Compte tenu de l'équation de Bessel

$$z^2 J''_\sigma + z\,J'_\sigma + (z^2-\nu^2)\,J_\nu = 0,$$

cette relation se réduit à :

$$(\ast) \qquad (\mathfrak{L}-\lambda_1)\,(z^\sigma J_\sigma) = -\lambda_1\,(2\sigma+p-2)\,z^{\sigma-2}\,(\sigma J_\sigma + zJ'_\sigma) =$$

$$= -\lambda_1\,(2\sigma+p-2)\,z^{\sigma-1} J_{\sigma-1}$$

et elle reste valable quand on remplace J_σ par Y_σ.

Posons encore

$E_\sigma = A_\sigma\,z^\sigma J_\sigma$(pour p impair) et $E_\sigma = A_\sigma\,z^\sigma\,Y_\sigma$ (pour p pair)

A_σ étant une constante, qui satisfait à la relation

$$\frac{A_\sigma}{A_{\sigma-1}} = -\lambda_1\,(2\sigma+p-2)\,;$$

alors, la relation $(\ast)$ devient

$$(\mathfrak{L}-\lambda_1)\,E_\sigma = E_{\sigma-1}$$

et, si $\sigma = -p/2+1$, on a

$$(\mathfrak{L}-\lambda_1)E_\sigma = 0.$$

On imposera encore à la suite A_ν la compatibilité avec les relations (10) et (11).

4. Problème de Dirichlet pour un demi-espace. Supposons :

$$a_{pp} = 1, \qquad a_{pi} = 0 \qquad i \neq p, \tag{12}$$

c'est-à-dire

$$\varkappa = a_{ij}\,(x_i - x_i^0)\,(x_j - x_j^0) + (x_p - x_p^0)^2, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p-1), \tag{12'}$$

et proposons nous de résoudre le problème de Dirichlet pour le demi-espace $x_p \geqslant 0$.

Soit donc à trouver une fonction $u_1(x)$, *telle que 1)* $u_1(x) \in C^2$ *sur* $x_p > 0$ *et* $u_1(x) \in C'$ *sur* $x_p \geqslant 0$,

2) qui satisfasse à

$$\mathfrak{L}u_1 - \lambda_1 u_1 = 0 \qquad \text{pour } x_p > 0. \tag{13}$$

3) et à

$$u_1(x) = g(x) \qquad \text{sur } x_p = 0, \tag{13'}$$

$-g(x)$ étant une fonction de $n-1$ variables, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ qui est continue pour $-\infty < x < \infty$ et qui satisfait à

$$|\,g\,(x)\,| \leqslant \frac{A}{\rho^{\frac{p-3}{2}+\alpha}}, \tag{14}$$

où A et α sont deux constantes positives et ρ est la distance d'un point fixe O de l'hyperplan $x_p = 0$, au point x du même hyperplan.

4) qui tende vers zéro, en satisfaisant pour $R = \sqrt{\sum_1^p x_i^2}$ assez grand, à

$$|\,u_1(x)\,| \leqslant \frac{A_1}{R^\beta}, \quad \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_i}\right| \leqslant \frac{A_1}{R^{\beta+1}}, \qquad \beta \geqslant \frac{p-3}{2}, \tag{15}$$

$$i = 1, 2, \ldots, p,$$

A, B et β étant des constantes positives.

Nous allons démontrer d'abord le

Théorème 2. *Dans les conditions (12), (15), (14), si le système (13)—(13') avec $\lambda_1 < 0$ admet une solution, elle est unique. Dans le cas $\lambda_1 > 0$ ou λ_1 complexe, les conditions (15) doivent être remplacées par (16') (voir plus loin).*

Considérons le cas $\lambda_1 < 0$ et supposons par absurde que le problème de Dirichlet admette deux solutions $u_1(x)$ et $u_2(x)$: soit $v = u_2(x) - u_1(x)$. On a évidemment

$$v(x) \in C^2 \text{ pour } x_p > 0, \quad v(x) \in C \quad \text{pour } x_p \geq 0,$$

$$\mathcal{L}v - \lambda_1 v = 0 \text{ pour } x_p > 0,$$

$$v(x) = 0 \text{ pour } x_p = 0,$$

$$|v(x)| \leq \frac{2A_1}{R^\beta}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right| \leq \frac{2A_1}{R^{\beta+1}}, \qquad \beta > \frac{p-3}{2}.$$

Soit x^0 un point du demi-espace R_+^p et B_1 une demi-boule, dont le centre est sur $x_p = 0$, de rayon R_1, située dans le demi-espace et ayant x^0 à l'intérieur : soit B_1' la frontière de B_1.

De la formule de Green on déduit :

$$v(x^0) = \lim_{R \to \infty} \int_{S} a_{ij} \left(E_\nu \frac{\partial v}{\partial x_i} - v \frac{\partial E_\nu}{\partial x_i} \right) \cos \alpha_j \, d\sigma.$$

Prenons le rayon R_1 plus grand que le double de la distance de x^0 au centre de la boule. Compte tenu aussi du fait que

a) w^2 étant une forme positivement définie, il y a deux constantes strictement positives c_1^2 et c_2^2 telles que

$$c_1^2 \sum_1^p (x_i - x_i^0)^2 \leq w^2 \leq c_2^2 \sum_1^p (x_i - x_i^0)^2. \tag{15'}$$

et

b) le développement asymptotique de $J_\nu(z)$ et $Y_\nu(z)$ [2, p. 222] conduit à :

$$\left| E_\nu(z) \right| \leq A R_1^{-\frac{1}{2}} = A R_1^{-\frac{p-1}{2}}, \quad \left| \frac{\partial E_\nu(z)}{\partial x_i} \right| \leq B R_1^{-\frac{p-1}{2}} \tag{16}$$

(A et B étant deux constantes), on obtient :

$$|v(x)| \leq C R_1^{\frac{p-3}{2} - \beta},$$

C étant une nouvelle constante. Et comme $\beta > (p-3)/2$, il résulte que $v(x^0) \to 0$ quand $R_1 \to \infty$, c'est à dire

$$v(x^0) = u_2(x^0) - u_1(x^0) = 0.$$

Les cas $\lambda_1 > 0$ ou λ_1 complexe peuvent être traités de la même manière, à la seule différence que, par suite du fait que

$$|J_\nu(iz)|, \; |Y_\nu(iz)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{|z|}} e^{|z|} \right), \quad \text{quand } z \to \infty, \tag{17}$$

les conditions qu'on doit imposer à la solution $u(x)$ à l'infini sont plus restrictives, à savoir :

$$|u_1(x)| \leq A e^{-R} R^{-\beta}, \quad \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right| \leq A e^{-R} R^{-\beta-1}, \tag{16'}$$

avec, comme plus haut $\beta > (p-3)/2$.

5. En remarquant que la fonction de Green s'obtient en considérant le point $x' = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{p-1}^0, -x_p^0)$ et ensuite en la définissant par

$$G_\nu(x^0, x) = \frac{1}{2}[E_\nu(z) - E_\nu(z')], \quad z' = \sqrt{-\lambda_1} w',$$

$$w' = A_{rs}(x_r - x_r')(x_s - x_s'),$$

la solution cherchée du problème de Dirichlet est :

$$u_1(x^0) = -2 \int_{(x_p = 0)} a_{ij} g(x) \frac{\partial E_\nu}{\partial x_i} \cos \alpha_j \, d\sigma, \tag{18}$$

où

$$\cos \alpha_i = 0 \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, p-1, \quad \cos \alpha_p = -1.$$

En effectuant les calculs et en tenant compte de certaines formules de recurrence pour les fonctions de Bessel (voir [2, p. 78]), on obtient

$$u_1(x^0) = -4\lambda_1(\nu + 1) \int_{(x_p = 0)} g(x) x_p^0 E_{\nu+1}(z) \, d\sigma. \tag{19}$$

Vérifions maintenant l'affirmation que u_1 est une solution du problème posé.

On constate d'abord que l'intégrale du second membre de (19) existe. En effet, notons :

$$s^2 = a_{ij}x_ix_j + (x_p)^2, \qquad R^2 = \sum_1^{p-1} x_i^2 + x_p^2.$$

(20)
$$\sigma^2 = a_{ij}x_ix_j, \quad r^2 = \sum_1^{p-1} x_i^2, \quad (i, j = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Par suite de l'ellipticité de la forme $a_{ij}x_ix_j$ (voir aussi (15)) il résulte qu'il y a quatre constantes c_1, c_2, q_1, q_2 strictement positives telles que:

$$c_1^2 R^2 \leqslant s^2 \leqslant c_2^2 R^2, \qquad q_1^2 r^2 \leqslant \sigma^2 \leqslant q_2^2 r^2.$$

On a ensuite

$$z = \left\{\sum_1^{p-1} a_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + (x_p^0)^2\right\}^{1/2} \geqslant c_1 \left\{\sum_{i=1}^{p-1}(x_i - x_i^0)^2 + (x_p^0)^2\right\}^{1/2} >$$

$$> c_1 \left|\left(\sum_1^{p-1} x_i^2\right)^{1/2} - \left(\sum_1^{p-1}(x_i^0)^2 + (x_p^0)^2\right)^{1/2}\right|.$$

Pour

(21)
$$\sum_1^{p-1} x_i^2 > 4\left\{(x_p^0)^2 + \sum_1^{p-1}(x_i^0)^2\right\}.$$

Il résulte

$$z \geqslant \frac{c_1}{2} r.$$

Considérons maintenant la demi-boule Σ^0.

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i^0)^2 \leqslant P^2, \quad x_p \geqslant 0, \quad P = \text{const.},$$

et l'intersection K de l'extérieur de la demi-boule

$$\sum_{i=1}^{p} x_i^2 \geqslant 4P^2$$

avec l'hyperplan $x_p = 0$.

Si $x^0 \in \Sigma^0$, nous avons

$$\left|\int_{\substack{s^2 \geqslant 2P^2 \\ x_p = 0}} g(x)\, x_p^0\, E_{\nu+1}(z)\, d\sigma\right| \leqslant \int_K |g(x)| \frac{A x_p^0}{z^{\nu+\frac{3}{2}}}\, r^{p-2}\, dr \leqslant \frac{A_1}{R^\alpha},$$

A_1 étant une constante convenablement choisie. Il résulte que cette intégrale tend uniformément vers zéro quand $R \to \infty$, ce qui montre l'existence et la continuité de l'intégrale $u_1(x)$. De la même manière on dé-

montre l'existence des dérivées de $u_1(x)$ qui s'obtiennent par des dérivations sous l'intégrale.

On vérifie ensuite, en utilisant les formules de recurrence pour les fonctions de Bessel que u_1 satisfait à l'équation $\mathfrak{L}u_1 - \lambda_1 u_1 = 0$.

Il reste à vérifier que $\lim_{x_p=0} u_1(x) = g(x)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}, x_p)$. A ce but, remarquons d'abord que $E_{\nu+1}(z)$ admet le développement en série (voir [2])

$$E_{\nu+1}(z) = p_0 z^{-2\nu-2} + p_1 z^{-2\nu} + \ldots, \quad p_0 = -\frac{2^{\nu+1}\nu!}{\pi} A_{\nu+1},$$

$$A_{\nu+1} = \frac{(-1)^\nu \Gamma(-\nu)\lambda_1^\nu}{2^{\nu-1}\omega_p\sqrt{a}} \quad \text{pour } p \text{ impair},$$

$$A_{\nu+1} = \frac{(-1)^{\nu+1}\pi\lambda_1^\nu}{2^{\nu+1}\omega_p\sqrt{a}\,\nu!}, \quad \text{pour } p\text{-pair}.$$

Soient maintenant $\varepsilon > 0$, y un point de l'hyperplan $x_p = 0$ et γ l'hyperellipsoïde

$$A_{ij}(x_i - y_i)(x_j - y_j) \leqslant \eta^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, p-1), \ (x_p = 0).$$

Alors la fonction $u_1(x_0)$ peut être écrite sous la forme:

$$u_1(x^0) = \frac{2A_\nu}{A_{\nu+1}}\int_\gamma \{[g(x) - g(y)]\,[E_{\nu+1}(z) - p_0 z^{-2\nu-2}]\, x_p^0\, d\sigma +$$

$$+ \frac{2A_\nu}{A_{\nu+1}}\int_\gamma [g(x) - g(y)]\, p_0\, x_p^0\, z^{-2\nu-2}\, d\sigma + \frac{2A_\nu}{A_{\nu+1}} g(y) \int_\gamma x_p^0 [E_{\nu+1}(z) -$$

$$- p_0 z^{-2\nu-2}]\, d\sigma + \frac{2A_\nu}{A_{\nu+1}} g(y) \int_\gamma p_0\, x_p^0\, z^{-2\nu-2}\, d\sigma + \frac{2A_\nu}{A_{\nu+1}} \int_{R_1^p - \gamma} g(x)\, x_p^0\, E_{\nu+1}(z)\, d\sigma,$$

où nous avons noté:

$$R_1^p = \{x;\ x_p = 0\}.$$

Par des moyens classiques, on démontre que par un choix convenable de η et de x_p^0, on peut faire toutes les intégrales du second membre aussi petites que l'on veut, à l'exception de la quatrième, qui tend vers $g(y)$ quand $\eta \to 0$ et $x_p \to 0$.

Reste à voir si la solution (19) satisfait à la condition (15) qui assure l'unicité de la solution. Nous allons démontrer le résultat plus restrictif.

Si $g(x)$ satisfait à la condition plus restrictive que (14)

(14')
$$|g(x)| \leqslant \frac{A}{\varrho^q}, \quad q > \frac{3(p-1)}{2},$$

alors la condition d'unicité est satisfaite.

En effet, considérons dans R^p un point x^0 à la distance R de l'origine et, dans $x_p^0 = 0$ l'hypersphère ayant le centre à l'origine et le rayon, $\rho = R/2$. La distance de x^0 à un point de cette hypersphère sera évidemment plus grande que $R/2$. Ecrivons ensuite (19) sous la forme :

$$(\alpha)\quad u_1(x^0) = -4\lambda_1(\nu+1)\int\limits_{\substack{\rho<R/2\\ x_p=0}} x_p^0 g(x)\, E_{\nu+1}(z)\, d\sigma - 4\lambda_1(\nu+1)\int\limits_{\substack{\rho\geqslant R/2\\ x_p=0}} x_p^0 g(x)\, E_{\nu+1}(z)\, d\sigma.$$

Dans le domaine $\rho < R/2$, nous avons

$$|E_{\nu+1}(z)| \leqslant B, \qquad |g(x)| \leqslant \frac{A}{\rho^q}, \qquad q = \frac{3(p-1)}{2} + \alpha, \qquad \alpha > 0,$$

$$0 < x_p < R, \qquad d\sigma = \rho^{p-2}\, d\rho\, d\sigma_1$$

$d\sigma_1$ étant l'élément d'aire de l'hypersphère unité de l'espace à $p-1$ dimensions. Il résulte alors :

$$\left|\int\limits_{\substack{\rho\geqslant R/2\\ x_p=0}} x_p^0 g(x) E_{\nu+1}(z)\, d\sigma\right| \leqslant \frac{C_1}{R^{(p-3)/2+\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

C_1 étant une nouvelle constante.

En ce qui concerne la première intégrale du second membre de (α), compte tenu de l'expression asymptotique de $E_{\nu+1}$, pour $\lambda_1 < 0$, on a, pour R assez grand :

$$\left|\int\limits_{\substack{\rho<R/2\\ x_p=0}} x_p^0\, g(x)\, E_{\nu+1}(z)\, d\sigma\right| \leqslant \frac{C_2}{R^{(p-3)/2}} \leqslant \frac{C_2}{R^{(p-1)/2+\alpha}}.$$

Il résulte alors pour $u_1(x^0)$:

$$|u_1(x_0)| \leqslant \frac{A_1}{R^\beta}, \qquad \beta > \frac{p-3}{2},$$

c'est à dire la première relation (15). D'une manière analogue, on déduit la seconde relation (15). On peut donc énoncer le

Théorème 3. *La solution du problème de Dirichlet (13)—(13') avec $g(x)$ satisfaisant à (14) est donnée par (19). Si $g(x)$ satisfait à la condition plus restrictive (14) pour $x_p = 0$, alors la solution est unique.*

6. Etude du système (5). On constate d'abord que μ étant un nombre naturel, on a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_p E_\mu(z)) = \frac{A_\mu}{A_{\mu+1}} x_p E_{\mu+1}(z)\, A_{ir}(x_r - x_r^0) \qquad i, j \neq p,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i}(x_p E_\mu(z)) = \frac{A_\mu}{A_{\mu+2}} x_p E_{\mu+2}(z) A_{ir} A_{js}(x_r - x_r^0)(x_s - x_s^0) - \frac{A_\mu}{A_{\mu+1}} x_p E_{\mu+1}(z) A_{is},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_p}(x_p E_\mu(z)) = E_\mu(z) + (x_p)^2 \frac{A_\mu}{A_{\mu+1}} E_{\mu+1}(z),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_p^2}(x_p E_\mu(z)) = 3\frac{A_\mu}{A_{\mu+1}} x_p E_{\mu+1}(z) + (x_p)^3 \frac{A_\mu}{A_{\mu+2}} E_{\mu+2}(z);$$

et parsuite

$$(\mathfrak{L} - \lambda_1)(x_p E_\mu) = -\frac{A_\mu}{A_{\mu+1}}(\mu - \nu - 1) x_p E_{\nu+1}(z),$$

ce qui montre qu'une intégrale particulière de l'équation

$$(22)\qquad (\mathfrak{L} - \lambda_1)\, u_2 = u_1 \qquad u_1 = -\frac{1}{\mu+1} x_p E_{\mu+1}(z),$$

est

$$u_2 = \frac{A_{\mu+1}}{A_\mu}\frac{1}{\mu-\nu-1} x_p E_\mu(z).$$

À l'aide de cette remarque, on pourra trouver une intégrale de (22) dans des conditions plus générales :

Soit $g_1(x)$ une fonction définie pour $x_p = 0$ et satisfaisant à

$$(23)\qquad |g_1(x)| \leqslant \frac{A}{\rho^{(p-3)/2+1+\alpha}}, \qquad \alpha > 0,$$

A étant une constante et ρ, comme plus haut, le rayon vecteur dans l'hyperplan $x_p = 0$.

Considérons aussi la fonction

$$(24)\qquad u_1(x^0) = 2\frac{A_\nu}{A_{\nu+1}}\int\limits_{x_p=0} g_1(x)\, x_p^0 E_{\nu+1}(z)\, d\sigma.$$

Une intégrale de (22) qui satisfait à

$$u_2(x^0) = 0 \quad \text{pour} \quad x_p = 0,$$

est alors

$$u_2(x^0) = \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} \int_{x_p=0} g_1(x)\, x_p^0 E_\nu(z) d\sigma.$$

En effet, on s'assure d'abord que l'intégrale

$$\int_{x_p=0} g_1(x)\, E_\nu(z)\, d\sigma$$

existe et que, parsuite $u_2(x) = 0$ pour $x_p = 0$. Ensuite, par des calculs directs, comme ceux indiqués précédemment, on vérifie que $u_2(x)$ satisfait à (22).

En partant d'ici, on vérifie aussi que la solution de (22) qui satisfait à

$$u_2(x^0) = g_2(x^0), \qquad x_p = 0, \tag{25}$$

$g_2(x)$ étant une fonction continue sur $x_p = 0$, satisfaisant à

$$|\, g_2(x) \,| \leqslant \frac{A}{R^{(p-3)/2+\alpha}},$$

est

$$u_2(x_0) = \int_{(x_p=0)} g_2(x)\, x_p^0 E_{\nu+1}(z)\, d\sigma + \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} \int_{(x_p=0)} g_1(x)\, x_p^0 E_\nu d\sigma.$$

En répétant la même procédé on arrive au

Théorème 4. *Si $g_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ sont des fonctions définies sur la variété plane $x_p = 0$ et satisfont aux conditions*

$$|\, g_i(x) \,| \leqslant \frac{A}{\rho^{(p-3)/2+i-1+\alpha}}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k,) \tag{26}$$

A étant une constante positive et ρ le rayon vecteur dans cette variété, alors la solution du système (5) qui satisfait à

$$u_i(x) = g_i(x) \quad \text{pour} \quad x_p = 0\ , \tag{27}$$

est

$$u_1(x^0) = \int_{(x_p=0)} g_1(x)\, x_p^0 E_{\nu+1}(z)\, d\sigma,$$

$$u_2(x^0) = \int_{(x_p=0)} \left\{ g_2(x)\, E_{\nu+1}(z) + \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} g_1(x)\, E_\nu(z) \right\} x_p^0\, d\sigma,$$

(28) . . . . . .

$$u_k(x^0) = \int_{(x_p=0)} \left\{ g_k(x)\, E_{\nu+1}(z) + \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu} g_{k-1}(x)\, E_\nu(z) + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{A_{\nu+1}}{(k-1)!\, A_{\nu-k+2}} g_1(x)\, E_{\nu-k+2}(z) \right\} x_p^0\, d\sigma.$$

Afin que cette solution soit unique, il est suffisant qu'on ait :

$$|\, g_i(x) \,| \leqslant \frac{A}{\rho^{3(p-1)/2+\alpha}}, \tag{29}$$

qui est satisfaite d'elle même pour $k - 1 \geqslant p$. Si cette relation (29) n'est pas satisfaite, elle devra être considérée comme une condition supplémentaire d'unicité.

Comme la fonction vecteur $u(x^0)$ dépend linéairement de la fonction vecteur

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

on peut encore énoncer le

Théorème 5. *Si tous les λ_i sont négatifs et $\varepsilon > 0$ est donné arbitrairement, on peut trouver $\eta > 0$, tel que si*

$$|\, g_i(x) \,| \leqslant \frac{\eta}{\rho^{3(p-1)/2+\alpha}},$$

on ait

$$|\, u_i(x) \,| \leqslant \frac{\varepsilon}{\rho^{(p-1)/2+\alpha}}.$$

Ce résultat peut être considéré comme un analogue du théorème de stabilité de Liapounoff.

7. Etude d'un système non-linéaire. Considérons maintenant le système

$$\mathfrak{L}u = Au + F(x, u), \tag{30}$$

$\mathfrak{L}$ et A étant ceux définis à **2**, et satisfaisant encore à (12), $F(x, u)$ une fonction-vecteur satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) *$F(x, u)$ est une fonction définie sur $R^p \times R^n$ continue sur ce domaine et lipschitzienne par rapport à u ;*

b) *Si on remplace u par une fonction satisfaisant à*

$$|u_i| \leqslant M e^{\tau\sqrt{z}}, \quad M, \tau > 0, \tag{31}$$

alors F satisfait à

$$\int |F_i(x, u)| e^{\tau\sqrt{z}} dx \leqslant a_1 M, \quad a_1 < 1. \tag{32}$$

Proposons nous de trouver une solution de ce système qui satisfasse à

$$u_i(x) = \bar{g}_i(x), \text{ sur } x_p = 0. \tag{33}$$

les fonctions $\bar{g}_i(x)$ étant définies sur $x_p = 0$, et satisfaisant à des conditions du type (29).

Effectuons sur u la transformation S de (2) qui amène (30) à

$$\mathfrak{L}u = Ju + f(x, u), \tag{34}$$

où J est la matrice Jordan correspondante à A et f un vecteur

$$f = SF.$$

Posons aussi

$$g = S\bar{g}.$$

Le sous-système correspondant au diviseur élémentaire $(\lambda - \lambda_1)^k$ est

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}u_1 &= \lambda_1 u_1 + f_1(x, u), \\ \mathfrak{L}u_2 &= \lambda_1 u_2 + u_1 + f_2(x, u), \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{L}u_k &= \lambda_1 u_k + u_{k-1} + f_k(x, u). \end{aligned} \tag{35}$$

On se propose donc de résoudre le problème de Dirichlet pour le demi-espace $x_p \geqslant 0$, avec les conditions

$$u_i(x) = g_i(x) \text{ pour } x_p = 0, \tag{36}$$

les fonctions $g_i(x)$ étant définies pour $x_p = 0$, et satisfaisant à (29).

Soit $v_i(x)$ la solution du système homogène (5) associé à (35), qui satisfait à (36).

Considérons maintenant le point $M \in R^p_+$ donné par les coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, -x_p$.

Notons :

$$z' = \sqrt{-\lambda_1[a_{ij}(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) + (x_p + x_p^0)^2]}.$$

Alors la fonction

$$G_\nu(x^0, x) = \frac{1}{2}[E_\nu(z) - E_\nu(z')] \tag{37}$$

satisfait aux conditions suivantes :

$$G_\nu(x^0, x) = 0 \quad \text{pour} \quad x_p = 0$$

et, de plus, $G_\nu(x^0, x)$ est une solution élémentaire de l'opérateur $\mathfrak{L} - \lambda_1$.

Si nous considérons maintenant les fonctions

$$\begin{aligned} G_{\nu-1}(x^0, x) &= \frac{1}{2}[E_{\nu-1}(z) - E_{\nu-1}(z')], \\ &\dots\dots\dots\dots \\ G_{\nu-l}(x^0, x) &= \frac{1}{2}[E_{\nu-l}(z) - E_{\nu-l}(z')], \end{aligned}$$

et la matrice

$$G(x^0, x) = \begin{pmatrix} G_\nu & 0 & 0 & \dots & . \\ G_{\nu-1} & G_\nu & 0 & \dots & . \\ G_{\nu-2} & G_{\nu-1} & G_\nu & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \end{pmatrix}$$

on aura

$$G_{\nu-l}(x^0, x) = 0 \quad \text{pour} \quad x_p = 0$$

et encore

$$(\mathfrak{L} - \lambda_1) G_{\nu-l}(x^0, x) = G_{\nu-l-1}.$$

Posons

$$Z_\nu(z) = z^{2\nu} E_\nu(z) ;$$

$Z_\nu(z)$ est une fonction entière, dont l'ordre de croissance est $1/2$; soit encore τ son type. Nous avons utilisé déjà la relation

$$c_1^2 \sum_1^p (x_i - x_i^0)^2 \leqslant r^2 \leqslant c_2^2 \sum_1^p (x_i - x_i^0)^2.$$

Comme $\sqrt{\Sigma(x_i - x_i^0)^2}$ est la distance entre les points x et x^0, soient z_1 et z_0 les distances de ces points à l'origine : on déduit

$$|Z_\nu(z)| \leqslant Me^{\tau\sqrt{|z|}} \leqslant Me^{\tau\sqrt{z_1}} e^{\tau\sqrt{z_0}},$$

et de la même manière :

$$|Z_\nu(z')| \leqslant Me^{\tau\sqrt{|z'|}} \leqslant Me^{\tau\sqrt{z_1}} e^{\tau\sqrt{z_0}},$$

et d'ici :

$$|G(x^0, x)| \leqslant M_1 e^{\tau\sqrt{z_1}} e^{\tau\sqrt{z_0}}. \tag{38}$$

Des résultats analogues sont valables pour $G_{\nu-1}, G_{\nu-2}, \ldots$

Supposons maintenant que les composantes $f_i(x, u)$ de $f(x, u)$ satisfont aux conditions suivantes déduites des conditions 1) et 2) pour F :

1. *$f_i(x, u)$ définie sur $R_+^p \times R^n$ est continue sur ce domaine, bornée et lipschitzienne par rapport à u :*

$$|f_i(x, u^{(1)}) - f_i(x, u^{(2)})| \leqslant L(x) \sup_i (\max |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}|) \tag{39}$$

$L(x)$ étant une fonction qui satisfait à

$$nM_1 \int_{R_+^p} L(x)\, dx = \gamma < 1 : \tag{40}$$

2) *Si on remplace $u(x)$ dans $f(x, u)$ par une fonction vecteur qui satisfait à*

$$|u_i e^{-\tau\sqrt{z}}| \leqslant \mu = \text{const.}, \tag{41}$$

alors $f(x, u)$ satisfait à

$$\int_{R_+^p} |f_i(x, u)|\, e^{\tau\sqrt{z_1}}\, dx \leqslant a_1 \mu, \quad a_1 < 1. \tag{42}$$

3) *Si on introduit la norme :*

$$\|f\| = \sup_i (\max) |f_i(x, u)\, e^{-\tau\sqrt{z_1}}|), \tag{43}$$

alors on doit avoir :

$$\|v\| + 2\mu M_1 a_1 \leqslant M.$$

On a alors le

Théorème 6. *Sous les conditions 1), 2) et 3), le système (35) admet une solution dans la classe des fonctions qui satisfont à (41).*

En effet, le problème posé est équivalent à la résolution du système d'équations :

$$u(x^0) = v(x^0) + \int_{R_+^p} G(x^0, x) f(x, u)\, dx. \tag{44}$$

En posant :

$$Tu = v(x^0) + \int_{R_+^p} G(x^0, x) f(x, u)\, dx, \tag{45}$$

notre équation devient

$$u = Tu.$$

Or l'opérateur T admet un élément fixe. En effet on a :

$$(Tu)e^{-\tau\sqrt{z_0}} = v(x^0)^{-\tau\sqrt{z_0}} + \int_{R_+^p} e^{-\tau\sqrt{z_0}} G(x^0, x) f(x, u)\, dx,$$

où, comme plus haut :

$$z_1 = \sqrt{\sum_1^p x_i^2}, \quad z_0 = \sqrt{\sum_1^p (x_i^0)^2}.$$

On déduit d'ici :

$$|(Tu)_i e^{-\tau\sqrt{z_0}}| \leqslant |v_i e^{-\tau\sqrt{z_0}}| + \mu \int_{R_+^p} e^{\tau\sqrt{z_0}} |f_i(x, u)|\, dx,$$

c'est-à-dire :

$$\|Tu\| \leqslant \|v\| + 2\mu a_1 M_1 \leqslant M_1.$$

Il suit que T transforme l'ensemble (41) en lui même. De plus il est contractant, parce que

$$|(Tu^{(1)} - Tu^{(2)})_i| e^{-\tau\sqrt{z_0}} \leqslant \int_{R_+^p} |G(x^0, x)|\, L(x) \sum_1^n |u_i^{(1)} - u_i^{(2)}|\, dx,$$

et, compte tenu des remarques faites sur $G(x^0, x)$ et de la métrique induite par la norme définie par (34), on a :

$$\| Tu^{(1)} - Tu^{(2)} \| \leqslant nM_1 \| u^{(1)} - u^{(2)} \| \int_{R_+^p} L(x)\, dx \leqslant \alpha \| u^{(1)} - u^{(2)} \|,$$

c'est à dire

$$\rho(Tu^{(1)},\ Tu^{(2)}) \leqslant \alpha \rho(u^{(1)},\ u^{(2)}), \qquad \alpha < 1.$$

Il est aisé de voir que l'espace doué de cette métrique est complet. Comme l'opérateur T est contractant, il résulte que le système (35)—(36) admet une solution unique, dans la classe des fonctions qui satisfont à (41).

Corollaire. De la relation de contraction, il résulte que la constante M caractérisant la classe de fonctions à laquelle appartient u, satisfait à

$$\| u \| \leqslant M \leqslant 2\mu a_1 M + \| v \| ,$$

d'où

$$\| u \| \leqslant M \leqslant \frac{\| v \|}{2\mu a_1}, \tag{46}$$

qui donne une évaluation de u, en fonction des données sur $x_p = 0$.

8. Si toutes les racines caractéristiques λ_i de A sont négatives, on sait qu'on a

$$|J_\nu(z)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \qquad |Y_\nu(z)| = O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) \text{ quand } z \to \infty.$$

Il résulte donc

$$|G_\nu(x^0, x)| = O(z^{-\nu-\frac{1}{2}}) = O(z^{-\frac{p-1}{2}}). \tag{47}$$

Par suite de cette évaluation de G_ν, on peut démontrer le

Théorème 7. *Si toutes les racines caractéristiques de A sont négatives, $k < (p+1)/2$ et si $f(x, u)$ satisfait aux conditions suivantes*

1)

$$f(x, 0) = 0 ; \tag{48}$$

2) *Quand on remplace u par une fonction satisfaisant à :*

$$|u_i(x)| \leqslant a r^{-(p-3)/2+\alpha}, \left(a = \text{const.},\ \alpha > 0,\ r^2 = \sum_1^p x_i^2 \right), \tag{49}$$

$f(x, u)$ satisfait à

$$|f_i(x, u)| \leqslant M r^{-\gamma}, \qquad \gamma > \frac{p-1}{2} + \alpha ; \tag{50}$$

4) *$f(x, u)$ est lipschitzienne (39), avec $L(x)$ satisfaisant à*

$$n \int_{R_+^p} \sup_i |G_{\nu-i}(x^0, x)|\, L(x)\, dx < 1, \quad i = 1, 2, \ldots, p. \tag{51}$$

alors le système (35) à une solution unique satisfaisant à (36).

Pour la démonstration considérons d'abord un point $x_p^0 \in R_+^p$, à distance $R_1 + R_0$ de l'origine O, située dans l'hyperplan $x_p = 0$. Soit B_+ une demi-boule de centre O et rayon R_0, et B_1 une boule de centre x_0 et rayon η, $B_1 \cap B_+ = \emptyset$ et soit Ω l'ensemble du demi-espace R_+^p complémentaire à $B_1 \cup B_+$.

Considérons encore l'opérateur

$$Tu = v(x^0) + \int_{R_+^p} G(x^0, x) f(x, u)\, dx,$$

qu'on peut écrire encore sous la forme

$$Tu = v(x^0) + \int_{B_+} G(x^0, x) f(x, u)\, dx + \int_{B_1} G(x^0, x) f(x, u)\, dx +$$

$$+ \int_{\Omega} G(x^0, x) f(x, u)\, dx .$$

Évaluons maintenant ces intégrales :

a) Si R_1 est suffisament grand on a

$$|G_\nu(x^0, x)| \leqslant A_1 R_1^{-(p-1)/2} \quad \text{pour } x \in B_+$$

et

$$|G_{\nu-i}(x^0, x)| \leqslant A_1 R_1^{-(p-1)/2+i} \quad \text{pour } x \in B_+,$$

et comme $f(x, u)$ est bornée dans B_+, il résulte

$$|I_1| = \left| \int_{B_+} G(x^0, x) f(x, u)\, dx \right| \leqslant \frac{C_1}{R_1^{(p+1)/2+\alpha}} R_0^p ,$$

où

$$C_1 = A_1 \frac{\omega_p}{2} \text{ borne sup } |f(x, u)| ,\ x \in B_+.$$

Si on prend maintenant $R_1 = R_0^2$, avec

$$\beta\left(\frac{p+1}{2}-k\right)-p>\frac{p-3}{2}+\alpha \quad \text{et} \quad \beta>1,$$

c'est à dire

$$\beta>\frac{3(p-1)}{p+3-2k};$$

(ce qui est possible, vu l'hypothèse $k<(p+1)/2$), alors

$$|I_1|\leqslant\frac{C_1}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}.$$

b) Compte tenu du développement en série de $J_{-\nu}(z)$ et $Y_\nu(z)$, et des hypothèses sur $f(x, u)$,

$$|I_2|=\left|\int_{B_1}G(x^0, x)f(x, u)\,dx\right|\leqslant A_2\int_{B_1}z^{-2\nu}|f(x, u)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A_2M_1\omega_p}{(R_0+R_1-\eta)^\gamma}\int_0^{\eta}\frac{r^{p-1}}{r^{p-2}}\,dr=\frac{A_2M_1\omega_p\eta^2}{2(R_0+R_1-\eta)^\gamma}\leqslant\frac{C_2}{R_0^{(p-1)/2}}\leqslant\frac{C_2}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}.$$

c) Enfin, compte tenu du fait qu'à l'extérieur de B_1, G_ν est bornée — soit A_3 cette borne — on a

$$|I_3|=\left|\int_\Omega G(x^0, x)f(x, u)\,dx\right|\leqslant\frac{A_3\omega_p}{2}\int_{B_0}^{\infty}\frac{M_1}{r^\gamma}r^{p-1}\,dr=\frac{A_3M_1\omega_p}{2(\gamma-p)}\frac{1}{R_0^{\gamma-p}}\leqslant\frac{C_3}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}.$$

Il résulte alors, vu les hypothèses :

$$|(Tu)(x_0)|\leqslant\frac{Q}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}},$$

Q — une nouvelle constante.

Il résulte donc que l'opérateur T transforme la classe des fonctions qui satisfont à la condition (49) en elle même. Introduisons dans cet espace la norme (43) et la métrique induite par cette norme. On a alors

$$\|u^{(1)}-u^{(2)}\|\leqslant\int_{R_+^p}\|G(x^0, x)\|\,L(x)\,\|u^{(1)}-u^{(2)}\|\,dx,$$

et, vu l'hypothèse (51), il résulte que l'opérateur T est contractant et, par suite du théorème de point fixe de Banach, il résulte que l'équation

$$u=Tu$$

admet une solution unique, satisfaisant à la condition (49).

En ce qui concerne l'évaluation de $u(x)$ on a, donc :

$$\frac{a}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}\leqslant\|u\|\leqslant\|v\|+\frac{C_1+C_2+C_3}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}.$$

Supposons que les constantes C_1, C_2, C_3 (qui s'expriment en fonction de la borne de f, de la constante de Lipschitz etc.), satisfont à

$$C_1+C_2+C_3=a.$$

On remarquera encore que $\|v\|$ s'exprime linéairement en fonction des données $g_i(x)$ sur $x_p=0$. Il résulte alors d'une manière directe que si on donne arbitrairement une constante a, on peut trouver une constante b, telle que si :

$$|g_i(x)|\leqslant\frac{b}{R_0^{(p-1)/2+\alpha}},$$

alors

$$|u_i(x)|\leqslant\frac{a}{R_0^{(p-3)/2+\alpha}}.$$

C'est une manière de comportement à l'infini qui est analogue à la stabilité des solutions des équations différentielles.

BIBLIOGRAPHIE

1. Haimovici A. — *Sur le comportement de la solution d'un certain système d'équations hyperboliques*, Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik, Bd. 5 (1971), p. 141–170.
2. Watson G. N. — *A treatise on the theory of Bessel Functions*. Cambridge at the University Press, 1945.

ASUPRA COMPORTĂRII SOLUȚIILOR UNEI PROBLEME DIRICHLET

Rezumat

Se consideră ecuația (1) în care $\mathcal{L}$ este definit de (2) — a_{ij} fiind coeficienți constanți ai unei forme patratice pozitiv definite, B o matrice constantă nesingulară, iar u o funcție vector cu n componente. Cu ajutorul unei soluții fundamentale se găsește soluția sistemului (1) pentru semispațiul $x_p\geqslant 0$ care satisface condiția (13′) cu funcția $g(x)$ suficient de repede descrescătoare la infinit, sub forma (28). Dacă toate rădăcinile caracteristice ale matricei B sînt negative, atunci și soluția problemei este rapid descrescătoare și, cu o noțiune de stabilitate Liapunov analogă cu cea din teoria ecuațiilor diferențiale ordinare, se poate afirma că ea este stabilă.

Afirmații analoge se fac pentru sistemul (30), dacă $F(x, u)$ satisface anumite condiții restrictive.