STRUCTURES TOPOLOGIQUES LIMITE

Résumé

Soit $\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$ une suite généralisée de familles d'ensembles sur X. Nous appelons limite inférieure de la suite $\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$ la famille d'ensembles formée par les limites inférieures des suites généralisées $\{A_\alpha : A_\alpha \in \mathcal{A}_\alpha, \alpha \in D\}$. Nous désignerons cette limite par : $\mathcal{A}^* = \operatorname{liminf}\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$. D'une façon analogue on a introduit dans [2] la limite supérieure et la limite de la suite $\{\mathcal{A}_\alpha ; \alpha \in D\}$.

Théorème. Si $\{\mathcal{U}_\alpha ; \alpha \in D\}$ est une suite généralisée d'uniformités sur X, $\{\rho_\alpha ; \alpha \in D\}$ une suite généralisée de p-voisinages sur X et $\tau(\mathcal{U}_\alpha)$, $\tau(\rho_\alpha)$ les topologies déterminées par $\mathcal{U}_\alpha$ et ρ_α, $\alpha \in D$ alors :

1) $\operatorname{liminf}\{\tau(\mathcal{U}_\alpha) ; \alpha \in D\} = \tau(\operatorname{liminf}\{\mathcal{U}_\alpha ; \alpha \in D\})$

2) $\operatorname{liminf}\{\tau(\rho_\alpha) ; \alpha \in D\} = \tau(\operatorname{liminf}\{\rho_\alpha ; \alpha \in D\})$.

„Al. Myller"

ZUR DEFINITION DER GAMMAFUNKTION DURCH DIE EULERSCHE FUNKTIONALGLEICHUNG

VON

ALEXANDER DINGHAS

1. Einleitung. Die auf $\mathbf{R}_+$ definierte reellwertige Funktion $f = [f(x)]$ soll fastkonvex bzw. konvex im Unendlichen heißen, falls für jedes Wertetripel (x_1, x, x_2), $x_1 < x < x_2$ und $x_1 + n$ in $\mathbf{R}_+$

$$(1.1) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{f(x+n) - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1 + n) - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2 + n)\right\} \leqslant 0$$

ausfällt. Entsprechend soll die positive Funktion $f = [f(x)]$ $(x \in \mathbf{R}_+)$ fast logarithmisch konvex heißen, falls für jedes Wertetripel

$$(1.2) \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{f(x+n) f(x_1+n)^{-\frac{x_2-x}{x_2-x_1}} f(x_2+n)^{-\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}\right\} \leqslant 1$$

ausfällt. Offenbar ist jede in $\mathbf{R}_+$ konvexe bzw. logarithmisch konvexe Funktion fastkonvex bzw. fast logarithmisch konvex in $\mathbf{R}_+$. Der Begriff der fast logarithmischen Konvexität erlaubt die Klasse der zulässigen Funktionen in dem Satz von Bohr-Mollerup zu erweitern [1]:

Satz 1 (Bohr-Mollerup). *Jede auf $\mathbf{R}_+$ definierte reellwertige positive Funktion $f = [f(x)]$, die den Bedingungen genügt:*

1. $f(1) = 1$
2. $f(x+1) = xf(x)$ *(Eulersche Funktionalgleichung)*
3. *f ist logarithmisch konvex*

ist gleich $\Gamma = [\Gamma(x)]$ mit

$$(1.3) \qquad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1} dt \quad \textit{(Eulersche Gammafunktion)}.$$

[1] Siehe etwa [3] und [4].

Man kann beweisen:

Satz 2. *Jede auf* $\mathbf{R}_+$ *definierte reellwertige positive Funktion* f, *die den Bedingungen genügt:*

(i) $$f(1) = 1$$

(ii) $$f(x+1) = xf(x)$$

(iii) f *ist fast logarithmisch konvex,*
ist gleich der Eulerschen Gammafunktion.

Der Satz 1 besitzt bekanntlich eine Art Gegenstück [2], das den Monotoniebegriff heranzieht:

Satz 3. *Jede auf* $\mathbf{R}_+$ *definierte reellwertige positive Funktion* f, *die den Bedingungen genügt:*

(1) $$f(1) = 1$$

(2) $$f(x+1) = xf(x)$$

(3) $$\left(\frac{e}{x}\right)^x f(x) \text{ ist monoton abnehmend,}$$

st gleich der Eulerschen Gammafunktion.

Dieser Satz kann auf ähnlicher Weise wie der Satz 1 vertieft werden. Man nenne in der Tat $f = [f(x)]$ fast monoton auf $\mathbf{R}_+$, falls für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbf{R}_+$, $x_1 < x_2$, entweder

(1.4) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{f(x_1+n) - f(x_2+n)\} \leqslant 0,$$

oder

(1.5) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \{f(x_2+n) - f(x_1+n)\} \leqslant 0$$

ist. Es gilt nun folgende Verallgemeinerung des Satzes 3:

Satz 4. *Jede auf* $\mathbf{R}_+$ *definierte reellwertige positive Funktion* f *mit den Eigenschaften:*

1) $$f(1) = 1$$

2) $$f(x+1) = xf(x)$$

3) *Der Ausdruck*

(1.6) $$\log f(x) - \int_x^{x+1} \log \Gamma(t)\, dt$$

[2] Man vgl. [1] und [2].

ist fast monoton, ist gleich der Eulerschen Gammafunktion [3].

Die nachfolgenden Beweise benutzen die Tatsache, daß jede Lösung f der Eulerschen Funktionalgleichung (ii), notwendigerweise, durch die Gleichung

(1.7) $$f(x) = \omega(x)\,\Gamma(x)$$

wobei ω eine positive periodische Funktion mit der Periode 1 ist, gegeben wird.

2. Beweis der Sätze 2 und 4. Ist f fast logarithmisch konvex, so gilt für beliebige x_1, x, x_2 und $x_1 < x < x_2$ die Ungleichung

(2.1) $$\frac{f(x+n)}{f(x_1+n)} \leqslant (1+o(1)) \left[\frac{f(x_2+n)}{f(x_1+n)}\right]^{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}.$$

Diese liefert die Abschätzungen (Anwendung mit $x_1 = -1$, $x_2 = x$, $x = 0$)

(2.2) $$\left\{\frac{f(n)}{f(n-1)}\right\}^{x+1} \leqslant (1+o(1)) \frac{f(x+n)}{f(n-1)}$$

und (Anwendung mit $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x = x$)

(2.3) $$\frac{f(x+n)}{f(n)} \leqslant (1+o(1)) \left\{\frac{f(n+1)}{f(n)}\right\}^x.$$

Demnach gilt vorerst, wegen $f(k) = (n-1)!$ $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Pi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}$$

und $(o < x \leqslant 1!)$

$$f(x+n) = f(x)\,x(x+1)\ldots(x+n-1)$$

$$(1+o(1))\left(1-\frac{1}{n}\right)^x \frac{\Pi_n(x)}{\Gamma(x)} \leqslant \omega(x) \leqslant \left(1+\frac{x}{n}\right)\frac{\Pi_n(x)}{\Gamma(x)}(1+o(1))$$

d. h. (Grenzübergang $n \to \infty$!)

(2.4) $$\omega(x) = 1, \qquad (x \in \mathbf{R}_+)$$

Das beweist die Sätze 1 und 2.

Der Satz 4 kann folgendermaßen bewiesen werden:

Man setze für $x \in \mathbf{R}_+$

[3] Der Beweis in [1] verwendet die Eigenschaften von $(e/x)_x$. Bekanntlich ist das Integral rechts in (1.6) gleich $x(\log x - 1) \log \sqrt{2\pi}$. Der Leser kann dies selbst beweisen, indem er die Formel ([2], S. 21 ff) $\left\{\prod_1^{p-1} \Gamma\left(\frac{k}{x}+x\right)\right\}^{1/p} = \sqrt{2\pi}\left(\frac{x}{e}\right)^x (1+o(1))$ logarithmiert und $p \to \infty$ konvergieren lässt.

$$\Phi(x) = \log f(x) - \int_x^{x+1} \log \Gamma(t)dt.$$

Dann ist, wegen (1.7),

$$\Phi(x) = \log \omega(x) + \log \Gamma(x) - \int_x^{x+1} \log \Gamma(t)dt$$

und somit $(o < x \leqslant \infty)$[4]

$$\Phi(x) = \log \omega(x) - \frac{1}{2} \log x + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{2.5}$$

Es genügt also zu zeigen, daß unter der Voraussetzung 3) ω konstant sein muß. Dazu nehme man vorerst an, Φ sei fast monoton abnehmend im Sinne von (1.5) und betrachte die Punkte x_1, x_2 $(0 < x_1 < x_2 \leqslant 1)$ und $x_1 + 1$. Dann wird

$$\log \frac{\omega(x_1)}{\omega(x_2)} \geqslant -\frac{1}{2} \log \frac{x_1 + n}{x_2 + n} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Entsprechend findet man

$$\log \frac{\omega(x_2)}{\omega(x_1 + 1)} = \log \frac{\omega(x_1)}{\omega(x_2)} \geqslant -\frac{1}{2} \log \frac{x_2 + n}{x_1 + n + 1} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

und durch Grenzübergang $n \to +\infty$

$$\log \frac{\omega(x_1)}{\omega(x_2)} = 0,$$

d. h. $\omega(x_1) = \omega(x_2)$. Der Fall einer fast monoton zunehmenden Funktion läßt sich entsprechend behandeln.
Der Satz 3 von Herrn Anastassiadis ist offenbar Spezialfall des Satzes 4. Wegen

$$\log f = \log \omega + \log \Gamma$$

und (Integrierbarkeitsbedingung !)

$$\int_x^{x+1} \log \omega dt = \int_{0+}^{1} \log \omega dt = \text{Konstante},$$

kann man den Satz 4 auch folgendermaßen formulieren :

[4]) Man vgl. etwa [3], S. 21 f.

Satz 5. *Jede auf* $\mathbf{R}_+$ *definierte reellwertige positive Funktion* f *mit den Eigenschaften* :

a) $f(1) = 1$
b) $f(x + 1) = xf(x)$
c) *Der Ausdruck*

$$\log f(x) - \int_x^{x+1} \log f(t)dt$$

ist fast monoton, ist gleich der Eulerschen Gammafunktion.
Auf eine Übertragung des Satzes 4 auf die allgemeinere Funktionalgleichung

$$\log f(x + 1) = \log p(x) + \log f(x)$$

$p > 0$ auf $\mathbf{R}_+$!) wird hier nicht eingegangen werden[5]

LITERATURVERZEICHNIS

1. Anastassiadis J. — *Une propriété de la fonction Gamma*, Bull. Sci. mathem. 81, 1957, S. 116—118.
2. Anastassiadis J. — *Sur les solutions de l'équation fonctionelle* $f(x + 1) = xf(x)$, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, *253*, 1961, p. 2 446—2 447.
3. Artin E. — *Einführung in die Gammafunktion*, B. G. Teubner, Leipzig-Berlin (1931), 36 S.
4. Dinghas A. — *Zur Theorie der Gammafunktion*, Math. Phys. Semesterberichte, *6*, 1959, S. 245—252.

DEFINIREA FUNCȚIEI GAMMA PRIN ECUAȚIA FUNCȚIONALĂ A LUI EULER

Rezumat

Se demonstrează propozițiile 2, 3 și 4 după care o funcție pozitivă definită pe $\mathbf{R}_+$ care satisface condițiilor 1), 2), 3) din teoremele respective este funcția gamma a lui Euler, noțiunile de aproape convex și aproape logaritmic convex fiind definite prin relațiile (1.1) și (1.2) respectiv.

[5]) Man vgl. (für den Satz 2) [2] und (für allgemeine Zusammenhänge den Satz 1 betreffend) [4].