SUR L'ESPACE DUAL D'UN ESPACE LINÉAIRE À SEMI-NORMES HILBERTIENNES

PAR

TEODOR PRECUPANU

Dans cette Note, nous mettrons en évidence quelques propriétés remarquables de l'espace dual d'un espace linéaire à semi-normes hilbertiennes, compte tenu de leur liaison avec les espaces de Hilbert (voir aussi [1] et [8]).

Parmi d'autres-choses, on établit une condition nécessaire et suffisante afin qu'une σ - topologie sur le dual soit H-localement convexe. Ensuite, on fait quelques précisions pour le cas des familles dénombrables de semi-normes hilbertiennes.

§ 1. Soit X un espace linéaire sur le corps des scalaires Γ (le corps R des nombres réels ou le corps C des nombres complexes).

Définition 1. *On dit qu'une topologie linéaire sur X est H-localement convexe, si elle peut être engendrée par une famille de semi-normes hilbertiennes. Un espace linéaire muni d'une topologie H-localement convexe est appelé H-localement convexe.*

Parmi les espaces H-localement convexes se trouvent les espaces nucléaires ([3], p. 133), donc la plupart des espaces qui interviennent dans la théorie des distributions, et les espaces linéaires munis de topologies faibles induites par une dualité [9].

Soit $\mathcal{H} = \{ |\cdot|_\alpha ;\ \alpha \in A \}$ une famille dirigée et separée de semi-normes hilbertiennes, qui engendre la topologie H-localement convexe sur X et $\mathcal{H}' = \{ <\cdot,\cdot>_\alpha ;\ \alpha \in A \}$ la famille des semi-produits scalaires correspondants.

On remarque que chaque espace H-localement convexe est isomorphe à un sous-espace linéaire partout dense d'une limite projective d'espaces de Hilbert ([4], p. 231). De cette manière, le dual X^* d'un espace H-localement convexe X coïncide avec le dual d'une limite projective d'espaces de Hilbert, donc il est en correspondance anti-linéaire avec une limite inductive d'espaces de Hilbert. D'autre part, grâce au théorème de Riesz,

il résulte que pour chaque $x^* \in X^*$ il existe $\alpha \in A$ et $\hat{x}_\alpha \in \widehat{X}_\alpha$, tels que

$$x^*(y) = < \hat{\varphi}_\alpha y, \hat{x}_\alpha >_\alpha, \qquad y \in X, \tag{1}$$

où $\widehat{X}_\alpha$ est le complété de l'espace séparé associé, $X_\alpha = X / \ker |\cdot|_\alpha$, donc $\widehat{X}_\alpha$ est un espace de Hilbert, $\hat{\varphi}_\alpha$ est l'application d'immersion de X dans $\widehat{X}_\alpha$ obtenue de l'application canonique de X sur X_α et l'immersion de X_α dans $\widehat{X}_\alpha$, et le produit scalaire qui intervient dans le second membre prolonge par factorisation le semi-produit scalaire $< \cdot , \cdot >_\alpha$ à $\widehat{X}_\alpha \times \widehat{X}_\alpha$.

Ainsi, X^* est représenté par des éléments de $\bigcup_{\alpha \in A} \widehat{X}_\alpha$ à l'aide d'une surjection anti-linéaire multivoque.

Pour obtenir une injection anti-linéaire il suffit d'introduire la relation d'équivalence ρ suivante :

$\hat{x}'_\alpha \rho \hat{x}'_\beta$ si et seulement si $< \hat{\varphi}_\alpha y, \hat{x}'_\alpha >_\alpha = < \hat{\varphi}_\beta y, \hat{x}'_\beta >_\beta$ pour chaque $y \in X$.

La famille de semi-normes hilbertiennes $\mathcal{H}$ est dirigée et par suite, de la relation (1), il résulte que l'espace quotient $\bigcup_{\alpha \in A} \widehat{X}_\alpha / \rho$ a une structure naturelle d'espace linéaire. Cette représentation du dual d'un espace H-localement convexe est étroitement liée à la notion de réunion pseudo-topologique d'espaces de Hilbert ([5], p. 30). On voit aisément que du point de vue algébrique, on a

$$\bigcup_{\alpha \in A} \widehat{X}_\alpha / \rho = \lim \operatorname{ind} \widehat{X}_\alpha = \sum_{\alpha \in A} \widehat{X}_\alpha / N, \tag{2}$$

où le noyau N du système inductif est formé par les éléments $x = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}_\alpha \in \sum_{\alpha \in A} \widehat{X}_\alpha$ pour lesquels il existe $\alpha_0 \in A$ tel que

$$\sum_{\beta < \alpha_0} Q_{\alpha_0 \beta} \hat{x}_\beta = \hat{O}_{\alpha_0} \in \widehat{X}_{\alpha_0}$$

si $\hat{x}_\beta = \hat{O}_\beta$ pour $\beta \not\leq \alpha_0$. Nous avons désigné par $Q_{\gamma\delta} : \widehat{X}_\delta \to \widehat{X}_\gamma$, $\delta \leq \gamma$, les applications linéaires naturelles qui déterminent le système inductif et par $\hat{O}_\alpha$ l'élément nul de $\widehat{X}_\alpha$, $\alpha \in A$.

Les espaces linéaires de la relation (2) sont anti-isomorphes avec X^* et peuvent être munis d'une manière naturelle aussi de topologies linéaires induites par les topologies des espaces de Hilbert $\widehat{X}_\alpha$. Alors, on

peut poser la question : dans la relation (2) a-t-on aussi une coïncidence topologique et de plus, peut-on établir une liaison anti-isomorphe avec les topologies induites sur X^* par la dualité naturelle entre X et X^* ? Pour pouvoir répondre à cette question nous supposerons en plus, dans ce qui suit, que X est complet, donc

$$X = \lim \operatorname{proj} \widehat{X}_\alpha. \tag{3}$$

Théorème 1. *Chaque espace H-localement convexe séparé et complet possède les propriétés suivantes :*

1°. il est semi-réflexif, donc les ensembles bornés sont faiblement relativement compactes,

2°. il est réflexif si et seulement s'il est tonnellé,

3°. le dual fort est une limite inductive d'espaces de Hilbert, donc il est bornologique et tonnellé.

Démonstration. On obtient l'affirmation 1° aussitôt de (3) et le résultat connu que les limites projectives conservent la semi-réflexivité. L'affirmation 2° résulte de 1° et des propriétés caractéristiques des espaces réflexifs. D'autre part, de la relation (3) on obtient

$$X^* = \lim \operatorname{ind} \widehat{X}^*_\alpha. \tag{4}$$

pour la topologie de Mackey sur X^*. Comme l'espace est en même temps semi-réflexif, il résulte que la topologie de Mackey sur X^* coïncide avec la topologie forte, donc la relation (4) a lieu pour la topologie forte, ce qui entraîne la prèmiere partie de l'affirmation 3°. La deuxième partie de 3° a lieu parce que le caractère bornologique ou tonnellé d'un espace est conservé par les limites inductives.

On remarque que les semi-produits scalaires déterminent les fonctionnelles linéaires continues sur X ; donc nous pourrons généraliser la liaison entre la convergence faible et la convergence forte déjà connue pour les espaces préhilbertiens.

Proposition 2. *Si une suite généralisée $\{x_i : i \in I\}$ d'éléments d'un espace H-localement convexe séparé est faiblement convergente vers x_0 et la suite généralisée $\{|x_i|_\alpha : i \in I\}$ est convergente vers $|x_0|_\alpha$ pour chaque $\alpha \in A$, alors $\{x_i : i \in I\}$ est convergente vers x_0 pour la topologie H-localement convexe initiale.*

Démonstration. Comme $x^*(x) = < x, x_0 >_\alpha$ est une fonctionnelle linéaire continue sur X, pour chaque $\alpha \in A$, il résulte que $< x_i, x_0 >_\alpha \to < x_0, x_0 >_\alpha = |x_0|^2_\alpha$. D'autre part, $|x_i - x_0|^2_\alpha = |x_i|^2_\alpha + |x_0|^2_\alpha - 2 \operatorname{Re} < x_i, x_0 >_\alpha$, donc $|x_i - x_0|_\alpha \to 0$, c'est-à-dire $x_i \to x_0$ dans la topologie initiale.

§ 2. Pour pouvoir préciser dans quelles conditions une topologie sur X^* compatible avec la dualité naturelle est une topologie H-localement convexe, nous établirons la:

Proposition 3. *Si M est un ensemble de X H-convexe, borné, équilibré et fermé alors*

$$p_M(x^*) = \sup_{x \in M} |x^*(x)| \tag{5}$$

est une semi-norme hilbertienne sur X^*.

Démonstration. Il résulte de [7] que la fonctionnelle de Minkovski q_M associée à l'ensemble M est justement une norme hilbertienne sur l'enveloppe linéaire $\mathcal{S}(M)$ de l'ensemble M et $M = \{x;\ x \in \mathcal{S}(M).\ q_M(x) \leqslant 1\}$ parce que M est fermé. Par conséquent, on a

$$p_M(x^*) = \sup_{q_M(x) \leqslant 1} |x^*(x)|. \tag{5'}$$

D'autre part,

$$x^*/\mathcal{S}(M) \in \mathcal{S}(M)^*$$

où $\mathcal{S}(M)^*$ est le dual de l'espace prehilbertien $\mathcal{S}(M)$ relativement à la norme q_M. Il résulte de la relation (5') que $p_M/\mathcal{S}(M)^*$ est la norme hilbertienne duale de q_M dans $\mathcal{S}(M)^*$, c'est-à-dire p_M est une seminorme hilbertienne sur X^* ayant comme noyau les fonctionnelles linéaires continues sur X qui s'annulent sur $\mathcal{S}(M)$.

Conséquence. *La polaire d'un ensemble borné équilibré et H-convexe d'un espace linéaire topologique localement convexe est aussi H-convexe.*

Démonstration. On remarque que la semi-norme hilbertienne p_M définie par la relation (5) est la fonctionnelle de Minkovski de la polaire de M. De même, la proposition 3 est vraie dans un espace linéaire topologique arbitraire.

Définition 2. *On dit que deux familles de parties bornées de* X *sont équivalentes si les topologies de convergence uniforme engendrées sur* X^* *sont coïncidentes.*

Définition 3. *Soit* σ *une famille d'ensembles bornés sur* X; *on dit qu'une sous-famille* $\mathcal{S} \subset \sigma$ *est un système fondamental pour* σ *si pour chaque* $M \in \sigma$ *il existe* $S \in \mathcal{S}$ *tel que* $M \subset S$.

Théorème 4. *Une* σ*-topologie sur* X^* *est H-localement convexe si et seulement s'il existe une famille* σ_H, *formée par des ensembles H-convexes, équivalente à* σ.

Démonstration. La suffisance de la condition résulte immédiatement de la conséquence précédente parce qu'une σ-topologie sur X^* est engendrée par les polaires des ensembles de σ_H.

Pour montrer la nécesité, nous supposerons qu'on a une σ-topologie H-localement convexe, donc qui est engendrée par une famille $\mathcal{P} = \{p\}$ de semi-normes hilbertiennes sur X^*. Si $S_p^0 = \{x^*;\ p(x^*) \leqslant 1\}$ pour chaque $p \in \mathcal{P}$, alors la σ-topologie est engendrée par la famille d'ensembles $\{S_p^0;\ p \in \mathcal{P}\}$, où nous avons désigné par S_p^0 la polaire de l'ensemble S_p dans X. Mais, nous voyons que grâce à la même conséquence S_p^0 sont des parties H-convexes et la famille de ces parties de X^* est équivalente à σ.

Conséquence. *La topologie forte sur un espace localement convexe est H-localement convexe si et seulement si la famille des ensembles bornés possède un système fondamental d'ensembles H-convexes; dans ce cas on dit que l'espace est dual H-convexe.*

Remarque. Le dual fort d'un espace H-localement convexe n'est pas en général H-localement convexe parce que, par exemple, la topologie faible d'un espace localement convexe quelconque est toujours H-localement convexe et alors il résulterait que le dual fort de chaque espace localement convexe est H-localement convexe. Mais, il existe des espaces normés avec le dual non-équivalent à un espace de Hilbert [6].

§ 3. Dans ce qui suit, nous ferons certaines précisions pour le cas particulier des espaces séparés et complets par rapport à une famille dénombrable de semi-normes hilbertiennes. Dans ce cas, on obtient les espaces de Fréchet H-localement convexes. Il résulte du théorème 1 que chaque espace de Fréchet H-localement convexe est réflèxif.

Théorème 5. *Le dual fort d'un espace de Fréchet H-localement convexe est H-localement convexe.*

Démonstration. Grâce au théorème 1.3° il suffit de démontrer que chaque espace qui est une limite inductive d'une famille dénombrable d'espaces de Hilbert est un espace H-localement convexe. Comme chaque espace quotient d'un espace H-localement convexe est H-localement convexe il suffit de montrer qu'une somme directe dénombrable d'espaces de Hilbert est un espace H-localement convexe. Si $\{H_n : n \in N\}$ est une famille d'espaces de Hilbert, alors la topologie de la somme directe $\sum_{n \in N} H_n$ est engendrée par la famille de semi-normes

$$|x|_\lambda = \sum_{n \in N} \lambda_n \|x_n\|_n, \tag{6}$$

où $x = \sum_{n \in N} x_n$ (tel que l'ensemble $\{n;\ x_n \neq 0\}$ soit fini), $\|\cdot\|_n$ est la norme dans l'espace de Hilbert H_n et $\lambda = (\lambda_n)$ avec $\lambda_n \geqslant 0$ (voir aussi [1] et [2]). Si on désigne

$$|x|'_\lambda = \Big(\sum_{n \in N} \lambda_n^2 \|x_n\|_n^2\Big)^{1/2}, \tag{6'}$$

alors $|\cdot|'_\lambda$ sont des semi-normes hilbertiennes. D'autre part, on a les inégalités

$$|x|'_\lambda \leqslant |x|_\lambda, \tag{7}$$

$$|x|_\lambda = \sum_{n \in N} \lambda_n \|x_n\|_n \leqslant \Big(\sum_{n \in N} 1/2^n\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n \in N} 2^n \lambda_n^2 \|x_n\|_n^2\Big)^{1/2} = |x|'_\mu, \text{ où} \tag{7'}$$

$$\mu = (2^{n/2} \lambda_n).$$

Par conséquent les semi-normes définies par les relations (6) et (6') sont équivalentes, c'est-à-dire $\sum_{n \in N} H_n$ est un espace H-localement convexe.

Conséquence. *La famille des ensembles bornés d'un espace de Fréchet H-localement convexe possède un système fondamental d'ensembles H-convexes*

En effet, comme la topologie forte est H-localement convexe, grâce au théorème 4, il résulte qu'il existe un système fondamental d'ensembles bornés et H-convexes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cotlar M. — *Equipacion con espacios de Hilbert*. Curso, Univ. de Buenos Aire 1968.
2. De Wilde M. — *Limite inductive d'espaces linéaires seminormés*. Bull. Soc. Roy Sci. Liège, 7—8, 1963, p. 476.
3. De Wilde M. — *Espaces de fonctions à valeurs dans un espaces linéaires à seminormes*. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, 1966.
4. Köthe G. — *Topological vector spaces*. t. 1. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
5. Marinescu G. — *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice*. București ed. 1959.
6. Olagunju P. — *A Banach space that cannot be made into a BIP space*. Proc. Cambridge Philos. Soc., 63, 1967, p. 849.
7. Precupanu T. — *Sur les produits scalaires dans des espaces vectoriels topologiques*. Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13, 1968, p. 85.
8. Precupanu T. — *Espaces linéaires à seminormes hilbertiennes*. An. șt. Univ. Iași, seria mat., 15, 1969, p. 83.
9. Precupanu T. — *Espaces linéaires H-bornologiques*. An. șt. Univ. Iași, seria mat. 18, 1972 p. 315.

ASUPRA DUALULUI UNUI SPAȚIU LINIAR CU SEMINORME HILBERTIENE

Rezumat

Se pun în evidență unele proprietăți de dualitate pentru spațiile H-local convexe (def. 1) separate și complete, spații care se dovedesc a fi semireflexive. Printre altele, se dau condiții necesare și suficiente pentru ca dualul tare să fie H-local convex (teoremele 3 și 4). În ultima parte, § 3, se fac precizări pentru cazul particular al spațiilor Fréchet H-local convexe.

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET TOPOLOGIES ASSOCIÉES AUX MEILLEURES APPROXIMATIONS ASYMÉTRIQUES

PAR

N. NEGOESCU

§ 1. Les fonctions $T(x)$ et f et les ensembles réticulés associés par f aux nombres irrationnels. Soient E l'ensemble des nombres irrationnels réels et x un élément fixé de E, ayant le développement en fraction continue infinie $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, où a_0 est entier et a_j sont des nombres naturels strictement positifs pour $j = 1, 2, \ldots$

Définition 1. *On appelle fonction de meilleure approximation asymétrique pour x de E l'application $T(x)$ définie pour chaque point $t \geq 0$ comme la borne supérieure des nombres réels strictement positifs μ pour lesquels il existe une infinité de fractions rationnelles p/q qui satisfont aux inégalités:*

$$-\frac{1}{\mu q^2} < \frac{p}{q} - x < \frac{t}{\mu q^2}, \quad t \geq 0. \tag{1}$$

En employant la méthode de O. Perron [1], nous avons montré dans la Note [2] que la valeur de la fonction $T(x)$ dans t est donnée par la formule

$$T(x)(t) = \max\left[\limsup \mu_{2n}(x),\ t \limsup \mu_{2n+1}(x)\right], \tag{2}$$

où

$$\mu_n(x) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] + [0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]. \tag{3}$$

La formule (2) devient

$$T(x)(t) = \max\left[L_0(x),\ tL_1(x)\right] \tag{4}$$

si l'on note $\limsup \mu_{2n}(x)$ et $\limsup \mu_{2n+1}(x)$ par $L_0(x)$ et $L_1(x)$ respectivement.

Remarque 1. Les inégalités (1), la formule (3) et les définitions de $L_0(x)$ et $L_1(x)$ montrent qu'on peut considérer a_0 (le premier quotient incomplet de x) comme un entier strictement positif. En effet, on voit que