donc

(60) $$f(x) = \lambda\,; \quad f(y) = \mu\,; \quad f(x + y) = \nu,$$

d'où

(61) $$f(x \circ y) = f(x) + f(y) - f(x + y).$$

Cette relation montre que, en général, f n'est pas un homomorphisme de groupes additifs.

3°. A partir des relations (52) et (53) :

(62) $$x = \lambda a + b' + x',$$

où $$E(x) = x',\ f(x) = \lambda.$$

Soit α un élément de K ; on a :

(63) $$\alpha x = c + y' = \mu a + (c' + y'),$$

où $E(\alpha x) = y'$, $f(\alpha x) = \mu$.

En utilisant (53) et (62) il résulte :

$$\alpha \divideontimes x = E(\alpha x) - \alpha E(x) = \alpha b - c = (\alpha\lambda - \mu)a + (\alpha b' - c')$$

d'où $f(\alpha \divideontimes x) = \alpha\lambda - \mu$, c'est-à-dire :

(64) $$f(\alpha \divideontimes x) = \alpha f(x) - f(\alpha x).$$

Si $\alpha = 1$, où par 1 on a noté l'unité de K, on obtient :

$$f(1 \divideontimes x) = 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. Creangă I. — *Sur une algèbre attachée à un opérateur dans un espace linéaire.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XI_A, fasc. 1 (1965), pp. 21—25.

2. Creangă I. — *Algèbres de Lie, non-distributives.* An. şt. Univ. Iaşi, Matematică, t. XVII, fasc. 1 (1971), pp. 17—23.

ASUPRA FUNCŢIEI „PARTEA ÎNTREAGĂ"

Rezumat

Această notă îşi propune o generalizare a funcţiei „partea întreagă", cunoscută în analiză şi teoria numerelor, la cazul unui grup abelian oarecare şi apoi la cazul unui spaţiu vectorial. Se introduc produse externe, care satisfac axiomele unei algebre Lie cu excepţia axiomei distributivităţii. Se obţin, de asemenea, operatori care prezintă o abatere de la legea de aditivitate.

SUR QUELQUES PROBLÈMES DE MÉTACOMPACITÉ

PAR

OLGA COSTINESCU

L'étude des espaces topologiques dont les recouvrements ouverts satisfont à certaines conditions a été stimulée par différents problèmes parmi lesquels il faut mentionner, en premier lieu, celui de la métrisabilité. En 1944, Dieudonné introduit la notion de paracompacité, en généralisant la notion de compacité, et étudie, dans ce cadre plus général, quelques problèmes sur les structures uniformes et sur la métrisabilité (voir [2]) ; mais, même avant ce moment, il y a eu des travaux qui ont essayé de donner des conditions de métrisabilité dans le langage des recouvrements. Dans ce sens, il faut mentionner les résultats obtenus par Alexandroff, Uryson et Tukey. Plus tard (en 1948), A. H. Stone a démontré qu'un espace topologique est paracompact si et seulement s'il est complètement normal, et que chaque espace métrisable est paracompact. Puis, Thron a montré que chaque espace pseudo-métrisable est paracompact (voir [7], pp. 220—224). Il faut mentionner encore le fait que les espaces qui généralisent les espaces quasi-compacts (voir [1], p. 96) en satisfaisant à des conditions plus faibles que celle de Borel-Lebesgue, intervient aussi dans l'étude d'autres problèmes importants, par exemple dans la théorie de la dimension (voir [4], pp. 278—280).

Dans ce cadre, assez général, les espaces métacompacts, hypocompacts, dénombrablement métacompacts et dénombrablement hypocompacts (voir [3], pp. 229—230) représentent les cas particuliers les plus intéressants.

Dans ce qui suit, nous allons étudier certains problèmes sur les espaces métacompacts ; d'abord quelques définitions.

Définition 1. *Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux familles de sous-ensembles de X : $\mathcal{A}'$ est, par définition, un raffinement de la famille $\mathcal{A}$ si quel que soit $A' \in \mathcal{A}'$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de manière que $A' \subset A$.*

Définition 2. *On dit qu'une famille $\mathcal{A}$ de sous-ensembles d'un ensemble X est ponctuellement finie si chaque point de X se trouve dans un nombre fini d'ensembles de $\mathcal{A}$ au plus.*

Définition 3. *Un espace topologique (X, τ) s'appelle métacompact si* : (a) *(X, τ) est un T_2-espace et si* (b) *tout recouvrement ouvert de l'espace X admet un raffinement ponctuellement fini qui est aussi un recouvrement ouvert pour l'espace considéré.*

Dans le cas où l'espace topologique (X, τ) satisfait seulement à la condition (b), nous disons que (X, τ) est *quasi-métacompact*.

Définition 4. *On appelle chaîne libre dans un espace topologique (X, τ)* (selon Hishario Tamano, voir [5]), *toute famille $\mathfrak{L} = \{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathfrak{P}(X)$ qui satisfait aux conditions : l'ensemble d'indices Γ est bien ordonné, $E_\gamma \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, et $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma = \emptyset$.*

Nous allons démontrer maintenant, un théorème, où l'on donne une condition nécessaire et suffisante de métacompacité.

Théorème 1. *Un T_2-espace (X, τ) est métacompact si et seulement si quelle que soit la chaîne libre $\mathfrak{L} = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathfrak{P}(X)$, il existe une chaîne libre $\mathfrak{L}' = \{B_j : j \in J\} \subset \mathfrak{P}(X)$ de manière que :*

1. *pour tout $j \in J$, il existe $\gamma_j \in \Gamma$ tel que $\overline{A}_{\gamma_j} \subset B_j$,*
2. *quel que soit le point $x \in X$, il existe $J_x \subset J$, J_x fini, tel que pour chaque $j \in J - J_x$ on a $x \in B_j$.*

Démonstration. Considérons un espaces métacompact (X, τ) et soit $\mathfrak{L} = \{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ une chaîne libre quelconque d'ensembles de X ; alors la famille $\mathfrak{A} = \{D_\gamma : D_\gamma = X - \overline{A}_\gamma, \gamma \in \Gamma\}$ est un recouvrement ouvert pour l'espace X, et donc il admet un raffinement, $\mathfrak{A}' = \{\Delta_j ; j \in J\} \subset \mathfrak{P}(X)$, ponctuellement fini, qui est aussi un recouvrement ouvert de l'espace X.

Vu le théorème de Zermelo (voir [4], p. 21), on peut supposer que l'ensemble J est bien-ordonné ; compte tenu du fait que $\mathfrak{L}$ est une chaîne libre dans X, et $\mathfrak{A}'$ est un recouvrement ouvert de l'espace considéré, il en résulte que quel que soit $j \in J$, l'ensemble $B_j = X - \Delta_j$ n'est pas vide.

En plus, chaque ensemble B_j, $j \in J$, est fermé, donc, la famille $\mathfrak{L}' = \{B_j ; B_j = X - \Delta_j, j \in J\}$ est une chaîne libre, et cette chaîne libre satisfait aux conditions mentionnées, dans l'énoncé du théorème ; en effet, vu que $\mathfrak{A}'$ est un raffinement de $\mathfrak{A}$, pour tout élément Δ_j de $\mathfrak{A}'$, il existe un ensemble $D_{\gamma_j} \in \mathfrak{A}$ tel que $\Delta_j \subset D_{\gamma_j}$, donc, quel que soit $j \in J$, il existe un indice $\gamma_j \in \Gamma$, de manière que $\overline{A}_{\gamma_j} \subset B_j$. Ensuite, du fait que le recouvrement $\mathfrak{A}'$ est ponctuellement fini, il résulte que tout point $x \in X$ appartient seulement à un nombre fini d'ensembles Δ_j ; il suit que pour chaque point $x \in X$ il existe un ensemble fini $J_x \subset J$ tel que pour tout $j \in J - J_x$ on ait $x \notin \Delta_j$, donc $x \notin \bigcap_{j \in J - J_x} B_j$.

Réciproquement, supposons que (X, τ) est un T_2-espace qui satisfait à la propriété énoncée et soit $\mathfrak{A} = \{D_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ un recouvrement ouvert arbitraire de l'espace X. Sans restreindre la généralité, on peut admettre que la famille d'indices Γ est bien-ordonnée et que pour chaque $\gamma \in \Gamma$ on a $D_\gamma \neq X$ (sinon, il y aurait $\gamma_0 \in \Gamma$ tel que $D_{\gamma_0} = X$ et alors la famille

$\{D_{\gamma_0}\}$ est un recouvrement de l'espace (X, τ) et, aussi, un raffinement ouvert, ponctuellement fini pour le recouvrement $\mathfrak{A}$, et on a cette situation sans aucune condition supplémentaire imposée à l'espace considéré). Il suit donc que la famille $\mathfrak{L} = \{A_\gamma : A_\gamma = X - D_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, est une chaîne libre dans l'espace donné et, par conséquent, conformément à l'hypothèse, il existe une autre chaîne libre, $\mathfrak{L}' = \{B_j, j \in J\}$, telle que les conditions (1) et (2) soient satisfaites. Il résulte alors que la famille $\mathfrak{A}' = \{\Delta_j ; \Delta_j = X - B_j, j \in J\}$ est un recouvrement ouvert de l'espace (X, τ), et pour chaque $j \in J$ il existe $\gamma_j \in \Gamma$ tel que $\overline{A}_{\gamma_j} \subset B_j$, donc $\mathfrak{A}' \ni \Delta_j \subset \subset D_{\gamma_j} \in \mathfrak{A}$ (donc $\mathfrak{A}'$ est un raffinement de la famille $\mathfrak{A}$). Compte tenu de la condition (2), on déduit immédiatement que chaque point $x \in X$ peut appartenir seulement à un nombre fini d'ensembles de la famille $\mathfrak{A}'$; par conséquent, cette famille est aussi ponctuellement finie, ce qui achève la démonstration du théorème.

Il faut remarquer que si nous n'imposons pas à l'espace (X, τ) la condition de séparation T_2, alors les conditions (1) et (2), considérées simultanément, donnent une condition nécessaire et suffisante de quasi-métacompacité.

En général, la propriété de quasi-métacompacité n'est pas héréditaire, mais si l'on impose certaines conditions supplémentaires, alors, la propriété indiquée a le caractère mentionné.

Théorème 2. *Si dans un espace quasi-métacompact, chaque sous-espace ouvert est quasi-métacompact, alors la propriété de quasi-compacité est héréditaire dans l'espace considéré.*

Démonstration. Soient (X, τ) un espace topologique qui satisfait à la condition formulée, et (X^*, τ^*) un sous-espace arbitraire de l'espace (X, τ) ; si $\{D^*_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ est un recouvrement τ^*-ouvert de l'espace X^*, alors il existe une famille d'ensembles τ-ouverts $\{D_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$ telle que $D^*_\gamma = D_\gamma \cap X^*$, qui est évidemment un recouvrement pour l'espace (D, τ_D), où $D = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma$ et τ_D est la trace de la topologie τ sur l'ensemble D. Il existe alors un raffinement τ-ouvert, ponctuellement fini, $\mathfrak{R} = \{R_j ; j \in J\}$, de la famille $\{D_\gamma ; \gamma \in \Gamma\}$, $\mathfrak{R}$ étant en même temps un recouvrement pour D. La classe d'ensembles τ^*-ouverts $\{R_j \cap X^* ; j \in J\}$ est un recouvrement du sous-espace (X^*, τ^*), elle est aussi un raffinement de la famille $\{D^*_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ et, de même, cette classe est ponctuellement finie, donc (X^*, τ^*) est quasi-métacompact.

Remarque. Si (X, τ) est un T_2-espace qui satisfait à la condition du théorème 2, alors chaque sous-espace de l'espace considéré est métacompact.

Théorème 3. *La propriété de quasi-métacompacité a un caractère héréditaire par rapport à la classe des sous-espaces fermés.*

On peut démontrer ce théorème en utilisant un procédé calqué sur celui employé dans la démonstration d'un théorème analogue établi dans

le cas des espaces quasi-compacts (voir [1], p. 99), et en tenant compte de théorème 1.

Théorème 4. *Si* (X_1, τ_1) *est un espace quasi-métacompact et* (X_2, τ_2) *est un espace quasi-compact, alors l'espace produit* $(X_1 \times X_2, \tau)$ *est quasi-métacompact.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A}$ un recouvrement τ-ouvert de l'espace produit ; alors, quel que soit le point $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ il existe un ensemble $D(x_1, x_2) \in \mathcal{V}(x_1) \cap \tau_1$ et un ensemble $\Delta(x_1, x_2) \in \mathcal{V}(x_2) \cap \tau_2$ tel que $D(x_1, x_2) \times \times \Delta(x_1, x_2)$ soit inclus dans un voisinage τ-ouvert du point (x_1, x_2), qui est un élément du recouvrement $\mathcal{A}$. Si nous considérons le point x_1 fixe dans l'espace X_1 et supposons que le point x_2 parcourt l'espace X_2, alors nous obtenons, par le même raisonnement, les familles d'ensembles $\{ D(x_1, x_2); x_2 \in X_2 \} \subset \mathcal{V}(x_1) \cap \tau_1$ et $\{ \Delta(x_1, x_2) ; x_2 \in X_2 \} \subset \tau_2$; en plus, on a $\bigcup_{x_2 \in X_2} \Delta(x_1, x_2) = X_2$. Vu que l'espace (X_2, τ_2) est quasi-compact, le recouvrement τ_2-ouvert $\{ \Delta(x_1, x_2) ; x_2 \in X_2 \}$ contient un sous-recouvrement fini, soit $\{ \Delta(x_1, x_2^i) ; i = 1, 2, \ldots, n(x_1) \}$. De même, on obtient un système fini de voisinages ouverts pour le point x_1, $\{ D(x_1, x_2^i) ; i = 1, 2, \ldots, n(x_1) \}$ et donc, $\bigcap_{i=1}^{n(x_1)} D(x_1, x_2^i) = D(x_1) \in \mathcal{V}(x_1) \cap \tau_1$. Évidemment, chaque ensemble $D(x_1) \times \times \Delta(x_1, x_2^i)$, $i = 1, 2, \ldots, n(x_1)$, est inclus dans un ensemble de la famille $\mathcal{A}$.

La famille d'ensembles ouverts $\mathcal{A}_1 = \{ D(x_1) ; x_1 \in X_1 \}$ est un recouvrement ouvert pour l'espace quasi-métacompact (X_1, τ_1), donc, elle admet un raffinement ouvert, ponctuellement fini, $\mathcal{R}_1 = \{ R_j ; j \in J \}$; $\mathcal{R}_1$ étant en même temps un recouvrement de l'ensemble X. Pour tout indice $j \in J$, il existe un ensemble $D(x_1^j) \in \mathcal{A}_1$ tel que $R_j \subset D(x_1^j)$ et la famille $\{ \Delta(x_1^j, x_2^i) ; i = 1, 2, \ldots, n(x_1^j) \}$ est, comme on a déjà précisé, un recouvrement τ_2-ouvert pour l'espace (X_2, τ_2). La famille d'ensembles ouverts dans l'espace produit $\mathcal{A}' = \{ R_j \times \Delta(x_1^j, x_2^i) ; i = 1, 2, \ldots, n(x_1^j) ; j \in J \}$ est un recouvrement de l'espace $(X_1 \times X_2, \tau)$; vu que tout ensemble $R_j \times \Delta(x_1^j, x_2^i)$ est inclus dans un ensemble $D(x_1) \times \Delta(x_1, x_2^i)$, qui, à son tour, est inclus dans un ensemble de la famille $\mathcal{A}$, il résulte que $\mathcal{A}'$ raffine le recouvrement $\mathcal{A}$. Pour finir la démonstration, nous devons montrer encore que $\mathcal{A}'$ est ponctuellement fini. Soit (x_1, x_2) un point arbitraire de l'espace $X_1 \times X_2$; alors, x_1 appartient à un nombre fini d'ensembles $R_j \in \mathcal{R}_1$ et le point x_2 se trouve dans un nombre fini d'ensembles $\Delta(x_1^j, x_2^i)$, donc (x_1, x_2) appartient seulement à un nombre fini d'ensembles du recouvrement ouvert $\mathcal{A}'$.

Remarque. Mentionnons qu'un procédé tout à fait analogue à celui utilisé dans la démonstration du théorème 4, nous permet de montrer que si on suppose que *l'espace* X_1 *est muni d'une structure topologique principale* (voir [5]) *et que l'espace* (X_2, τ_2) *est quasi-métacompact, alors l'espace produit* $X_1 \times X_2$ *est quasi-métacompact.*

Théorème 5. *Si l'espace topologique* (X, τ) *est localement compact et métacompact, alors* (X, τ) *est une somme d'espaces localement compacts dénombrables à l'infini.*

Démonstration. Si x est un point arbitraire dans l'espace considéré, alors il existe un voisinage compact du point x, et par conséquent, x admet un voisinage ouvert relativement compact ; notons par D_x un tel voisinage. La famille $\mathcal{A} = \{ D_x : x \in X \}$ est un recouvrement ouvert pour l'espace métacompact (X, τ), donc, il existe un raffinement ouvert, $\mathcal{R} = \{ R_j ; j \in J \}$, ponctuellement fini, qui est, en même temps, un recouvrement pour l'espace (X, τ) ; évidemment, chaque ensemble R_j, $j \in J$, est relativement compact. Le recouvrement $\mathcal{R}$, ponctuellement fini, admet un sous-recouvrement irréductible (voir [4], p. 225), (on dit qu'un recouvrement, $\mathcal{A}$, d'un espace X est irréductible si quelle que soit la famille $\mathcal{A}_0 \subset \subset \mathcal{A}(X)$ strictement incluse dans la famille $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_0$ n'est pas un recouvrement de l'ensemble X). Donc, sans restreindre la généralité, on peut supposer que $\mathcal{R}$ est un tel raffinement. A l'aide du recouvrement $\mathcal{R}$ nous introduisons une relation, $\mathcal{S}$, sur l'ensemble X ; disons que les points $x, y \in X$ sont dans la relation $\mathcal{S}$, $(x, y) \in \mathcal{S}$, si et seulement s'il existe une famille finie d'indices $J_0 \subset J$, $J_0 = \{ j_1, j_2, \ldots, j_n \}$ telle que $x \in R_{j_1}$, $y \in R_{j_n}$ et $R_{j_k} \cap R_{j_{k+1}} \neq \emptyset$ pour tout $k \in \{ 1, 2, \ldots, n \}$. La relation $\mathcal{S}$ est une équivalence sur X. Si $[x]$ est une classe d'équivalence par rapport à $\mathcal{S}$, z est un point arbitraire de la classe $[x]$, et R_{j_*} est un élément de $\mathcal{R}$ tel que $z \in R_{j_*}$, alors quel que soit $y \in R_{j_*}$, on a $(y, z) \in \mathcal{S}$, donc $y \in [x]$; par conséquent le voisinage ouvert R_{j_*} du point z est inclus dans $[x]$, cela signifie que $[x] \in \tau$. Par conséquent, on peut considérer l'espace (X, τ) comme somme de la famille de sous-espaces fermés et ouverts localement compacts $\{ ([x], \tau_{[x]}) ; x \in X \}$.

Soit y un point arbitrairement choisi dans l'espace $([x], \tau_{[x]})$ et $S_1 = = \bigcup \{ R_j ; R_j \in \mathcal{R}, R_j \ni y \}$; du fait que la famille $\mathcal{R}$ est ponctuellement finie, il résulte que l'ensemble ouvert S_1 est relativement compact dans le sous-espace $([x], \tau_{[x]})$, et son adhérence, par rapport à la topologie de cet espace, est un ensemble $\tau_{[x]}$-compact. Considérons ensuite, la famille $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{R}$ qui satisfait à la condition $A \cap S_1 \neq \emptyset$ quel que soit $A \in \mathcal{A}_2$. Compte tenu des propriétés de l'ensemble S_1 et du fait que $\mathcal{R}$ est un recouvrement irréductible, ponctuellement fini, il résulte que $\mathcal{A}_2$ est une classe finie et donc $S_2 = \bigcup \{ R_j ; R_j \in \mathcal{A}_2 \}$ est un ensemble relativement compact dans l'espace $[x]$.

En procédant d'une manière inductive, nous allons déterminer, par le procédé indiqué plus haut, une suite d'ensembles $\{ S_n \}_{n \in N} \subset \tau_{[x]}$, relativement compacts dans l'espace $([x], \tau_{[x]})$, où on a $S_n = \bigcup \{ R_j ; R_j \in \mathcal{R}, R_j \cap S_{n-1} \neq \emptyset \}$, et $\bigcup_{n \in N} S_n \in [x]$. Si z est un point arbitraire dans $[x]$, alors $(z, y) \in \mathcal{S}$, donc il existe une famille finie d'ensembles de $\mathcal{R}$, $\{ R_{j_1}, R_{j_2}, \ldots, R_{j_p} \}$, telle que $y \in R_{j_1}$, $z \in R_{j_p}$ et $R_{j_h} \cap R_{j_{h+1}} \neq \emptyset$ pour tout $h \in \{ 1, 2, \ldots, p-1 \}$; il en résulte que $R_{j_1} \subset S_1$, $R_{j_2} \subset S_2, \ldots, R_{j_p} \subset S_p$, donc $z \in S_p$. De cette manière, nous avons démontré que $[x] \subset \bigcup_{n \in N} S_n$, c'est-à-dire $[x] = \bigcup_{n \in N} S_n$. Donc

chaque sous-espace $([x], \tau_{[x]})$ de l'espace (X, τ) est localement compact, dénombrable à l'infini.

Conséquence. Du fait qu'un espace localement compact qui est somme d'espaces dénombrables à l'infini est paracompact (voir [1], p. 112), il résulte que dans la classe des espaces localement compacts qui sont des sommes d'espaces dénombrables à l'infini, la paracompacité est équivalente à la métacompacité.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Éléments de Mathématique. Topologie générale*. Livre III, chap. I, Paris, Hermann 1964.
2. Dieudonné J. — *Une généralisation des espaces compacts*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XXIII, 1964, pp. 65–76.
3. Dugundji J. — *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1968.
4. Engelking R. — *Outline of general topology*, P.W.N. Warszawa, 1968.
5. Steiner A. K. — *The lattice of topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. 122, nr. 2, 1966, pp. 37–56.
6. Tamano H. — *On some characterization of paracompactness*, Topology conference, Arizona State University, 1967, pp. 277 – 285.
7. Thron W. — *Topological structures*, Holt, Rinehart and Winston, Inc New York 1966.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE METACOMPACITATE

Rezumat

Nota conține cîteva rezultate cu privire la comportarea spațiilor evasi-metacompacte și metacompacte.

Teorema 1 formulează, folosind noțiunea de lanț într-un spațiu topologic, o condiție necesară și suficientă de metacompacitate în spațiile T_2. Se demonstrează apoi, două propoziții care precizează condiții suficiente pentru ca proprietatea de metacompacitate să aibă caracter ereditar (teoremele 2 și 3). În teorema 4 se dă o condiție suficientă pentru ca produsul a două spații topologice să fie un spațiu evasi-metacompact. Teorema 5 pune în evidență o proprietate a spațiilor care sînt local compacte și metacompacte. Acest rezultat conduce ușor la concluzia că în spațiile local compacte care sînt sume de spații numărabile la infinit, proprietatea de paracompacitate este echivalentă cu metacompacitatea.

SUR LES BI-ESPACES EXTRÊMEMENT DISCONTINUS

PAR

C. AMIHĂESEI

1. Soit X un ensemble, $\mathfrak{P}(X)$ la famille de ses sous-ensembles et F l'ensemble des fonctions $f: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$. On utilisera les définitions suivantes données par P. C. Hammer dans [4].

Si f est une fonction qui appartient à F alors :

1. f s'appelle *isotone* si $A \subset B$ implique $fA \subset fB$,
2. f s'appelle *extensive* si $e \subset f$, c'est-à-dire si $A \subset fA$,
3. f s'appelle *idempotente* si $f^2 = f$, c'est-à-dire si $ffA = fA$,
4. f s'appelle *expansive* si elle est isotone et extensive,
5. f s'appelle *fermeture* si elle est expansive et idempotente.

Les fonctions de fermeture additives seront nommées fonctions de fermeture Kuratowski. Sera noté par : P-l'ensemble des fonctions idempotentes, F_0-l'ensemble des fonctions isotones, F_1-l'ensemble des fonctions extensives, F_2-l'ensemble des fonctions expansives et F_3-l'ensemble des fonctions de fermeture. On dit qu'une fonction $f \in F$ vérifie la condition (E) si $A = fA$ implique $A = cfcA$, où cA est la complémentaire de l'ensemble A, $(cA = X - A)$. L'ensemble des fonctions qui vérifient la condition (E) est noté par F_4. J. C. Kelly [3] a défini un espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{L})$ comme un ensemble X avec deux topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{L}$ données sur cet ensemble ; on peut dire qu'un espace bitopologique est un ensemble X avec deux fonctions de fermeture Kuratowski $h, s \in F$. P. C. Hammer [5] a défini un espace isotone (X, f, g) comme un ensemble X avec deux fonctions isotones duales $f, g \in F$, (les fonctions f, g s'appellent duales si $f = cfc$). Dans cette note le *bi-espace* (X, f, g) sera défini comme un ensemble X avec deux fonctions arbitraires $f, g \in F$. Par conséquent, dans la définition d'un bi-espace on ne demande pas que les fonctions f, g de F appartiennent à une même classe F_i de fonctions. Dans la suite, on étudiera quelques classes de bi-espaces.

2. Rappelons la définition et quelques propriétés de la fonction *saturation*. Si $\mathfrak{R}$ est une relation binaire quelconque sur X, en notant comme d'habitude $\mathfrak{R}[A] = \{y : x \mathfrak{R} y \text{ pour } x \in A\}$, on obtient une fonction $s \in F$