STRUCTURI TOPOLOGICE LIMITĂ

DE

V. CÎMPIAN

Comunicare prezentată la sesiunea științifică a Universității „Al. I. Cuza" din 20-22 decembrie 1971

Noțiunea de limită a unui șir generalizat de familii de mulțimi a fost introdusă de autor în [1] și [2]. Pentru prescurtare, înlocuim expresia „șir generalizat" prin expresia „g-șir".

Fie $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in D\}$ un g-șir de familii de mulțimi ale căror elemente sînt submulțimi ale unei mulțimi X, iar D este o mulțime dirijată [3].

Definiția 1. *Familia de mulțimi ale cărei elemente sînt limitele inferioare (superioare) ale g-șirurilor de forma* $\{A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$ *se numește familie limită inferioară (superioară) și se notează prin:*

$$\mathcal{A}_* = \liminf \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in D\}, \text{ respectiv, } \mathcal{A}^* = \limsup \{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in D\}.$$

Noțiunea de familie limită a unui g-șir de familii de mulțimi nu o definim cu ajutorul condiției $\mathcal{A}_* = \mathcal{A}^*$, căci această condiție este prea restrictivă [1]: vom folosi definiția dată în [2]:

Definiția 2. *Familia de mulțimi ale cărei elemente sînt limitele g-șirurilor convergente de forma* $\{A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$ *se numește familie limită și se notează prin:*

$$\mathcal{A} = \lim \{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}.$$

Dacă familia $\mathcal{A}_\alpha$, pentru $\alpha \in D$, are o anumită proprietate, atunci aceasta se poate reflecta într-un anumit fel, prin trecere la limită. De asemenea se poate pune problema determinării unor structuri mai complicate, ca limite ale unor structuri mai simple. Astfel de probleme se găsesc în [1] pentru șiruri de topologii și în [2] pentru g-șiruri.

În cele ce urmează ne ocupăm de proprietăți analoge pentru g-șiruri de uniformități și de g-șiruri de p-vecinătăți ([6] p. 193) și demonstrăm permutabilitatea limitei inferioare în raport cu topologia determinată de structura uniformă sau de structura de p-vecinătate.

Teorema 1. *Limita inferioară a unui g-șir de structuri uniforme* $\{\mathcal{U}_\alpha;\ \alpha \in D\}$ *definite pe mulțimea* X, *este o bază pentru anumită uniformitate pe* X.

Demonstrație. Fie $\mathcal{B}_* = \text{liminf}\ \{\mathcal{U}_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$. Dacă $H \in \mathcal{B}_*$, atunci $H = \text{liminf}\ \{H_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$, unde $H_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$, pentru $\alpha \in D$, deci $\Delta \subset H_\alpha$, $\alpha \in D$, ceea ce implică $\Delta \in H$, $(\Delta = \{(x, x)\ ;\ x \in X\})$. Dacă $H_1, H_2 \in \mathcal{B}_*$, atunci $H_i = \text{liminf}\ \{H_\alpha^i;\ \alpha \in D\}$, unde $H_\alpha^i \in \mathcal{U}_\alpha$, $\in D$, $i = 1, 2$, iar din axiomele structurii uniforme $\mathcal{U}_\alpha$ rezultă că $H_\alpha^1 \cap H_\alpha^2 \in \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in D$, deci prin trecere la limită inferioară rezultă că $H_1 \cap H_2 \in \mathcal{B}_*$. Dacă $H = \text{liminf}\ \{H_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$, $H_\alpha \in \mathcal{O}_\alpha$, $\alpha \in D$, atunci există $K_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha$ încît $K_\alpha \circ K_\alpha \subset H_\alpha$ pentru orice $\alpha \in D$. Fie $K = \text{liminf}\ \{K_\alpha;\ \alpha \in D\}$. Dacă $(x, z) \in K \circ K$, atunci există y încît $(x, y) \in K$ și $(y, z) \in K$ ceea ce implică existența unui element $\beta \in D$ încît $(x, y) \in K_\alpha$ și $(y, z) \in K_\alpha$ pentru $\alpha \geqslant \beta$, deci $(x, z) \in H$ de unde rezultă $K \circ K \subset H$. Dacă $H \in \mathcal{B}_*$, atunci $H^{-1} \in \mathcal{B}_*$, căci $H^{-1} = \text{liminf}\ \{H_\alpha^{-1}\ ;\ \alpha \in D\}$. Deci $\mathcal{B}_*$ este o bază pentru anumită uniformitate pe X [6].

Definiția 3. *Uniformitatea determinată de limita inferioară a unui g-șir de uniformități se numește uniformitate limită inferioară.*

Notăm această uniformitate prin $\mathcal{U}_* = \mathcal{U}(\mathcal{B}_*)$ sau cînd nu pot apărea confuzii, notăm $\mathcal{U}_* = \text{liminf}\ \{\mathcal{U}_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$.

Proprietatea de continuitate uniformă a unei funcții $f : X \to Y$ se poate exprima cu ajutorul elementelor din baza structurii uniforme pe X sau Y, deci analog proprietății de transmitere a continuității [2], rezultă că proprietatea de continuitate uniformă se transmite prin trecere la limită, deci dacă funcția

$$f : (X, \mathcal{U}_\alpha) \to (Y, \mathcal{V}_\alpha)$$

este continuă uniform pentru orice $\alpha \in D$, atunci ea rămîne continuă uniform și relativ la uniformitățile limită inferioară adică :

$$f : (X, \mathcal{U}_*) \to (Y, \mathcal{V}_*)$$

este continuă uniform.

Teorema 2. *Dacă* $\{\mathcal{U}_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$ *este un g-șir de uniformități pe* X *și* $\{\tau(\mathcal{U}_\alpha)\ ;\ \alpha \in D\}$ *este g-șirul de topologii determinate de aceste uniformități, atunci :*

$$\text{liminf}\ \{\tau(\mathcal{U}_\alpha)\ ;\ \alpha \in D\} = \tau(\text{liminf}\ \{\mathcal{U}_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}).$$

Demonstrație. Vom arăta că sistemele de vecinătăți ale topologiilor din fiecare membru al egalității de mai sus sînt echivalente. Fie $x \in X$ și V o vecinătate a lui x, relativă la topologia $\text{liminf}\ \{\tau(\mathcal{U}_\alpha);\ \alpha \in D\}$ deci $V = \text{liminf}\ \{H_\alpha[x];\ \alpha \in D\}$, $\alpha \in D$, $H_\alpha[x] = \{y;\ (x, y) \in H_\alpha\}$. Notînd cu $H = \text{liminf}\ \{H_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$ teorema va fi demonstrată dacă stabilim egalitatea $V = H[x]$, căci $H[x]$ este o vecinătate a lui x relativă la topologia din membrul drept al egalității. Avem $y \in H[x]$ dacă și numai dacă $(x, y) \in H$, ceea ce e echivalent cu existența unui element $\beta \in D$ încît $(x, y) \in H_\alpha$

pentru $\alpha \geqslant \beta$, adică $y \in H_\alpha[x]$, $\alpha \geqslant \beta$ și acesta e echivalent cu $y \in V$; deci $V = H[x]$.

Pentru a găsi două rezultate analoge în cazul structurilor de p-vecinătăți [6], vom defini baza unei p-vecinătăți.

Definiția 4. *Relația* ρ_0 *este o bază pentru relația de p-vecinătăți* ρ *dacă satisface condițiile :*

a) $\rho_0 \subset \rho$

b) $A\ \rho\ B$ *dacă și numai dacă există mulțimile* A_1, B_1 *încît* $A_1\ \rho_0\ B_1$ *și* $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$.

După W. I. Thron [6], relația binară ρ pe 2^X este o p-vecinătate dacă satisface condițiile :

1) $X\ \rho\ X$; 2) $A\ \rho\ B$ implică $A \subset B$;

3) $A \subset B\ \rho\ C \subset D$ implică $A\ \rho\ D$;

4) $A\ \rho\ B_k$, $k = \overline{1, n}$ dacă și numai dacă $A\ \rho \bigcap_{k=1}^{n} B_k$;

5) $A\ \rho\ B$ implică $(X - B)\ \rho\ (X - A)$;

6) $A\ \rho\ B$ implică existența unei mulțimi $C \subset X$ încît $A\ \rho\ C\ \rho\ B$.;

Teorema 3. *Relația* ρ_0 *este o bază pentru anumită p-vecinătate dacă și numai dacă sînt satisfăcute următoarele condiții :*

B_1) $A\ \rho_0\ B$ *implică* $A \subset B$,

B_2) $A \subset B\ \rho_0\ C \subset D$ *implică existența mulțimilor* A_1 *și* D_1 *încît* $A_1\ \rho_0\ D_1$ *și* $A_1 \subset A$, $D_1 \subset D$,

B_3) $A\ \rho_0\ B_k$; $k = 1, 2$ *implică existența mulțimii* D, *încît :* $A\ \rho_0\ D \subset B_1 \cap B_2$,

B_4) $A\ \rho_0\ B$ *implică existența unei mulțimi* C *încît* $A\ \rho_0\ C\ \rho_0\ B$.

Demonstrația necesității rezultă ușor din definiția 4, iar suficiența se arată printr-un calcul direct.

Două demonstrații analoge celor de la teoremele 1 și 2 conduc la următoarele teoreme.

Teorema 4. *Limita inferioară a unui g-șir de p-vecinătăți este o bază pentru anumită p-vecinătate.*

Teorema 5. *Dacă* $\{\rho_\alpha\ ;\ \alpha \in D\}$ *e un g-șir de p-vecinătăți pe* X, *iar* $\{\tau(\rho_\alpha)\ ;\ \alpha \in D\}$ *este g-șirul de topologii determinate de aceste p-vecinătăți, atunci :*

$$\text{liminf}\ \{\tau(\rho_\alpha)\ ;\ \alpha \in D\} = \tau(\text{liminf}\ \{\rho_\alpha\ ;\ \alpha \in D\})$$

BIBLIOGRAFIE

1. Cîmpian V. — *Topologii limită*, Studia Univ. Babeș-Bolyai, series math. mec., fasc. 1, (1971), 29—35.
2. Cîmpian V. — *Limites de g-suites*, (sous presse).
3. Kelley J. — *General topology*, Van Nostrand, 1965.
4. Michael E. — *Alephspaces*, J. Math. Mech. 15 nr. 6 (1966), 983—1 002.
5. Steiner A. K. — *The lattice of topologies*, Trans. Amer. Math. Soc. 122, nr. 2 (1966), 37—56.
6. Thron W. J. — *Topological structures*, New-York, ed. Holt-Rinehart, 1966.

STRUCTURES TOPOLOGIQUES LIMITE

Résumé

Soit $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in D\}$ une suite généralisée de familles d'ensembles sur X. Nous appelons limite inférieure de la suite $\{\mathcal{A}_\alpha : \alpha \in D\}$ la famille d'ensembles formée par les limites inférieures des suites généralisées $\{A_\alpha ; A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$. Nous désignerons cette limite par : $\mathcal{A}^* = \operatorname{liminf}\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$. D'une façon analogue on a introduit dans [2] la limite supérieure et la limite de la suite $\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$.

Théorème. Si $\{\mathcal{U}_\alpha ; \alpha \in D\}$ est une suite généralisée d'uniformités sur X, $\{\rho_\alpha ; \alpha \in D\}$ une suite généralisée de p-voisinages sur X et $\tau(\mathcal{U}_\alpha)$, $\tau(\rho_\alpha)$ les topologies déterminées par $\mathcal{U}_\alpha$ et ρ_α, $\alpha \in D$ alors :

1) $\operatorname{liminf}\{\tau(\mathcal{U}_\alpha) ; \alpha \in D\} = \tau(\operatorname{liminf}\{\mathcal{U}_\alpha ; \alpha \in D\})$

2) $\operatorname{liminf}\{\tau(\rho_\alpha) ; \alpha \in D\} = \tau(\operatorname{liminf}\{\rho_\alpha ; \alpha \in D\})$.

ZUR DEFINITION DER GAMMAFUNKTION DURCH DIE EULERSCHE FUNKTIONALGLEICHUNG

VON

ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Die auf $\mathbf{R}_+$ definierte reellwertige Funktion $f = [f(x)]$ soll fastkonvex bzw. konvex im Unendlichen heißen, falls für jedes Wertetripel (x_1, x, x_2), $x_1 < x < x_2$ und $x_1 + n$ in $\mathbf{R}_+$

$$(1.1) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{f(x+n) - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1 + n) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2 + n)\right\} \leqslant 0$$

ausfällt. Entsprechend soll die positive Funktion $f = [f(x)]$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ fast logarithmisch konvex heißen, falls für jedes Wertetripel

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{f(x+n) f(x_1+n)^{-\frac{x_2-x}{x_2-x_1}} f(x_2+n)^{-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}\right\} \leqslant 1$$

ausfällt. Offenbar ist jede in $\mathbf{R}_+$ konvexe bzw. logarithmisch konvexe Funktion fastkonvex bzw. fast logarithmisch konvex in $\mathbf{R}_+$. Der Begriff der fast logarithmischen Konvexität erlaubt die Klasse der zulässigen Funktionen in dem Satz von Bohr-Mollerup zu erweitern [1]:

Satz 1 (Bohr-Mollerup). *Jede auf $\mathbf{R}_+$ definierte reellwertige positive Funktion $f = [f(x)]$, die den Bedingungen genügt:*

1. $f(1) = 1$
2. $f(x+1) = xf(x)$ *(Eulersche Funktionalgleichung)*
3. *f ist logarithmisch konvex*

ist gleich $\Gamma = [\Gamma(x)]$ *mit*

$$(1.3) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt \quad \textit{(Eulersche Gammafunktion)}.$$

[1] Siehe etwa [3] und [4].