chaque sous-espace $([x], \tau_{[x]})$ de l'espace (X, τ) est localement compact, dénombrable à l'infini.

Conséquence. Du fait qu'un espace localement compact qui est somme d'espaces dénombrables à l'infini est paracompact (voir [1], p. 112), il résulte que dans la classe des espaces localement compacts qui sont des sommes d'espaces dénombrables à l'infini, la paracompacité est équivalente à la métacompacité.

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Éléments de Mathématique. Topologie générale*. Livre III, chap. I, Paris, Hermann 1964.
2. Dieudonné J. — *Une généralisation des espaces compacts*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, t. XXIII, 1964, pp. 65—76.
3. Dugundji J. — *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1968.
4. Engelking R. — *Outline of general topology*, P.W.N. Warszawa, 1968.
5. Steiner A. K. — *The lattice of topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. 122, nr. 2, 1966, pp. 37—56.
6. Tamano H. — *On some characterization of paracompactness*, Topology conference, Arizona State University, 1967, pp. 277 — 285.
7. Thron W. — *Topological structures*, Holt, Rinehart and Winston, Inc New York 1966.

ASUPRA UNOR PROBLEME DE METACOMPACITATE

Rezumat

Nota conține cîteva rezultate cu privire la comportarea spațiilor evasi-metacompacte și metacompacte.

Teorema 1 formulează, folosind noțiunea de lanț într-un spațiu topologic, o condiție necesară și suficientă de metacompacitate în spațiile T_2. Se demonstrează apoi, două propoziții care precizează condiții suficiente pentru ca proprietatea de metacompacitate să aibă caracter ereditar (teoremele 2 și 3). În teorema 4 se dă o condiție suficientă pentru ca produsul a două spații topologice să fie un spațiu evasi-metacompact. Teorema 5 pune în evidență o proprietate a spațiilor care sînt local compacte și metacompacte. Acest rezultat conduce ușor la concluzia că în spațiile local compacte care sînt sume de spații numărabile la infinit, proprietatea de paracompacitate este echivalentă cu metacompacitatea.

SUR LES BI-ESPACES EXTRÊMEMENT DISCONTINUS

PAR

C. AMIHĂESEI

1. Soit X un ensemble, $\mathfrak{P}(X)$ la famille de ses sous-ensembles et F l'ensemble des fonctions $f : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$. On utilisera les définitions suivantes données par P. C. Hammer dans [4].

Si f est une fonction qui appartient à F alors :

1. f s'appelle *isotone* si $A \subset B$ implique $fA \subset fB$,
2. f s'appelle *extensive* si $e \subset f$, c'est-à-dire si $A \subset fA$,
3. f s'appelle *idempotente* si $f^2 = f$, c'est-à-dire si $ffA = fA$,
4. f s'appelle *expansive* si elle est isotone et extensive,
5. f s'appelle *fermeture* si elle est expansive et idempotente.

Les fonctions de fermeture additives seront nommées fonctions de fermeture Kuratowski. Sera noté par : P-l'ensemble des fonctions idempotentes, F_0-l'ensemble des fonctions isotones, F_1-l'ensemble des fonctions extensives, F_2-l'ensemble des fonctions expansives et F_3-l'ensemble des fonctions de fermeture. On dit qu'une fonction $f \in F$ vérifie la condition (E) si $A = fA$ implique $A = cfcA$, où cA est la complémentaire de l'ensemble A, $(cA = X - A)$. L'ensemble des fonctions qui vérifient la condition (E) est noté par F_4. J. C. Kelly [3] a défini un espace bitopologique $(X, \mathfrak{T}, \mathfrak{L})$ comme un ensemble X avec deux topologies $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{L}$ données sur cet ensemble ; on peut dire qu'un espace bitopologique est un ensemble X avec deux fonctions de fermeture Kuratowski $h, s \in F$. P. C. Hammer [5] a défini un espace isotone (X, f, g) comme un ensemble X avec deux fonctions isotones duales $f, g \in F$, (les fonctions f, g s'appellent duales si $f = cfc$). Dans cette note le *bi-espace* (X, f, g) sera défini comme un ensemble X avec deux fonctions arbitraires $f, g \in F$. Par conséquent, dans la définition d'un bi-espace on ne demande pas que les fonctions f, g de F appartiennent à une même classe F_i de fonctions. Dans la suite, on étudiera quelques classes de bi-espaces.

2. Rappelons la définition et quelques propriétés de la fonction *saturation*. Si $\mathfrak{R}$ est une relation binaire quelconque sur X, en notant comme d'habitude $\mathfrak{R}[A] = \{ y : x \mathfrak{R} y \text{ pour } x \in A \}$, on obtient une fonction $s \in F$

définie par $sA = \mathfrak{R}[A]$. La fonction s s'appelle la fonction *saturation* associée à la relation $\mathfrak{R}$. La fonction saturation s associée à la relation $\mathfrak{R}$ sur X a les propriétés suivantes : 1) $s\emptyset = \emptyset$; 2) $s \in F_0$; 3) s est totalement additive, c'est-à-dire $s(\bigcup_\gamma A_\gamma) = \bigcup_\gamma sA_\gamma$ pour toute famille $\{A_\gamma\}$ avec $A_\gamma \subset X$. Si $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence sur X alors la fonction saturation s associée à $\mathfrak{R}$ satisfait encore aux conditions : 4) $s \in F_1 \cap P \cap F_4$; 5) la famille $\{s(\{x\}) : x \in X\}$ est la partition de la relation $\mathfrak{R}$. Dans ce qui suit on écrira $s(x)$ en lieu de $s(\{x\})$. En général si $f \in F$ a la propriété que la famille $\{f(x) : x \in X\}$ forme une partition de l'ensemble X, la fonction saturation s associée à la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, ayant la partition $\{f(x) : x \in X\}$ ne coïncide pas avec f. Il peut arriver que f ne vérifie aucune des propriétés 1) — 4) et que pourtant la famille $\{f(x) : x \in X\}$ forme une partition de l'ensemble X. Il est facile de trouver des exemples qui illustrent une telle situation. On vérifie tout de suite.

Lemme 1. *Si $f \in F$ est une fonction totalement additive telle que la famille $\{f(x) : x \in X\}$ forme une partition de l'ensemble X, alors la fonction saturation s associée à la relation d'équivalence ayant la partition $\{f(x) : x \in X\}$ coïncide avec f.*

Si la fonction $f \in F$ a la propriété qu'il existe une partie A de X, de manière que $A = fA$ et $A = cfcA$, alors on y peut associer une relation d'équivalence, en utilisant la notion de *f-quasi-composante* qu'on définit de la manière suivante : la *f-quasi-composante* d'un point $x \in X$ est l'intersection de tous les ensembles $A \subset X$, qui vérifient les conditions $x \in A$, $A = fA$, $A = cfcA$. Si f est une fonction de fermeture Kuratowski, alors les f-quasi-composantes sont les quasi-composantes dans la topologie déterminée par f sur X.

Lemme 2. *Si $f \in F$ est une fonction pour laquelle il existe $A \subset X$, tel que $A = fA$, $A = cfcA$, alors la famille des f-quasi-composantes de l'ensemble X forme une partition de l'ensemble X.*

Dans les hypotèses du lemme, il est évident que la f-quasi-composante de tout point est un ensemble non vide. Soit B_1, B_2 les f-quasi-composantes des points x_1 et x_2. On suppose que $B_1 \neq B_2$ et soit pour fixer les idées $x \in B_1 - B_2$. De $x \in cB_2$ il résulte qu'il existe $A \subset X$ tel que $x \in A$, $A = fA$, $A = cfcA$ et $x_1 \in cA$, d'où il résulte que $x \in B_1 \cap cA$. Par conséquent $B_1 \not\subset A$, donc $x_1 \in cA$. Parce que $cA = fcA$ et $cA = cfccA$, $x_1 \in cA$ il résulte que $B_1 \subset cA$. Compte tenu que $B_2 \subset A$, on déduit que $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, ce qui démontre le lemme. On considère un bi-espace (X, h, s) où h est une fonction de fermeture Kuratowski et s est la fonction saturation d'une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur l'ensemble X ; on pose le problème de trouver des conditions afin que la fonction h coïncide avec la fonction saturation s. En d'autres termes, on veut voir sous quelles conditions la topologie associée avec h est une $\mathfrak{R}$-topologie (voir [7]).

Proposition 1. *Si $h \in F_3 \cap F_4$ alors :*
a) pour tout $x \in X$, $h(x)$ coïncide avec la h-quasi-composante de x,
b) h est totalement additive,
c) h coïncide avec la fonction saturation s de la relation d'équivalence de la partition formée par les f-quasi-composantes de l'ensemble X.

Démonstration. a) On observe que h étant une fonction de fermeture, on a $x \in h(x)$, $h(x) = hh(x)$, $h(x) \subset hA$ pour tout ensemble $A \subset X$, qui contient le point x. Parce que h vérifie la condition (E), il y aura ainsi l'égalité $h(x) = chch(x)$, donc $h(x)$ est le plus petit des ensembles $A \subset X$ qui vérifie les conditions $x \in A$, $A = hA$, $A = cheA$, ce qui montre que $h(x)$ est la h-quasi-composante du point x.

b) Soit $\{A_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ une famille de sous-ensemble de X. La fonction h étant fonction de fermeture, il résulte que l'égalité suivante est valable :

$$h(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = h(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma) \tag{1}$$

(voir [2], page 14). Puis, compte tenu que h est expansive et qu'elle vérifie la condition (E) on obtient successivement : $hA_\gamma = hhA_\gamma$, $hA_\gamma = chchA_\gamma$ $chA_\gamma = hchA_\gamma$, $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} chA_\gamma = h(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} chA_\gamma)$, $c(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma) = hc(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma)$ $c(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma) = chcc(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma)$, d'où il résulte l'égalité

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma = h(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma). \tag{2}$$

De égalités (1) et (2) il résulte

$$h(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} hA_\gamma, \tag{3}$$

qui démontre le point b).

c) Le point a) et le lemme 2 montrent que la famille $\{h(x) : x \in X\}$ forme une partition de l'ensemble X. En notant par s la fonction saturation associée à la relation d'équivalence ayant la partition $\{h(x) : x \in X\}$, le lemme 1 implique l'égalité $h = s$. Avec cela, la proposition est complétement démontrée.

Corollaire 1. *Toute topologie τ sur X où les ensembles sont en même temps fermés est une $\mathfrak{R}$-topologie.*

En effet, la fonction de fermeture Kuratowski h associée à la topologie τ, vérifie les conditions de la proposition 1, donc elle coïncide avec la fonction saturation s associée à la relation d'équivalence sur X dont la partition est la famille $\{h(x) : x \in X\}$.

3. Les définitions et beaucoup de propriétés des espaces bitopologiques peuvent être facilement généralisées aux bi-espaces. W. J. Pervin [6] a défini les notions de connexion dans des espaces bitopologiques

et de composante connexe. Dans ce paragraphe, la notion d'espace topologique extrêmement discontinu sera généralisée aux bi-espaces. En particulier on obtient aussi la notion d'espace bitopologique extrêmement discontinu.

Définition. *On dit que le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu si la condition suivante est vérifiée :*

(DE) $$A = chcA \text{ implique } sA = chcsA.$$

Quelques exemples de bi-espaces extrêmement discontinus :

1) Il est évident que l'espace bitopologique (X, h, h) est extrêmement discontinu si et seulement si l'espace topologique (X, h) est extrêmement discontinu (dans la définition d'un espace topologique extrêmement discontinu on ne demande aucune condition de séparation, comme on demande par exemple en [1]).

2) Si h est une fonction de fermeture Kuratowski sur un ensemble X, et si s est la fonction saturation associée à une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur X, alors le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu si et seulement si la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ est ouverte dans l'espace topologique (X, h). (voir [1], page 55).

3) Si h est une fonction quelconque qui appartient à F et si e est la fonction identique sur $\mathfrak{P}(X)$, alors le bi-espace (X, h, e) est extrêmement discontinu.

4) Soit $X = \{a, b, c\}$ l'ensemble formé par trois éléments et les fonctions h, s définies de la manière suivante : $h\emptyset = \emptyset$, $h\{a\} = h\{a,b\} = h\{a,c\} = hX = X$, $h\{b\} = \{b\}$, $h\{c\} = \{b,c\}$, $s\emptyset = \{a\}$, $s\{a\} = s\{a,c\} = s\{c\} = \{a,c\}$, $s\{b\} = s\{a,b\} = s\{b,c\} = sX = X$. On vérifie facilement que h est une fonction de fermeture Kuratowski, s est une fonction expansive et que le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu.

5) Soit X un espace linéaire topologique avec la fonction de fermeture Kuratowski h associée à la topologie. Notant par s la fonction de fermeture convexe dans l'espace linéaire topologique X, on constate tout de suite que le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu.

Les exemples présentés ci-dessus, impliquent qu'un bi-espace (X, h, s) peut être extrêmement discontinu, sans qu'un des espaces (X, h) et (X, s) soit extrêmement discontinu.

Lemme 3. *Si la fonction $s \in F$ vérifie la condition (E), alors quelle que soit la fonction $h \in F$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $A = sA$ *implique* $chcA = schcA$,

b) $A = sA$ *implique* $hA = shA$.

a) $\Rightarrow$ b). Si $A = sA$ alors $cA = scA$, parce que s vérifie la condition (E). De a) il résulte que $chccA = schccA$, ou $chA = schA$. En appliquant de nouveau la condition (E) pour s, on obtient $chA = cschA$, ou $hA = shA$, c'est-à-dire b). b) $\Rightarrow$ a). Comme on l'a dit, si $A = sA$, alors $cA = scA$.

En appliquant b) à l'ensemble cA, il résulte $hcA = shcA$, d'où compte tenu de la condition (E) on obtient $hcA = cschcA$, ou $chcA = schcA$, c'est-à-dire a).

Proposition 2. *Soit (X, h, s) un bi-espace avec $h \in F_3$ et $s \in F_2$. Si le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu, alors*

(4) $$A = sA \text{ implique } chcA = schcA.$$

Soit $A \subset X$ avec la propriété $A = sA$. La fonction h étant extensive on a $cA \subset hcA$, d'où $chcA \subset A$. Parce que s, h sont isotones, on obtient successivement de la dernière inclusion : $schcA \subset sA$, $cA \subset cschcA$, $hcA \subset hschcA$, d'où on obtient l'inclusion

(*) $$chcschcA \subset chcA.$$

La fonction h étant idempotente et la condition (DE) étant vérifiée, on a $chcA = chhcA = chcchcA$ et $schcA = chcschcA$. Ainsi, l'inclusion (*) devient $schcA \subset chcA$. D'autre part, s étant extensive, on a l'inclusion $chcA \subset schcA$, d'où $chcA = schcA$, c'est-à-dire (4).

Proposition 3. *Soit (X, h, s) un bi-espace avec $h \in F_3$ et $s \in F_2$. Si $A = hA$ implique $scA = hscA$, alors, $A = scA$ implique $hA = schA$.*

Démonstration. Soit $A \subset X$ un ensemble avec la propriété $A = scA$. En tenant compte de cette égalité et des hypothèses que h est extensive et que s est isotone, on obtient successivement : $A \subset hA$, $chA \subset cA$, $schA \subset scA$, $A = scA \subset schA$, d'où on obtient l'inclusion

(**) $$hA \subset hschA.$$

D'autre part, h étant idempotente et l'hypothèse du théorème, étant satisfaite on a $hA = hhA$, donc $schA = hschA$. Avec cette égalité, l'inclusion (**) devient $hA \subset schA$, d'où $schA \subset chA$. Mais s étant extensive on a aussi l'inclusion contraire $chA \subset schA$, donc $chA = schA$, ou $hA = schA$, ce qu'il fallait montrer.

Définition. *On appelle espace bitopologique généralisé un bi-espace (X, h, s) avec h, s deux fonctions de fermeture.*

Les propositions 2 et 3 impliquent le théorème suivant de caractérisation des espaces topologiques généralisés extrêmement discontinus.

Propositon 4. *L'espace bitopologique généralisé (X, h, s) est extrêmement discontinu si et seulement si la condition*

$$A = sA \text{ implique } chcA = schcA$$

est satisfaite.

Corollaire. *Dans un espace bitopologique généralisé (X, h, s) avec la propriété que s vérifie la condition (E), les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $A = chcA$ *implique* $sA = chcsA$,

b) $A = sA$ *implique* $chcA = schcA$,

c) $A = sA$ *implique* $hA = shA$.

Les conditions de b) et c) sont équivalentes conformément au lemme 3. Plus loin on donnera une nouvelle caractérisation des espaces bitopologiques généralisés extrêmement discontinus. Pour cela démontrons les deux propositions suivantes.

Proposition 5. *Si le bi-espace (X, h, s) avec $h, s \in F_0$ est extrêmement discontinu, alors la condition suivante est vérifiée :*

$$A, B \in \mathfrak{P}(X),\ A \cap B = \emptyset,\ A = cheA,\quad B = cscB \text{ impliquent } sA \cap hB = \emptyset. \tag{5}$$

Démonstration. Soient A, B deux sous-ensembles de X qui vérifient les hypothèses de (5). Sous les hypothèses de la proposition, on obtient successivement : $A \subset cB$, $sA \subset scB$, $B = cscB \subset csA$, $hB \subset hesA$, $chesA \subset \subset chB$. De (DE) et $A = cheA$ en obtient $sA = chesA$. Avec cela la dernière inclusion devient $sA \subset chB$, ou $sA \cap hB = \emptyset$, ce qui démontre la proposition.

Proposition 6. *Soit (X, h, s) un bi-espace avec $h \in F_1$ et $s \in F_1 \cap P$. Si la condition (5) de la proposition 5 est vérifiée, alors le bi-espace (X, h, s) est extrêmement discontinu.*

Démonstration. En effet, soit $A = cheA$. On montrera que $sA = chesA$, ou d'une manière équivalente, $csA = hesA$. La fonction h étant extensive, on a l'inclusion

$$csA \subset hesA. \tag{i}$$

D'autre part, on considère les ensembles A et $B = csA$. Parce que s est extensive on a $A \subset sA$, ou $A \cap csA = \emptyset$, donc $A \cap B = \emptyset$. Puis, s étant idempotente, il résulte $B = csA = cssA = cscsA = cscB$. Par conséquent les ensembles A, B vérifient les hypothèses de (5). La condition (5) étant vraie par hypothèse, on a $sA \cap hB = \emptyset$ ou $sA \cap hesA = \emptyset$, d'où il résulte l'inclusion

$$hesA \subset csA. \tag{ii}$$

Les inclusions (i) et (ii) conduisent à l'égalité $hesA = csA$. Les propositions 5 et 6 conduisent au théorème suivant.

Proposition 7. *Le bi-espace (X, h, s) avec $h \in F_2$ et $s \in F_3$ est extrêmement discontinu, si et seulement si la condition (5) de la proposition 5 est vérifiée.*

Des propositions 4 et 7 on obtient la proposition suivante.

Proposition 8. *Dans un espace bitopologique généralisé (X, h, s) les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *(X, h, s) est extrêmement discontinu.*

b) *le h-intérieur de tout ensemble s-fermé est s-fermé,*

c) *quels que soient les ensembles A, B disjoints, A h-ouvert, B s-ouvert, la s-fermeture de A est disjointe de la h-fermeture de B.*

On observe que la proposition 8, dans le cas d'un espace bitopologique généralisé (X, h, h) est une généralisation d'un résultat connu de la topologie ([1], chap. I, § 11, exercice 21).

Dans le cas d'un espace bitopologique généralisé (X, h, s), où s est la fonction saturation d'une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur X, la proposition 8 peut se formuler de la manière suivante :

Proposition 9. *Dans un espace topologique généralisé (X, h) $(h \in F_3)$ sur lequel est donnée une relation d'équivalence $\mathfrak{R}$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) *la saturation de tout ensemble ouvert est ouverte ($\mathfrak{R}$ est ouverte),*

b) *l'intérieur de tout ensemble saturé est saturé,*

c) *la fermeture de tout ensemble saturé est saturée,*

d) *quels que soient les ensembles disjoints A, B, A ouvert et B saturé, la saturation de l'ensemble A est disjointe de la fermeture de l'ensemble B.*

L'équivalence des points b) et c) résulte du lemme 3 parce que la fonction saturation s de la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ vérifie la condition (E). Les points a), b), c) de la proposition 9 sont des généralisations de la proposition 6, n° 4, § 5, chap. I de [1].

BIBLIOGRAPHIE

1. Bourbaki N. — *Topologie générale*, Hermann, Paris, 1965.
2. Dubreil P., Dubreil-Jacotin M. L. — *Leçons d'algèbre moderne*, Dunod, Paris, 1964.
3. Kelly J. C. — *Bitopological spaces*, Proc. London Math. Soc., 77, 71—89, 1963.
4. Hammer P. C. — *On Kuratowski's closure theorem*, Nieuw Archief voor Wiskunde (3) VIII, 74—80, 1960.
5. Hammer P. C. — *Extended Topology and Systems*, Mathematical Systems Theory (2), I, 135—142, 1967.
6. Pervin W. J. — *Connectedness in bitopological spaces*, Proc. Kk. Nederl. Akad. von Wetenschappen, Amsterdam (3), LXX, 369—372, 1967.
7. Tondeur P. — *Ein Beispiel zur allgemeinen Topologie. Die Topologie einer Äquivalenzrelation*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, n 344, 1964.

BI-SPAȚII EXTREM DISCONTINUE

Rezumat

În această notă sînt definite bi-spațiile ca fiind mulțimi împreună cu două funcții de mulțime cu valori mulțimi. Sînt studiate diferite clase de bi-spații, obținîndu-se în particular spațiile topologice, bitopologice, spațiile izotone în sens Hammer și altele. Este definită apoi noțiunea de bi-spațiu extrem disconex. Cu această noțiune sînt tratate în mod unitar relațiile de echivalență deschise pe spații topologice clasice și extinse și spațiile topologice extrem disconexe (în definiția spațiilor topologice și bitopologice extrem disconexe nu se cere nici o axiomă de separație). Sînt generalizate la bi-spații cîteva teoreme din teoria spațiilor topologice extrem disconexe și de la teoria relațiilor de echivalență deschise pe spații topologice.