REFERENCES

1. Eringen A. C. — *Theory of Micropolar Plates*. ZAMP, 18, 1 (1967), p. 12—30.
2. Eringen A. C. — *Linear Theory of Micropolar Elasticity*. J. Math. Mech., 15 (1966), p. 904—926.
3. Green A. E. and Naghdi P. M. — *Micropolar and Director Theories of Plates*. Q. J. Mech. appl. Math., 20, 2 (1967), p. 183—199.
4. Kuvshinski E. V. and Aero E. L. — *Continuum Theory of Asymmetric Elasticity. The Problem of „Internal" Rotation* (in Russian). Fiz. Tverd. Tela, 5 (1963), p. 2 591—2 598.
5. Pal'mov V. A. — *Basic Equations of Asymmetrical Elasticity* (in Russian). Prikl. Mat. i Mech., 28, 3, (1964), p. 401—408.
6. Şandru N. — *On Some Problems of the Linear Theory of the Asymmetric Elasticity*, Int. J. Engn. Sci., 4, (1966), p. 81—94.
7. Timoshenko S. and Woinovsky-Krieger S. — *Theory of Plates and Shells*. Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1959.
8. Reissner E. — *On Generalized Two-Dimensional Plate Theory*, I, II. Int. J. Solids Structures, 5 (1969), p. 525—532 and 629—637.
9. Gantmacher F. R., Krein M. G. — *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Sschwingungen mechanischer Systeme*. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.

ASUPRA ÎNCOVOIERII PLĂCILOR PLANE ÎN ELASTICITATEA ASIMETRICĂ

Rezumat

Unele aspecte ale teoriei plăcilor plane omogene de grosime constantă au fost studiate în [1, 3, 8]. În prezenta lucrare se stabilesc ecuațiile unei noi teorii a încovoierii plăcilor plane izotrope, teorie care se dovedește a fi mai simplă decît cea dată în [1, 8] și în același timp mai completă decît cea din [3].

În construcția acestei teorii, rolul fundamental îl joacă grupul de ipoteze (a)—(e) (Secț. 3). Trei dintre acestea: a), b), c_1) sînt similare ipotezelor lui Kirchhoff. Celelalte, c), d), c_2), caracterizează rotațiile locale și componentele $\mu_{\alpha 3}$ și μ_{33} ale tensorului micromomentelor. Autorul a introdus aceste ipoteze în scopul obținerii unei teorii aproximative ușor de aplicat în rezolvarea problemelor concrete de încovoiere a plăcilor. Pe baza acestor ipoteze se arată că deformarea plăcii poate fi caracterizată cu ajutorul a trei funcții de două variabile: deplasarea transversală a planului median $w(x_1, x_2)$ și componentele $\Phi_\rho(x_1, x_2)$, ($\rho = 1, 2$) ale vectorului rotației locale în acest plan.

Se introduc momentele încovoietoare, forțele transversale generalizate și rezultatele micromomentelor prin formulele (3.13) și se stabilește legătura acestora cu funcțiile de mai sus ((3.14)—(3.16)). Ecuațiile de echilibru ale plăcii precum și condițiile naturale la limită pe care w și Φ_ρ trebuie să le satisfacă ((4.8) și (4.9) — Secț. 4) se deduc din principiul variațional al lui Lagrange. În ultima parte a lucrării (Secț. 5) se demonstrează patru teoreme care prezintă importanță pentru aplicații practice și mai ales pentru rezolvarea aproximativă a problemelor la limită. Ultima dintre acestea este o teoremă de unicitate.

ASUPRA UNEI METODE DE REDUCERE A PERTURBAȚIEI APLICATĂ LA SISTEME CU PARAMETRU MIC

DE

CONSTANTIN SIMIRAD

1. Introducere. În [1] R. F. Arenstorf a dat o metodă de reducere a termenului perturbator $f(t, x)$ la sisteme de forma:

$$\dot{x} = A(x) + f(t, x)$$

valabilă pentru un interval finit de timp $0 \leq t \leq t_0$ și $x \in D \subset C^n$, D fiind un compact, $f(t, x)$ fiind o perturbație convenabil de mică.

În lucrarea de față adaptăm această metodă la sisteme cu parametru mic de forma:

$$\dot{x} = A(x) + \varepsilon f(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

extinzînd intervalul de timp la semiaxa pozitivă R_+, $x \in D \subset C^n$, D fiind de asemenea un compact, iar $f(t, x, \varepsilon)$ mărginită în domeniul său de definiție.

Extinderea intervalului de timp la semiaxă permite, în plus, unele rezultate referitoare la stabilitatea soluției banale a sistemului perturbat.

Metoda lui R. F. Arenstorf de reducere a perturbației, extinsă la semiaxă, aplicată la sisteme autonome cu perturbații periodice care au proprietatea (n), (vezi mai jos), conduce la existența soluțiilor periodice pentru sistemul (1).

2. Reducerea termenului perturbator. Vom presupune că funcția $A(x)$ are derivatele parțiale de ordinul întîi și al doilea continue, iar $f(t, x, \varepsilon)$ satisface condițiile obișnuite de regularitate.

Admitem că sistemul generator

$$\dot{x} = A(x) \tag{2}$$

are soluția $x = \varphi(t, \zeta)$ cu $\varphi(0, \zeta) = \zeta$.

Considerăm schimbarea de variabilă dată de

$$x^* = x + \tau(t, x, \varepsilon), \tag{3}$$

unde x este o soluție a sistemului (1), iar funcția $\tau(t, x, \varepsilon)$ este o soluție a sistemului:

$$\tau_t(t, x, \varepsilon) + \tau_x(t, x, \varepsilon) A(x) = A_x(x)\tau(t, x, \varepsilon) - \varepsilon f(t, x, \varepsilon). \tag{4}$$

Derivînd (3) obținem:

$$\dot{x}^* = A(x^*) - A_x(x)\tau(t, x, \varepsilon) - O(|\tau|^2) + \\ + \tau_t(t, x, \varepsilon) + \tau_x(t, x, \varepsilon) + \varepsilon f(t, x, \varepsilon) + \varepsilon\tau_x(t, x, \varepsilon) f(t, x, \varepsilon)$$

și folosind (4) rezultă:

$$\dot{x}^* = A(x^*) - O(|\tau|^2) + \varepsilon\tau_x(t, x, \varepsilon) f(t, x, \varepsilon). \tag{5}$$

Presupunem că $\det|\varphi_x(-t, x)| \neq 0$ și că este posibil să restrîngem domeniul D la domeniul $D' \subset D$, cu proprietatea că dacă $x \in D'$, atunci $\varphi(-t, x) \subset D$, pentru $t \in R_+$. În acest caz o soluție a sistemului (4) este dată de R. F. Arenstorf în [1] de forma:

$$\tau(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon \int_0^t \varphi_x^{-1}(-s, x) f(t-s, \varphi(-s, x), \varepsilon) ds, \tag{6}$$

valabilă pentru $t \in R_+$ și $x \in D' \subset D$.

Presupunem că

$$\int_0^\infty |\varphi_x^{-1}(-t, x)|\, dt < M \qquad \text{pentru } x \in D'. \tag{7}$$

În această ipoteză rezultă inegalitatea:

$$\|\tau(t, x, \varepsilon)\| < \varepsilon M \|f(t, x, \varepsilon)\|, \tag{8}$$

unde definim norma prin

$$\|f(t, x, \varepsilon)\| = \sup_{\substack{x \in D \\ t \in R_+ \\ 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0}} |f(t, x, \varepsilon)|.$$

Pentru evaluarea noului termen perturbator în (5), vom restrînge domeniul D' la domeniul $D'' \subset D' \subset D$ cu proprietatea că dacă $x'' \in D''$ și $\|x'' - x\| < \rho$ atunci $x \in D'$. Aplicînd formula integrală a lui Cauchy obținem:

$$\|\tau_x(t, x, \varepsilon)\| \leq n \max_{1 \leq i, j \leq n} \left| \frac{\partial \tau_i(t, x, \varepsilon)}{\partial x_j} \right| < n\varepsilon M \|f\| \rho^{-1}. \tag{9}$$

Notînd termenul perturbator din (5) cu

$$\bar{g}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon\tau_x(t, x, \varepsilon) f(t, x, \varepsilon) - O(\|\tau(t, x, \varepsilon)\|^2),$$

obținem inegalitatea:

$$\|\bar{g}(t, x, \varepsilon)\| < \varepsilon^2 nM \|f\|^2 \rho^{-1} + \varepsilon^2 KM^2 \|f\|^2,$$

unde $K = \sup_{x \in D} |A_{xx}(x)|$.

Fie $h = \max\{nM, KM^2\}$, atunci rezultă inegalitatea:

$$\|\bar{g}(t, x, \varepsilon)\| < \varepsilon^2 h \|f\|^2 (1/\rho + 1).$$

Pentru a afla inversa schimbării de variabilă dată de (3) vom restrînge domeniul D'' la domeniul $D' \subset D''$ cu proprietatea că dacă $x^* \in D'$ și $\|x^* - x\| < \rho/n$, atunci $x \in D''$.

Considerăm sfera $S(x^*, \rho/n) \subset D'$ și aplicația

$$u(t, x) = x^* - \tau(t, x, \varepsilon). \tag{10}$$

Aceasta transformă S în S pentru $t \in R_+$; în adevăr $u(t, x) \in S$, deoarece $\|u(t, x) - x^*\| < \varepsilon M \|f\| < \rho/n$, pentru

$$\varepsilon < \frac{\rho}{nM\|f\|}. \tag{11}$$

Afirmăm că aplicația (10) este o contracție; în adevăr:

$$\|u(t, x) - u(t, x')\| \leq \|\tau_x\| \cdot \|x - x'\| < \varepsilon nM \|f\| \rho^{-1} \cdot \|x - x'\| \tag{12}$$

și cu ε din (11) evident avem $\varepsilon nM \|f\| \rho^{-1} < 1$.

Notînd șirul aproximantelor succesive cu $u_n(t, x^*) = u(u_{n-1}(t, x^*))$, și cu $u_0(t, x^*) = x^*$, prin inducție completă rezultă:

$$u_n(t, x^*) \subset S(x^*, \rho/n).$$

Șirul $u_n(t, x^*)$ converge uniform pentru $t \in R_+$, $x^* \in D^*$, la o funcție

$$x(t) = x^* - \sigma(t, x^*, \varepsilon). \tag{3'}$$

Comparînd (3) cu (3') rezultă $\tau(t, x, \varepsilon) = \sigma(t, x^*, \varepsilon)$.

Șirul derivatelor totale în raport cu t este de asemenea uniform convergent. În adevăr

$$\frac{du_0(t, x^*)}{dt} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{13}$$

$$\frac{du_n(t, x^*)}{dt} = -\tau_t(t, u_{n-1}(t, x^*), \varepsilon) - \tau_x(t, u_{n-1}(t, x^*), \varepsilon) \frac{du_{n-1}}{dt}.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Din sistemul (4) și ipoteza $\|A_x(x)\| < K_1$, obținem:

$$\|\tau_t(t, x, \varepsilon')\| < \|A\| n\varepsilon \|f\| M\rho^{-1} + K_1 \varepsilon M \|f\| + \varepsilon \|f\|.$$

Vom presupune că $\| \tau_x \| < \| \tau_t \|$. Inegalitatea inversă sau egalitatea celor două cantităţi nu afectează rezultatul, deoarece atît $\| \tau_x \|$ cît şi $\| \tau_t \|$, pentru ε convenabil, pot fi considerate subunitare.

Atunci

$$
(14) \qquad
\begin{aligned}
&\frac{du_0(t, x^*)}{dt} = 0, \\
&\frac{du_1(t, x^*)}{dt} \leqslant \| \tau_t \|, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{du_n(t, x)}{dt} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \| \tau_t \|^k = \| \tau_t \| \frac{1 - \| \tau_t \|^n}{1 - \| \tau_t \|},
\end{aligned}
$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

şi deci şirul derivatelor totale în raport cu t este uniform mărginit.

Şirul (13) este de asemenea şir Cauchy. În adevăr

$$
\left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_{n-1}}{dt} \right\| \leqslant \left\{ \| \tau_{tx} \| + \left\| \frac{du_{n-1}}{dt} \right\| \cdot \| \tau_{xx} \| \right\} \| u_{n-1} - u_{n-2} \| +
$$

$$
+ \| \tau_x \| \cdot \left\| \frac{du_{n-1}}{dt} - \frac{du_{n-2}}{dt} \right\| <
$$

$$
< A \| u_{n-1} - u_{n-2} \| + \| \tau_x \| \cdot \left\| \frac{du_{n-1}}{dt} - \frac{du_{n-2}}{dt} \right\|,
$$

deoarece derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei $\tau(t, x, \varepsilon)$ sînt presupuse mărginite, iar şirul (13) este uniform mărginit, constanta A fiind

$$
\| \tau_{tx} \| + \| \tau_{xx} \| \sup_{\eta \in N} \left\| \frac{du_{n-1}}{dt} \right\|.
$$

Aplicînd inegalitatea de mai sus de k ori, obţinem:

$$
\left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{du_{n-1}}{dt} \right\| < A \| u_{n-1} - u_{n-2} \| + \| \tau_x \| [A \| u_{n-2} - u_{n-3} \| + \cdots
$$

$$
+ \| \tau_x \| \cdot \| u_{n-k} - u_{n-k-1} \|] + \| \tau_x \|^k \cdot \left\| \frac{du_{n-k}}{dt} - \frac{du_{n-k-1}}{dt} \right\|.
$$

Dar şirul $u_n(t, x^*)$ este şir Cauchy, iar $\| \tau_x \| < 1$ pentru ε convenabil ales şi deci alegînd n şi k suficient de mari, ţinînd cont de faptul că şirul (13) este uniform mărginit, rezultă că este Cauchy şi deci uniform convergent. Cum $\tau_t(t, x, \varepsilon)$ şi $\tau_x(t, x, \varepsilon)$ sînt uniform continue în D^*, rezultă trecînd la limită în (13)

$$
\sigma_t = (I + \tau_x(t, x, \varepsilon))^{-1} \tau_t(t, x, \varepsilon),
$$

deoarece şirul $[du_n(t, x^*)]/dt$ converge uniform la $-[d\sigma(t, x^*, \varepsilon)]/dt$.

Revenind la noua funcţie perturbatoare, vom nota cu

$$
\varepsilon g(t, x^*, \varepsilon) = \bar{g}(t, x^*, \varepsilon)
$$

şi deci sistemul (1) devine:

(15) $\dot{x}^* = A(x^*) + \varepsilon g(t, x^*, \varepsilon)$ pentru $t \in R_+$, $x^* \in D^* \subset D$, cu $\| g(t, x^*, \varepsilon) \| < \varepsilon h \| f \|^2 (1/\rho + 1)$. Notăm cu $\bar{\varepsilon}^2 = \varepsilon h$ şi facem ipoteza

$$
(16) \qquad 1/\rho + 1 < (\bar{\varepsilon} \| f \|)^{-\omega} \qquad \text{cu } 0 < \omega < \frac{1}{2},
$$

atunci obţinem

$$
(17) \qquad \| g(t, x^*, \varepsilon) \| < (\bar{\varepsilon} \| f \|)^{2-\omega}.
$$

Alegînd cel mai convenabil ε încît raţionamentele anterioare să rămînă valabile împreună cu $\bar{\varepsilon} \| f \| < 1$, termenul perturbator $f(t, x, \varepsilon)$ din sistemul (1) este mai mare decît termenul perturbator $g(t, x^*, \varepsilon)$ din sistemul (15), aşa încît putem enunţa următoarea

Teorema 1. *Pentru ε suficient de mic, în condiţia (7) şi $D^* \neq \emptyset$, D^* fiind cel precizat anterior, există o transformare de forma $x = x^* - \sigma(t, x^*, \varepsilon)$, care transformă sistemul (1) în sistemul (15) cu noul termen perturbator satisfăcînd inegalitatea (17).*

Sistemul (15) are aceeaşi formă ca şi sistemul (1), avînd aceleaşi proprietăţi pe domeniul $D^* \subset D$, aşa încît teorema 1 se poate aplica din nou.

În vederea acestui scop vom nota elementele întîlnite la primul pas cu indicele unu.

Fie deci sistemul

(1) $\dot{x}_1^* = A(x_1^*) + \varepsilon g_1(t, x_1^*, \varepsilon)$ pentru $t \in R_+$ şi $x_1^* \in D_1^* \subset D$, precum şi transformarea

(3″) $x_1^* = x_2^* - \sigma_2(t, x_2^*, \varepsilon)$, atunci avem inegalităţile

$$
\| \tau_2(t, x_1^*, \varepsilon) \| < \varepsilon M \| g_1(t, x_1^*, \varepsilon) \|
$$

$$
\| \tau_{2x}(t, x_1^*, \varepsilon) \| < n \varepsilon M \| g_1 \| \rho_2^{-1}
$$

$$
\| g_2(t, x_1^*, \varepsilon) \| < n \varepsilon M \| g_1 \|^2 \rho_2^{-1} + K \varepsilon M^2 \| g_1 \|^2 < (\bar{\varepsilon} \| g_1 \|^2) \left(\frac{1}{\rho_2} + 1 \right).
$$

Vom face acum ipoteza generală

$$
(16') \qquad \frac{1}{\rho_{n+1}} + 1 < (\bar{\varepsilon} \| g_n \|)^{-\omega} \qquad \text{cu } 0 < \omega < \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots
$$

unde $g_0(t, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon)$. Presupunem că

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \rho < +\infty. \tag{16''}$$

Această ipoteză este necesară pentru ca aplicînd repetat teorema 1 să nu epuizăm întreg domeniul D.

Pentru aplicarea de un număr finit de ori a teoremei 1, condiția (16′) nu este esențială deoarece putem alege ε încît ea să fie satisfăcută.

Totuși dacă am alege de fiecare dată ε încît să fie satisfăcută (16′) s-ar putea ca $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, deoarece $\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$.

Cu ipoteza (16′) obținem șirul de inegalități:

$$\begin{aligned}
&\|g_1\| < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{2-\omega}\\
&\|g_2\| < (\bar{\varepsilon}\|g_1\|)^{2-\omega} < (\|g_1\|)^{2-\omega} < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(2-\omega)^2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\|g_n\| < (\bar{\varepsilon}\|g_{n-1}\|)^{2-\omega} < (\|g_{n-1}\|)^{2-\omega} < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(2-\omega)^n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{17}$$

ar pentru funcțiile $\tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)$ obținem:

$$\|\tau_2(t, x^*_1, \varepsilon)\| < \varepsilon M \|g_1\| < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{2-\omega},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\|\tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\| < \varepsilon M \|g_{n-1}\| < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(2-\omega)^{n-1}}, \tag{18}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Fie $D^*_0 \subset D_n$ pentru $n = 1, 2, \dots$ și $D^*_0 \neq \emptyset$, atunci din (17) rezultă că $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 0$.

Considerăm seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon). \tag{19}$$

Aceasta este absolut și uniform convergentă. În adevăr, deoarece $2 - \omega < 3/2$ atunci $(2-\omega)^n > n(2-\omega)$ pentru $n > 6$ și obținem:

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\right| < K(\varepsilon) + \sum_{n=7}^{\infty} [(\bar{\varepsilon}\|f\|)^{2-\omega}]^{n-1} = K(\varepsilon) + \frac{(\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(2-\omega)}}{1 - (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{2-\omega}},$$

unde $K(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{6} \|\tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\|$.

Cum $x^*_n = x + \tau_1(t, x, \varepsilon) + \dots + \tau_n(t, x + \dots + \tau_{n-1}(t, x, \varepsilon), \varepsilon)$, atunci trecînd la limită obținem:

$$x^* = x + \tau(t, x, \varepsilon), \text{ unde } \tau(t, x, \varepsilon) \text{ este suma seriei (19).} \tag{20}$$

Pentru seria derivatelor parțiale în raport cu x avem șirul de inegalități:

$$\begin{aligned}
&\|\tau_{1x}(t, x, \varepsilon)\| < n M \varepsilon \|f\| \rho_1^{-1} < \bar{\varepsilon}^2 \|f\| \rho_1^{-1} < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{1-\omega},\\
&\|\tau_{2x}(t, x^*_1, \varepsilon)\| < (\bar{\varepsilon}\|g_1\|)^{1-\omega} < \|g_1\|^{1-\omega} < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(1-\omega)(2-\omega)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\|\tau_{nx}(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\| < \|g_{n-1}\|^{1-\omega} < (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(1-\omega)(2-\omega)^{n-1}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Deci

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \tau_{nx}(t, (x^*_{n-1}, \varepsilon)\right| < \bar{K}(\varepsilon) + \frac{(\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(1-\omega)(2-\omega)}}{1 - (\bar{\varepsilon}\|f\|)^{(1-\omega)(2-\omega)}}, \tag{22}$$

unde $\bar{K}(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{6} \|\tau_{nx}(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\|$, $x^*_0 = x$ și este o serie absolut și uniform convergentă la $\tau_x(t, x, \varepsilon)$.

În ce privește seria derivatelor în raport cu t, convergența rezultă din faptul că funcțiile $\tau_{n_t}(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)$ verifică sistemul:

$$\begin{aligned}
\tau_{n_t}(t, x^*_{n-1}, \varepsilon) + \tau_{n_x}(t, x^*_{n-1}, \varepsilon) A(x^*_{n-1}) &= A_x(x^*_{n-1}) \tau_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon)\\
&\quad - \varepsilon g_n(t, x^*_{n-1}, \varepsilon),
\end{aligned} \tag{4}$$

și deci $\sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_{n_t}\| < \|A\| \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_{n_x}\| + K_1 \sum_{n=1}^{\infty} \|\tau_n\| + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|$.

Seria (22), pentru ε convenabil ales, are suma suficient de mică încît inversa funcției din (20) se poate obține pe aceeași cale ca și la primul pas. Fie inversa

$$x = x^* - \sigma(t, x^*, \varepsilon). \tag{23}$$

Cu transformarea (23) sistemul (1) devine

$$x^* = A(x^*) \tag{24}$$

a cărui soluție este $x^* = \varphi(t, \zeta)$. cu $x^*(0) = \varphi(0, \zeta) = \zeta$ pentru $\zeta \in D^* \subset D^*_0$, D^* fiind domeniul pe care există inversa (23).

Soluția sistemului (1) este atunci de forma:

$$x(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta) - \sigma(t, \varphi(t, \zeta), \varepsilon),$$

cu $x(0, \zeta) = \zeta$, deoarece $\sigma(0, \zeta, \varepsilon) = \tau(0, x(0, \zeta), \varepsilon) = 0$.

Observăm că

$$\lim_{\varepsilon\to 0} x(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta) \text{ deoarece}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma(t, x^*, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \tau(t, x, \varepsilon) = 0.$$

3. Stabilitatea soluției sistemului perturbat. Să presupunem că $A(0) = 0$ și $f(t, 0, \varepsilon) \equiv 0$. Atunci putem demonstra următoarea

Teorema 2. *Dacă soluția banală a sistemului generator (2) este respectiv stabilă, uniform stabilă, asimptotic stabilă, uniform asimptotic stabilă, atunci, în condițiile cînd transformarea (23) reduce termenul perturbator, și soluția banală a sistemului perturbat este respectiv stabilă, uniform stabilă, asimptotic stabilă, uniform asimptotic stabilă, dacă* $\det \| I - \tau_x(t, x, \varepsilon) \| \neq 0$.

În adevăr, deoarece sîntem în condițiile de existență și unicitate a soluției sistemului (1) și (2), rezultă că $\varphi(t, 0) \equiv 0$, pentru că $\varphi(0, 0) = 0$. Din (6) se vede că $\tau(t, 0, \varepsilon) \equiv 0$ și atunci din (3) rezultă că pentru $x = 0$, $x^* = 0$.

Cum $\tau(t, x, \varepsilon) = \sigma(t, x^*, \varepsilon)$ rezultă că $\sigma(t, 0, \varepsilon) \equiv 0$.

Prin inducție completă rezultă că

$$\tau_i(t, 0, \varepsilon) \equiv \sigma_i(t, 0, \varepsilon) \equiv 0 \qquad i = 1, 2, \ldots.$$

Derivînd funcția $\tau(t, x, \varepsilon)$ în raport cu x rezultă:

$$\tau_x(t, x, \varepsilon) = \sigma_{x^*}(t, x^*, \varepsilon)\, x_x^* = \sigma_{x^*}(t, x^*, \varepsilon)\,(I - \tau_x(t, x, \varepsilon)),$$

și deci

$$\| \sigma_{x^*}(t, x^*, \varepsilon) \| \leq \| \tau_x(t, x, \varepsilon) \| \,.\, \| I - \tau_x(t, x, \varepsilon) \|^{-1},$$

adică derivata funcției $\sigma(t, x^*, \varepsilon)$ în raport cu x^* este mărginită.

Considerăm soluția sistemului perturbat obținută prin metoda reducerii termenului perturbator

$$x(t, t_0, \zeta_0) = \varphi(t, t_0, \zeta_0) - \sigma(t, \varphi(t, t_0, \zeta_0), \varepsilon).$$

Deoarece soluția sistemului generator este stabilă rezultă că $\| \varphi(t, t_0, \zeta_0) \| < \varepsilon/2$ pentru $\| \zeta_0 \| < \delta(t_0, \varepsilon/2)$ și $t \geq t_0$, $\varepsilon > 0$.

Cum funcția $\sigma(t, x^*, \varepsilon)$ are derivata în raport cu x^* mărginită, rezultă că $\| \sigma(t, \varphi(t, t_0, \zeta_0), \varepsilon) \| < \varepsilon/2$ pentru $\| \zeta_0 \| < \delta_1$.

Alegem $\delta_2 = \min\{\delta_1, \delta(t_0, \varepsilon/2)\}$ și atunci $\| x(t, t_0, \zeta_0) \| < \varepsilon$ pentru $\| \zeta_0 \| < \delta_2(t_0, \zeta_0)$ oricare ar fi $t \geq t_0$.

Stabilitatea uniformă rezultă în mod asemănător.

Presupunem că soluția banală a sistemului generator este asimptotic stabilă, adică este stabilă și $\lim_{t\to\infty} \varphi(t, t_0, \zeta_0) = 0$. Din cele arătate pînă acum

rezultă că soluția sistemului perturbat este stabilă și deoarece $\sigma(t, 0, \varepsilon) \equiv 0$, cum această funcție este continuă, rezultă $\lim_{t\to\infty} x(t, t_0, \zeta_0) = 0$.

Cazul stabilității uniform asimptotice rezultă evident din cele spuse anterior.

4. Existența soluțiilor periodice. Considerăm sistemul (1) cu $f(t, x, \varepsilon)$ ω-periodică în t uniform în raport cu celelalte variabile. Presupunem că sistemul generator (2) admite soluția ω-periodică $\varphi(t, \zeta)$. Evident condiția (7) nu mai este satisfăcută.

În locul condiției (7) vom presupune că sistemul (1) are următoarea proprietate:

$$\text{(n)} \qquad \int_0^\omega \varphi_x^{-1}(-s, x) f(t - s, \varphi(-s, x), \varepsilon)\, ds \equiv 0.$$

Definiție. *Sistemul (1) are proprietatea* (n) *dacă transformările date de (3') conservă proprietatea de ortogonalitate a noilor termeni perturbatori pe* $\varphi_x^{-1}(-s, x)$.

Presupunem că lucrăm în condițiile de la secțiunea a doua, fără condiția (7), pe care o înlocuim cu ipoteza că sistemul (1) are proprietatea (n). Ultima ipoteză exprimă faptul că funcțiile $\tau_n(t, x_{n-1}^*, \varepsilon)$ sînt ω-periodice și definim norma prin

$$\| \tau(t, x, \varepsilon) \| = \sup_{\substack{0 \leq t \leq w \\ x \in D \\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0}} \left| \int_0^t \varphi_x^{-1}(-s, x) f(t - s, \varphi(-s, x), \varepsilon)\, ds \right|.$$

Observăm că aplicînd transformarea (3') sistemului (1), în noul sistem obținut, termenul perturbator este de asemenea ω-periodic. Acest lucru rezultă din faptul că $g(t, x^*, \varepsilon) = \tau_x(t, x, \varepsilon) f(t, x, \varepsilon) - O(|\tau|^2)$ iar membrul al doilea este funcție ω-periodică.

Raționamentele din secțiunea a doua se pot repeta, și de data aceasta conduc la faptul că $\tau(t, x, \varepsilon)$ este ω-periodică în t deoarece este limita unei serii uniform convergente de funcții ω-periodice.

Dar $\tau(t, x, \varepsilon) = \sigma(t, x^*, \varepsilon)$, și de aici rezultă că soluția sistemului perturbat $x(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta) - \sigma(t, \varphi(t, \zeta), \varepsilon)$ este ω-periodică în t.

Observăm că la sisteme cu proprietatea (n) metoda luării mediei nu se poate aplica.

În concluzie putem afirma

Teorema 3. *Dacă sistemul (1) este ω-periodic în t, iar sistemul generator (2) are soluția generală ω-periodică în t, atunci, în condițiile reducerii termenului perturbator, sistemul perturbat admite soluție ω-periodică în t, dacă are proprietatea* (n); *în plus avem:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, \zeta) = \varphi(t, \zeta).$$

În încheiere vom arăta că există sisteme cu proprietatea (n).

Fie sistemul cu variabile separate

$$\dot{x}_k = i\omega_k x_k + \varepsilon x_k f_k(t), \tag{25}$$

unde $f_k(t)$ sînt ω - periodice cu primitivele ω - periodice.

Deoarece sistemul (26) are variabilele separate, putem considera doar ecuația

$$\dot{x} = i\omega x + \varepsilon x f(t). \tag{25'}$$

Soluția ecuației generatoare este

$$\varphi(t, \zeta) = \zeta e^{i\omega t} \quad \text{și} \quad \varphi_\zeta^{-1}(t, \zeta) = e^{-i\omega t}.$$

Atunci

$$\tau_1(t, x, \varepsilon) = -\varepsilon x \int_0^t f(t-s)\, ds = -\varepsilon x F(t),$$

unde $F(t) = \int_0^t f(u)\, du$.

Dar de aici rezultă $\tau_1(\omega, x, \varepsilon) \equiv 0$. Noul termen perturbator este

$$\varepsilon x^* g(t) = -\varepsilon F(t) x f(t) = -\varepsilon x^* F(t)(1 - F(t))^{-1} f(t),$$

și deci $g(t)$ este ω - periodică. Rămîne să arătăm că primitiva sa este ω - periodică.

În adevăr

$$G(t) = -\varepsilon \int_0^t F(s)(1 - F(s))^{-1} f(s)\, ds = [F(s) + ln(1 - F(s))]_0^t$$

care este ω - periodică.

Noul sistem este

$$\dot{x}^* = i\omega x^* + \varepsilon x^* g(t),$$

și este în condițiile sistemului inițial.

Prin inducție completă rezultă că sistemul (25) are proprietatea (n).

BIBLIOGRAFIE

1. Arenstorf R. F. — *A new method of perturbation theory and its applications to the satelite problem of celestial mechanics*. J. R. A. M. 1966 — 221 p. 113—145.

2. Halanay A. — *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*. Editura Acad. R.S.R., 1963.
3. Moser J. — *A new Technique for the Construction of Solution of Nonlinear Differential Equations*. Proc. of the Nat. Acad. of Sci. 47 (1961) 1824—1831.

ON A REDUCTION METHOD OF PERTURBATION APPLIED TO SYSTEMS WITH SMALL PARAMETER

Summary

In this paper the author applies R. F. Arenstorf's method of perturbation, to systems with small parameter, extending the finite time interval to R_+ semiaxe. By doing this, he obtains a rezult of stability. In the fourth section it is introduced the notion of systems with (n) property, for which he obtains a theorem of existence of periodical solution for autonomous systems with periodical perturbations.