ZUR BEGRIFFLICHEN UMGRENZUNG DER NEVANLINNASCHEN CHARAKTERISTISCHEN FUNKTION I

VON

ALEXANDER DINGHAS

1. Definitionen. Im folgenden soll bedeuten:

(i) $\{w(z)\}$ eine für $|z| < R$ meromorphe Funktion.

(ii) $\{m_N(r, a)\}$, $\{N(r, a)\}$ und $\{T_N(r, a)\} = \{m_N(r, a) + N(r, a)\}$ die von R. Nevanlinna [5] eingeführten Funktionen.

(iii) $k(a)$ $(a \in \mathbf{C})$ eine in der Umgebung jedes Punktes von $\mathbf{C}$ stetige Funktion mit den Eigenschaften

$$k(a)^2 \geqslant 1 + |a|^2, \quad \lim_{|a| \to +\infty} k(a)\,|a|^{-1} = +\infty \tag{1.1}$$

(iv) $\{|w, a|\}$ $(w, a \in \hat{\mathbf{C}})$ die durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} |w, a| &= |w - a|\, k(w)^{-1} k(a)^{-1} \quad (w, a \in \mathbf{C}) \\ |w, \infty| &= k(w)^{-1}, \quad |\infty, \infty| = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

definierte Funktion in $\hat{\mathbf{C}}^2$. Offenbar gilt stets $|w, a| \leqslant 1$. [Die interessantesten Fälle von $|w, a|$, liefert die Wahl $k(a)^2 = 1 + |a|^2$ ($|w, a|$ ist die sphärische Entfernung von w und a [1]), und $k(a)^2 = 2\,|\overset{+}{a}|^2$ mit $|\overset{+}{a}| = \max(1, |a|)$ [3]].

(v) $\{m(r, a)\}$ $(a \in \hat{\mathbf{C}})$ die durch die Gleichung

$$m(r, a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w, a|^{-1}\, d\vartheta \quad (0 < r < R) \tag{1.3}$$

definierte Funktion und $\{T(r, a)\}$ die Funktion $\{m(r, a) + N(r, a)\}$.

2. **Der erste Nevanlinnasche Fundamentalsatz.** Der erste Fundamentalsatz der Wertverteilungstheorie stützt sich auf die klassische Jensensche Formel. Es wird sich zeigen, daß letztere eine zusammengesetzte Formel ist. Sei

$$D_+^r = \{ z : |z| < r,\ \overset{+}{\log} |w| > 0 \},\ D_-^r = \{ z : |z| < r,\ \overset{+}{\log} |w|^{-1} > 0 \}$$

und (γ_+) der (positive orientierten) Rand von D_+^r. Dann liefert die Greensche Formel, angewandt auf das (homotop invariante) Integral

$$(2.1) \qquad J = \frac{1}{2\pi} \int_{(\gamma_+)} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \ (n \text{ innere Normale}) \text{ mit } u = \log |w| \text{ und}$$

$v = \log \dfrac{r}{|z|}$, die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overset{+}{\log} |w| \, d\vartheta + N(r, \infty) = \log |w_\infty(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_{(\gamma'_+)} \log \frac{r}{|z|} \frac{\partial}{\partial n} \overset{+}{\log} |w| \, ds =$$

$$= \log |w_\infty(0)| + \frac{1}{2\pi} \int_{(\gamma'_+)} \log \frac{r}{|z|} \, |dw| ,$$

wobei $w_\infty(z) = w(z) z^{n(0,\infty)}$ gesetzt und $|w(0)| > 1$ vorausgesetzt wurde. Hierbei bedeutet (γ'_+) den Teil von (γ_+) in der Kreisscheibe $|z| < r$. Man setze jetzt

$$(2.2) \qquad S(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{E_r} |dw| \qquad (E_r = \{ z : |z| \leqslant r,\ |w| = 1 \})$$

und beachte, daß die Summe rechts gleich

$$(2.3) \qquad \int_0^r \log \frac{r}{t} \, dS(t, w) = \int_0^r S(t, w) \frac{dt}{t} = T_N(r, w)$$

ist. Das liefert die Gleichung [2]

$$(2.4) \qquad T_N(r, \infty) = \log |w_\infty(0)| + T_N(r, w) .$$

[1]) Der Integrand von J (multipliziert mit $|z|$) hat in der Umgebung von $z=0$ de Entwicklung $\log |w_\infty(0)| - n(0,\infty) \log r + (\varepsilon)$, wobei (ε) mit $z \to 0$ gegen Null konvergierit.

Ferner folgt aus $\dfrac{\partial}{\partial n} \overset{+}{\log} |w| \geqslant 0$, $ds > 0$ und $\dfrac{\partial}{\partial n} \overset{+}{\log} |w| = -\dfrac{\partial}{\partial s} \arg w$, $\dfrac{\partial}{\partial n} \overset{+}{\log} |w| \, ds =$

$= -\dfrac{\partial}{\partial s} \arg w \, ds = -d \arg w = i d \log w = i w^{-1} dw = |dw|$.

Nun ist der Ausdruck $T_N(r, w)$ invariant gegenüber der Transformation $w \to w^{-1}$, und somit gilt (Anwendung von (2.2) auf D_-^r !)

$$(2.5) \qquad T_N(r, 0) = \log |w_0(0)|^{-1} + T_N(r, w) \ ^{2)}$$

mit $w_0(z) = w(z) z^{-n(0,0)}$ ($|w(0)| < 1$). Das liefert wiederum durch Subtraktion von (2.5)

$$T_N(r, \infty) - T_N(r, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |w| \, d\vartheta - N(r, 0) + N(r, \infty) = \log |w_1(0)| ,$$

mit $w_1(z) = w(z) z^{n(0,\infty) - n(0,0)}$ d. h. die Jensensche Formel. Durch direkte Umformung von $T_N(r, w)$ kann nun der erste Fundamentalsatz der Wertverteilungstheorie in der nachfolgenden Form bewiesen werden:

Satz 1 (Erster Nevanlinnasche Fundamentalsatz): *Man setze* [3]

$$(2.6) \qquad S_0(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z| \leqslant r} |\overset{+}{w}|^{-4} |w'|^2 \, d\sigma(z)$$

und

$$(2.7) \qquad T_0(r, w) = \int_0^r S_0(t, w) \frac{dt}{t} .$$

Dann gilt für jedes $a \in \mathbf{C}$ die Gleichung

$$(2.8) \qquad T_N(r, a) = T_0(r, w) - \log |\hat{w}_a(0)| + O(\overset{+}{\log} |a|).$$

Hierbei ist $\hat{w}_a(z) = (w(z) - a) z^{n(0,\infty) - n(0,a)}$ gesetzt.

Beweis. Ersetzt man in der Jensenschen Formel w durch $w - a$, so folgt unter Berücksichtigung der Abschätzung $|\overset{+}{\log} |w - a| - \overset{+}{\log} |w|| \leqslant$ $\leqslant \log 2 + \overset{+}{\log} |a|$,

$$(2.9) \qquad T_N(r, a) = T_N(r, \infty) - \log |\hat{w}_a(0)| + O(\overset{+}{\log} |a|).$$

Andererseits gilt nach der Greenschen Identität [(γ_-) bedeutet den (positiv orientierten) Rand von D_-^r, $(\gamma'_-) = (\gamma_+)$, n innere Normale von D_-^r]

$$-\frac{1}{2} \int_{(\gamma_-)} \frac{\partial}{\partial n} |w|^2 \, ds = 2 \int_{D_-^r} |w'|^2 \, d\sigma(z)$$

und ($w \to w^{-1}$!)

[2]) Der Integrand von J (multipliziert mit $|z|$) hat in diesem Falle die Form $\log |w_0(0)|^{-1} - n(0,0) \log r + (\varepsilon)$.

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{(\gamma_+)}\frac{\partial}{\partial n}\,|\,\mathfrak{w}\,|^{-2}\,ds = 2\int\limits_{D_+^r}|\,\mathfrak{w}\,|^{-1}\,|\,\mathfrak{w}'\,|^2\,d\sigma(z)\,,$$

also, wegen $|\,\mathfrak{w}\,| = 1$ auf (γ_+') und (γ_-') $(ds > 0\,!)$,

$$\frac{1}{2}\,r\,\frac{d}{dr}\int\limits_0^{2\pi}\min\left(|\,\mathfrak{w}\,|^2,\ |\,\mathfrak{w}\,|^{-2}\right)d\vartheta - 2\int\limits_{(\gamma_-')}|\,\mathfrak{w}\,|^{-1}\,\frac{\partial}{\partial n}\,|\,\mathfrak{w}\,|\,ds = 4\pi\,S_0(r,\mathfrak{w})\,.$$

Nun gilt $\left[\frac{\partial}{\partial n}\log|\,\mathfrak{w}\,| \leqq 0\right.$ auf (γ_-') !

$$-\frac{\partial}{\partial n}\log|\,\mathfrak{w}\,|\,ds = \frac{\partial}{\partial s}\arg\mathfrak{w}\,ds = \frac{1}{i}\,d\log\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{w}}{i\mathfrak{w}} = |\,d\mathfrak{w}\,|\,,$$

und mithin

$$r\,\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2}\min\left(|\,\mathfrak{w}\,|^2,\ |\,\mathfrak{w}\,|^{-2}\right)d\vartheta\right\} + S(r,\mathfrak{w}) = S_0(r,\mathfrak{w})\,.$$

Daraus folgt durch Integration (nach vorherigen Division durch r)

$$T_N(r,\mathfrak{w}) = \int\limits_0^r S_0(t,\mathfrak{w})\,\frac{dt}{t} + O(1) = T_0(r,\mathfrak{w}) + O(1)\,. \tag{2.10}$$

Somit kann $T_N(r,\mathfrak{w})$ durch ein Flächenintegral ausgedrückt werden. In der nachfolgenden Nummer soll eine Verallgemeinerung von (2.10) auf anderem Wege bewiesen werden.

3. **Allgemeine charakteristische Funktionen.** Die grundlegende Aussage (2.9) läßt sich, wegen

$$-\overset{+}{\log}\,|\,\mathfrak{w}-a\,|^{-1} = -\log|\mathfrak{w},a|^{-1} - \left(\overset{+}{\log}\,|\,\mathfrak{w}-a\,| - \overset{+}{\log}\,|\,\mathfrak{w}\,|\right) + \left(\log k(\mathfrak{w}) - \overset{+}{\log}\,|\,\mathfrak{w}\,|\right) + \left(\log k(a) - \overset{+}{\log}\,|\,a\,|\right) + \overset{+}{\log}\,|\,a\,|$$

in die Form bringen

$$T_N(r,\infty) = T(r,a) + \log|\,\hat{\mathfrak{w}}_a(0)\,| + O(1) + O(\overset{+}{\log}\,|\,a\,|)\,. \tag{3.1}$$

Dies hat zur Folge den Satz:

Satz 2: *Man setze*

$$S(r,\mathfrak{w}) = \frac{1}{C}\int\limits_{\mathfrak{C}} k(\mathfrak{w})^{-4}\,|\,\mathfrak{w}'\,|^2\,d\sigma(z)\quad\left(C = \int\limits_{\mathfrak{C}} k(a)^{-1}\,d\sigma(a)\right). \tag{3.2}$$

Dann ist

$$T(r,\infty) = \int\limits_0^r S(t,\mathfrak{w})\,\frac{dt}{t} + O(1)\,. \tag{3.3}$$

Beweis. Zunächst gilt (Ahlfors' Kunstgriff [1])

$$T_N(r,\infty) = \frac{1}{C}\int\limits_{\mathfrak{C}} T(r,a)\,k(a)^{-4}\,d\sigma(a) + O(1)\,. \tag{3.4}$$

Andererseits ist

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} m(r,a)\,\frac{d\sigma(a)}{k(a)^4} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_{\mathfrak{C}}\log|\,\mathfrak{w},a\,|^{-1}\,\frac{d\sigma(a)}{k(a)^4}\right\}d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\tau_0\,d\vartheta\,,$$

also, wegen

$$\log\frac{[\mathfrak{w},a]}{|\mathfrak{w},a|} = \log\frac{k(\mathfrak{w})}{\sqrt{1+|\,\mathfrak{w}\,|^2}} + \log\frac{k(a)}{\sqrt{1+|\,a\,|^2}} = O(1) \tag{1}$$

$$C_1(1+|\,a\,|^2) \leqq k(a)^2 \leqq C_1(1+|\,a\,|^2) \tag{2}$$

$$\int\limits_{\mathfrak{C}}\log[\mathfrak{w},a]^{-1}\,\frac{d\sigma(a)}{(1+|\,a\,|^2)^2} = \int\limits_{\mathfrak{C}}\log[0,a]^{-1}\,\frac{d\sigma(a)}{(1+|\,a\,|^2)^2}\,; \tag{3}$$

$J_0 = O(1)$. Somit wird $(a \to \mathfrak{w}(z)\,!)$

$$T(r,\infty) = \frac{1}{C}\int\limits_{\mathfrak{C}} N(r,a)\,\frac{d\sigma(a)}{k(a)^4} + O(1) = \int\limits_0^r S(t,\mathfrak{w})\,\frac{dt}{t} + O(1)\,.$$

Entsprechende Sätze lassen sich für die G. af Hällströmsche [4] Verallgemeinerung der Nevanlinnaschen charakteristischen Funktion, sowie für die lokale charakteristische Funktion ($\mathfrak{w}$ meromorph für $0 < r_0 \leqq |\,z\,| \leqq R$, $r_0 \leqq |\,z\,| \leqq r$ anstelle von $|\,z\,| \leqq r$, Zusatzglied $O(\log r)$) beweisen.

LITERATURVERZEICHNIS

1. Ahlfors L. V. — *Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen* Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys. Math. 8: No 10 (1935), 14 S.
2. Cartan H. — *Sur la croissance des fonctions méromorphes d'une ou de plusieurs variables complexes.* Compt. Rend. Acad. Sci. Paris 188 (1929), S. 1374—1376.
3. Dinghas A. — *Der Weierstrass'sche Satz und die Anfänge der Wertverteilungstheorie.* Festschrift zur Gedächtnisfeier für Karl Weierstrass, 1815—1965. Westdeutscher Verlag, Köln-Opladen (1966), S. 169—81.

4. af Hällström, G. — *Über meromorphe Funktionen mit mehrfachzusammenhängenden Existenzgebieten*. Acta Acad. Abo. Math. Phys. 12: No 8 (1939), 100 S. (S. 18 ff).
5. Nevanlinna R. — *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Paris: Gauthier-Villars (1929).

ASUPRA DELIMITĂRII NOȚIUNII DE FUNCȚIE CARACTERISTICĂ NEVANLINNA

Rezumat

Autorul reamintește definițiile funcțiilor introduse de Nevanlinna în lucrarea [5]. Pornind de la integrala din (2.2) cu $u = \log |w|$ $v = \log r/|z|$ și n normala interioară, regăsește formula lui Jensen și apoi demonstrează prima teoremă fundamentală a lui Nevanlinna. În paragraful 3 se introduc funcții caracteristice generale și se demonstrează (3.3) care după cum se vede ușor, este o generalizare a formulei (2.10) din text.

ОБ ОДНОМ ЛОКАЛЬНОМ ПРИНЦИПЕ И АЛГЕБРАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ТЕПЛИЦЕВЫМИ МАТРИЦАМИ

И. Ц. ГОХБЕРГ и И. Я. КРУПНИК (Кишинев, СССР)

Основным содержанием этой статьи является исследование некоторых банаховых алгебр линейных ограниченных операторов, действующих в пространствах $l_p (1 < p < \infty)$. Образующие этих алгебр определяются теплицевыми матрицами, составленными из коэффициентов Фурье функций, которые в каждой точке имеют конечные пределы слева и справа.

В пространстве l_2 эти алгебры исследованы в статье [1], а в пространстве $h_p (1 < p < \infty)$[1] — в статье [2].

Первые важные результаты о названных алгебрах в пространствах $l_p (1 < p < \infty;\ p \neq 2)$ получены в самое последнее время в работах Р. В. Дудучава [3, 4]. Результаты Р. В. Дудучава развиваются в этой статье с помощью одного локального принципа. В пространствах L_p этот локальный принцип представляет собой некоторое упрощение локального принципа И. Б. Симоненко [5, 6]. Однако он применим к значительно более широкому классу банаховых пространств.

Существенную роль в статье играет также общая схема, разработанная в [7].

Статья состоит из семи параграфов. В первом излагается локальный принцип. Во втором параграфе приводятся первые приложения локального принципа. Они воспроизводят или обобщают некоторые результаты И. Б. Симоненко [8]. В третьем параграфе содержатся основные свойства ограниченных операторов в $l_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$, порожденных теплицевыми матрицами. В четвертом параграфе излагаются приложения локального принципа к исследованию ограниченных операторов, порожденных теплицевыми матрицами, составленными из коэффициентов Фурье непрерывных функций. Теоремы об обращении операторов, поро-

[1] Через h_p обозначается пространство последовательностей коэффициентов Фурье функций из пространства Харди H_p.