Conséquence. *La famille des ensembles bornés d'un espace de Fréchet H-localement convexe possède un système fondamental d'ensembles H-convexes*

En effet, comme la topologie forte est H-localement convexe, grâce au théorème 4, il résulte qu'il existe un système fondamental d'ensembles bornés et H-convexes.

BIBLIOGRAPHIE

1. Cotlar M. — *Equipacion con espacios de Hilbert.* Curso, Univ. de Buenos Aire 1968.
2. De Wilde M. — *Limite inductive d'espaces linéaires seminormés.* Bull. Soc. Roy Sci. Liège, 7—8, 1963, p. 476.
3. De Wilde M. — *Espaces de fonctions à valeurs dans un espaces linéaires à seminormes.* Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, 1966.
4. Köthe G. — *Topological vector spaces.* t. 1. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
5. Marinescu G. — *Spații vectoriale topologice și pseudotopologice.* București ed. 1959.
6. Olagunju P. — *A Banach space that cannot be made into a BIP space.* Proc. Cambridge Philos. Soc., 63, 1967, p. 849.
7. Precupanu T. — *Sur les produits scalaires dans des espaces vectoriels topologiques.* Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13, 1968, p. 85.
8. Precupanu T. — *Espaces linéaires à seminormes hilbertiennes.* An. șt. Univ. Iași, seria mat., 15, 1969, p. 83.
9. Precupanu T. — *Espaces linéaires H-bornologiques.* An. șt. Univ. Iași, seria mat. 18, 1972 p. 315.

ASUPRA DUALULUI UNUI SPAȚIU LINIAR CU SEMINORME HILBERTIENE

Rezumat

Se pun în evidență unele proprietăți de dualitate pentru spațiile H-local convexe (def. 1) separate și complete, spații care se dovedesc a fi semireflexive. Printre altele, se dau condiții necesare și suficiente pentru ca dualul tare să fie H-local convex (teoremele 3 și 4). În ultima parte, § 3, se fac precizări pentru cazul particular al spațiilor Fréchet H-local convexe.

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE ET TOPOLOGIES ASSOCIÉES AUX MEILLEURES APPROXIMATIONS ASYMÉTRIQUES

PAR

N. NEGOESCU

§ 1. Les fonctions $T(x)$ et f et les ensembles réticulés associés par f aux nombres irrationnels. Soient E l'ensemble des nombres irrationnels réels et x un élément fixé de E, ayant le développement en fraction continue infinie $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, où a_0 est entier et a_j sont des nombres naturels strictement positifs pour $j = 1, 2, \ldots$

Définition 1. *On appelle fonction de meilleure approximation asymétrique pour x de E l'application $T(x)$ définie pour chaque point $t \geqslant 0$ comme la borne supérieure des nombres réels strictement positifs μ pour lesquels il existe une infinité de fractions rationnelles p/q qui satisfont aux inégalités:*

$$-\frac{1}{\mu q^2} < \frac{p}{q} - x < \frac{t}{\mu q^2}, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

En employant la méthode de O. Perron [1], nous avons montré dans la Note [2] que la valeur de la fonction $T(x)$ dans t est donnée par la formule

$$T(x)(t) = \max\left[\limsup \mu_{2n}(x),\ t \limsup \mu_{2n+1}(x)\right], \tag{2}$$

où

$$\mu_n(x) = [a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots] + [0, a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]. \tag{3}$$

La formule (2) devient

$$T(x)(t) = \max\left[L_0(x),\ tL_1(x)\right] \tag{4}$$

si l'on note $\limsup \mu_{2n}(x)$ et $\limsup \mu_{2n+1}(x)$ par $L_0(x)$ et $L_1(x)$ respectivement.

Remarque 1. Les inégalités (1), la formule (3) et les définitions de $L_0(x)$ et $L_1(x)$ montrent qu'on peut considérer a_0 (le premier quotient incomplet de x) comme un entier strictement positif. En effet, on voit que

les fonctions L_0, L_1, μ_n ne dépendent pas de a_0 et $T(x)(t) = T(x')(t)$ pour $t \geq 0$, où $x' = [p, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ et que p est un entier strictement positif.

Le graphe de la fonction $T(x)$ dans le plan tOT est une ligne brisée, formée par un segment parallèle à Ot et une demi-droite dont le prolongement passe par l'origine.

Le point anguleux de ce graphe, de coordonnées

$$t = \frac{L_0(x)}{L_1(x)}, \quad T = L_0(x),$$

détermine complètement la fonction $T(x)$. C'est pourquoi nous considérons dans ce qui suit à la place de la fonction $T(x)$, la fonction f définie par

$$f : x \to \left(\frac{L_0(x)}{L_1(x)}, L_0(x)\right), \tag{5}$$

ce qui fait correspondre à x de E le point anguleux du graphe de la fonction $T(x)$ de la meilleure approximation asymétrique pour x.

Pour les fonctions L_0, L_1 et f nous avons :

Proposition 1. a) *Pour tout x de E*

$$L_0\left(\frac{1}{x}\right) = L_1(x), \quad L_1\left(\frac{1}{x}\right) = L_0(x) \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{L_1(x)}{L_0(x)}, L_1(x)\right).$$

b) *Pour avoir $f(x) = f(y)$, il faut et il suffit que $L_0(x) = L_0(y)$ et $L_1(x) = L_1(y)$.*

c) *Pour tout x de E et deux nombres entiers positifs quelconques α_0 et α_1, il existe au moins un élément $y \in E$ tel que*

$$L_0(y) = \alpha_0 + L_0(x), \quad L_1(y) = \alpha_1 + L_1(x) \quad \text{et}$$

$$f(y) = \left(\frac{\alpha_0 + L_0(x)}{\alpha_1 + L_1(x)}, \alpha_0 + L_0(x)\right).$$

Démonstration. a) En remplaçant x par $1/x$ on change la parité des quotients partiels et ainsi on change L_0 avec L_1 et réciproquement ;

b) est évidente;

c) vu que $L_0(x) = \limsup \mu_{2n}(x)$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un nombre pair $2n_1$ tel que

$$\mu_{2n}(x) < L_0(x) + \varepsilon, \text{ pour } n > n_1 \text{ et } \mu_{2n_1}(x) > L_0(x) - \varepsilon.$$

ensuite $L_1(x) = \limsup \mu_{2n+1}(x)$, il existe un nombre impair $2n_2 + 1 > 2(2n_1)$, tel que $\mu_{2n+1}(x) < L_1(x) + \varepsilon$ pour $n > n_2$ et $\mu_{2n_2+1}(x) > L_1(x) - \varepsilon$. En général, il existe un nombre pair $2n_{2p+1} > 2(2n_{2p} + 1)$ tel que

$$\mu_{2n}(x) < L_0(x) + \varepsilon \text{ pour } n > n_{2p+1} \text{ et } \mu_{2n_{2p+1}}(x) > L_0(x) - \varepsilon$$

et un nombre impair $2n_{2p+2} + 1 > 2(2n_{2p+1})$ tel que

$$\mu_{2n+1}(x) < L_1(x) + \varepsilon \text{ pour } n > n_{2p+2} \text{ et } \mu_{2n_{2p+2}+1}(x) > L_1(x) - \varepsilon.$$

Si le développement en fraction continue infinie du nombre x de E est $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, soit y le nombre qui a les quotients incomplets b_n donnés par

$$b_n = \begin{cases} a_n + \alpha_0 \text{ pour } n = 2n_1 + 1, 2n_3 + 1, \ldots, 2n_{2p+1} + 1, \ldots \\ a_n + \alpha_1 \text{ pour } n = 2n_2 + 2, 2n_4 + 2, \ldots, 2n_{2p+2} + 2, \ldots \\ a_n \text{ pour tout autre, } n, \end{cases}$$

où α_0 et α_1 sont deux nombres entiers positifs quelconques et $n_1, n_2, \ldots, n_{2p+1}, n_{2p+2}, \ldots$ est une suite strictement croissante de nombres naturels qui satisfont aux conditions imposées. Pour p suffisamment grand il suit que ;

$$\begin{cases} \mu_{2n}(y) < \alpha_0 + L_0(x) + \varepsilon \text{ pour } n > n_{2p+1}, \\ \mu_{2n_{2p+1}}(y) > \alpha_0 + L_0(x) - \varepsilon, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \mu_{2n+1}(y) < \alpha_1 + L_1(x) + \varepsilon \text{ pour } n > n_{2p+2}, \\ \mu_{2n_{2p+2}+1}(y) > \alpha_1 + L_1(x) - \varepsilon. \end{cases}$$

Ces inégalités montrent que :

$$\limsup \mu_{2n}(y) = L_0(y) = \alpha_0 + L_0(x) \text{ et}$$
$$\limsup \mu_{2n+1}(y) = L_1(y) = \alpha_1 + L_1(x),$$

ce qui démontre complètement la proposition 1.

Remarque 2. Il y a des nombres x et y de E différents entre eux tels que $f(x) = f(y)$, c'est-à-dire que f n'est pas injective.

En effet, si $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ est le développement en fraction continue du nombre x de E, alors les nombres y avec le développement en fraction continue $[b_0, b_1, \ldots, b_q, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, où $b_0, b_1, \ldots b_q$ sont des nombres naturels quelconques, satisfont évidemment à la relation $f(x) = f(y)$.

Remarque 3. La proposition 1 c) montre que l'ensemble réticulé des points du plan tOT

$$\left\{\left(\frac{\alpha_0 + L_0(x)}{\alpha_1 + L_1(x)}, \alpha_0 + L_0(x)\right)\right\}_{\substack{\alpha_0 \in N \\ \alpha_1 \in N}}$$

appartient à l'ensemble E. Il est formé avec les points d'intersection des droites

$$T = L_0(x), \quad T = 1 + L_0(x), \quad T = 2 + L_0(x), \ldots$$
$$T = L_1(x)t, \quad T = [1 + L_1(x)]t, \quad T = [2 + L_1(x)]t, \ldots$$

Définition 2. *On appelle ensemble réticulé de type* $\mathcal{L}^0_{p_0,p_1}(x)$ *associé au point* x *de* E *par* f *l'ensemble des points :*

$$\left\{\left(\frac{\alpha_0+L_0(x)}{\alpha_1+L_1(x)},\ \alpha_0+L_0(x)\right)\right\}_{\substack{\alpha_0=k_0p_0\\ \alpha_1=k_1p_1}},$$

ou k_0 *et* k_1 *sont des nombres entiers positifs et* p_0, p_1 *sont des nombres entiers strictement positifs.*

L'ensemble des points

$$\left\{\left(\frac{\alpha_1+L_1(x)}{\alpha_0+L_0(x)},\ \alpha_1+L_1(x)\right)\right\}_{\substack{\alpha_0=k_0p_0\\ \alpha_1=k_1p_1}}$$

sera nommé un ensemble réticulé $\mathcal{L}^1_{p_0,p_1}(x)$ s'il est $\mathcal{L}^0_{p_1,p_0}\left(\frac{1}{x}\right)$ et k_0, k_1, p_0, p_1 satisfont aux conditions de la définition 2. Avec cette définition, l'ensemble réticulé de la remarque 3 est $\mathcal{L}^0_{11}(x)$. Les propriétés évidentes de ces ensembles reticulés sont données par la

Proposition 2 a) *La réunion de deux ensembles réticulés du même type n'est pas en général un ensemble réticulé ; évidemment c'est un ensemble réticulé du même type seulement quand un d'eux est un sous-ensemble de l'autre.*

b) *L'intersection de deux ensembles réticulés du même type associés a deux nombres différents de* E *par* f *est l'ensemble vide ou bien un ensemble réticulé du même type associé à un nombre de* E *tel que* $f(z)$ *appartienne aux deux ensembles réticulés.*

§ 2. Les relations R^0, R, R^0 et R d'équivalence sur E. Définition 3. *On dit que* x *est proprement équivalent à* y $(x, y \in E)$ *et l'on note* xR^0y *si* x *et* y *ont les développements en fractions continues infinies de la forme*

(6) $x = [a_0, a_1, \ldots, a_k, c_1, c_2, c_3, \ldots],\ y = [b_0, b_1, \ldots, b_{k'}, c_1, c_2, c_3, \ldots],$

où $k - k' \equiv 0 \pmod 2$.

On dit que x *est improprement équivalent à* y $(x, y \in E)$ *et l'on note* xR^1y *si* x *et* y *ont les développements en fractions continues infinies de la forme* (6) *où* $k - k' \equiv 1 \pmod 2$.

On dit que x *est équivalent à* y *et l'on écrit* xRy *si* x *et* y *ont les développements en fractions continues infinies de la forme* (6).

On démontre facilement, comme dans [3], que xR^0y si

$$y = \frac{ax+b}{cx+d},\quad a, b, c, d \in \mathbf{Z} \tag{7}$$

et $ad - bc = 1$,

xR^1y si x et y satisfont à (7) et $ad - bc = -1$ et
xRy si x et y satisfont à (7) et $|ad - bc| = 1$.

La proposition suivante donne des propriétés de ces trois relations définies.

Proposition 3. a) *La relation* R^0 *est une relation d'équivalence.*
b) *La relation* R^1 *est symétrique, elle n'est ni réflexive, ni transitive.*
c) xR^1y *et* $yR^1z \Rightarrow xR^0z$; xR^1y *et* $yR^0z \Rightarrow xR^1z$; xR^0y *et* $xR^1z \Rightarrow xR^1z$.
d) *La relation* R^1 *est compatible avec la relation d'équivalence* R^0.
e) $R = R^0 \cup R^1$.
f) R *est une relation d'équivalence.*
g) *L'ensemble des nombres proprement, improprement équivalents ou équivalents à un nombre* x *de* E *est dénombrable.*
h) *La relation d'équivalence* R^0 *est plus fine que* R $(R^0 \subset R)$.

Démonstration. $x = x$ montre que xR^0x $(a = d = 1,\ b = c = 0)$. $x \neq -x$ pour $x \in E$ $(a = -1,\ d = 1,\ b = c = 0)$ montre que R^1 n'est pas réflexive. Du fait que $x = (dy - b)/(cy + a)$, il suit que les relations R^0 et R^1 sont symétriques. Du fait que $y = (ax + b)/(cx + d)$ et $z = (a'y + b')/(c'y + d')$, il résulte que $z = (a''x + b'')/(c''x + d'')$ où a'', b'', c'', d'' sont des nombres entiers si a, b, c, d, a', b', c', d' sont des nombres entiers, $A'' = AA'$ et

$$A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},\quad A' = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix},\quad A'' = \begin{vmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{vmatrix}.$$

Cette remarque montre la transitivité de la relation R^0 et les résultats de c).

R^1 est une relation symétrique compatible avec la relation d'équivalence R^0 parce que xR^1y et xR^0x' impliquent $x'R^1y$, en écrivant $x'R^0x$ et xR^1y et employant c).

La définition 3 montre que R est $R^0 \cup R^1$ et, de a), b), c), il suit que R est une relation d'équivalence.

Il y a autant de nombres proprement équivalents à x de E combien il y a de quadruples a, b, c, d satisfaisant à la relation $ad - bc = 1$, où a, b, c, d sont des nombres entiers, c'est-à-dire leur ensemble est dénombrable. Le même résultat se maintient pour les relation R^1 et R.

xR^0y entraîne xRy, de sorte que la relation d'équivalence R^0 est plus fine que R.

Remarque 4. Pour tout x et y de E nous avons :

$$xR^0y \Rightarrow f(x) = f(y),\quad xR^1y \Rightarrow f(x) = f(1/y),$$
$$xRy \Rightarrow f(x) = f(y) \text{ ou } f(x) = f(1/y).$$

Cette remarque suggère l'introduction de nouvelles relations sur E.

Définition 4. *On dit que* x *et* y *sont en relation* $\underline{R}^0$ $(x\underline{R}^0y)$ *si* $f(x) = f(y)$.

On dit que x *et* y *sont en relation* $\underline{R}^1$ $(x\underline{R}^1y)$ *si* $f(x) = f(1/y)$.

Enfin on dit que x *et* y *sont en relation* $\underline{R}$ $(x\underline{R}y)$ *si* $f(x) = f(y)$ *ou* $f(x) = f(1/y)$.

La proposition suivante élargit les propriétés des relations R^0, R^1, R aux nouvelles relations introduites par la définition 4.

Proposition 4. a) *La relation $\underline{R}^0$ est une relation d'équivalence.*

b) *La relation $\underline{R}^1$ est symétrique; elle n'est pas transitive et en général elle n'est pas réflexive.*

c) $x\underline{R}^1y$ *et* $y\underline{R}^1z \Rightarrow x\underline{R}^0y$; $x\underline{R}^1y$ *et* $y\underline{R}^0z \Rightarrow x\underline{R}^1z$; $x\underline{R}^0y$; *et* $y\underline{R}^1z \Rightarrow$ $\Rightarrow x\underline{R}^1z$.

d) *La relation $\underline{R}^1$ est compatible avec la relation d'équivalence $\underline{R}^0$.*

e) $\underline{R} = \underline{R}^0 \cup \underline{R}^1$.

f) *$\underline{R}$ est une relation d'équivalence.*

g) *Les classes d'équivalence* modulo $\underline{R}^0$ *ou* $\underline{R}$ *pour les nombres de E qui ont une infinité de quotients partiels différents de 1 ont la puissance du continu.*

h) *Entre les relations d'équivalence $\underline{R}^0$ et $\underline{R}$ il y a la relation de finesse $\underline{R}^0 \subset \underline{R}$.*

Démonstration. a) Évidemment $\underline{R}^0$ est une relation d'équivalence.

b) $x\underline{R}^1y$ si et seulement si $f(x) = f(1/y)$ ou $(L_0(x)/L_1(x),\ L_0(x)) = (L_1(y)/L_0(y),\ L_1(y))$ donc, si $L_0(x) = L_1(y)$ et $L_1(x) = L_0(y)$, les deux dernières égalités entraînent $L_0(y) = L_0(1/x)$ et $L_1(y) = L_1(1/x)$, c'est-à-dire

$$f(y) = \left(\frac{L_0(y)}{L_1(y)},\ L_0(y)\right) = \left(\frac{L_0\left(\frac{1}{x}\right)}{L_1\left(\frac{1}{x}\right)},\ L_0\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \left(\frac{L_1(x)}{L_0(x)},\ L_1(x)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui montre que $y\underline{R}^1x$.

La relation $\underline{R}^1$ est réflexive seulement pour les nombres irrationnels réels x qui ont l'image par f sur la droite $t = 1$, c'est-à-dire $L_0(x) = L_1(x)$ ou $L_0(x) = L_0(1/x)$ et alors $f(x) = f(1/x)$ entraîne $x\underline{R}^1x$.

c) Nous allons prouver seulement le premier énoncé parce que les autres se démontrent de la même manière.

$x\underline{R}^1y$ et $y\underline{R}^1z$ est équivalent à $f(x) = f(1/y)$ et $f(y) = f(1/z)$. La dernière égalité s'écrit $f(1/y) = f(z)$ (parce que $\underline{R}^1$ est symétrique). Il s'ensuit que $f(x) = f(z)$ et donc $x\underline{R}^0z$.

d) $x\underline{R}^1y$ et $x'\underline{R}^0x$ est équivalente à $x'\underline{R}^0x$ et $x\underline{R}^1y$ donc $x'\underline{R}^1y$, c'est-à-dire $\underline{R}^1$ et $\underline{R}^0$ sont compatibles.

e) La définition 4 montre que $\underline{R} = \underline{R}^0 \cup \underline{R}^1$.

f) Les propriétés a, b, c montrent que $\underline{R}$ est une relation d'équivalence.

g) Soit $x = [0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots]$ un nombre irrationnel réel de E tel qu'il existe une infinité de quotients incomplets plus gands que 1. Les nombres $\eta = [0, 1, a_1, a_2, \ldots 1, 1, a_{2\lambda_1}, a_{2\lambda_1+1}, 1, 1, \ldots a_{2\lambda_1+2\lambda_2-1}, 1, 1, \ldots]$ sont équivalents modulo $\underline{R}^0$ et $\underline{R}$ à x quand $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$.

Soit ξ un point de l'intervalle $(0, 1)$ avec l'abscisse irrationnelle. Le développement en fraction continue infinie de ξ est $[0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots]$ et nous notons $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \ldots \lambda_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \ldots$ Evidemment $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$. À ces valeurs de la suite (λ_n) correspond un nombre η. Ainsi nous avons défini une application $A : \xi \to \eta$. Nous montrerons que l'application A est injective, c'est-à-dire $A(\xi) = A(\xi') \Rightarrow \xi = \xi'$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ les valeurs de λ correspondantes au nombre $\eta = A(\xi)$ et $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n, \ldots$ les valeurs de λ correspondantes au nombre $\eta' = A(\xi')$. Si $A(\xi) = A(\xi')$, du fait que le développement d'un nombre en fraction continue régulière infinie est unique il suit que les deux suites (λ_n) et (λ'_n) doivent être identiques et cela prouve que les développements en fraction continue infinie des nombres ξ et ξ' sont aussi identiques, c'est-à-dire que $\xi = \xi'$.

De cette discussion, il résulte que l'ensemble des nombres η a la même puissance que l'ensemble des nombres irrationnels de l'intervalle $(0, 1)$, c'est-à-dire qu'elle est de la puissance du continu.

h) Du fait que $x\underline{R}^0y \Rightarrow x\underline{R}y$, il s'ensuit que $\underline{R}^0$ est plus fine que la relation $\underline{R}$ ou $\underline{R}^0 \subset \underline{R}$.

§ 3. Diagrammes pour les relations introduites et les décompositions canoniques de la fonction f. Proposition 5. *Les quatre relations d'équivalence R^0, R, $\underline{R}^0$, $\underline{R}$ sont dans les relations de finesse données par le diagramme :*

$$\begin{array}{ccc} R^0 & \subset & R \\ \cap & & \cap \\ \underline{R}^0 & \subset & \underline{R} \end{array}$$

Démonstration. On voit de la remarque 4 et de la définition 4 des relations R^0 et R que $xR^0y \Rightarrow x\underline{R}^0y$ et $xRy \Rightarrow x\underline{R}y$, c'est-à-dire $R^0 \subset \underline{R}^0$ et $R \subset \underline{R}$. Les autres relations de finesse sont prouvées par les propositions 3 et 4.

Remarque 5. Il y a des nombres x et y de E tels que xR^0y, xRy, mais x n'est pas équivalent à y par les relations d'équivalence R^0 et R. En effet les nombres $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$, ayant une infinité de a_j différents de 1, et $y = [1, 1, a_1, a_2, 1, 1, a_3, a_4, a_5, a_6, 1, 1, a_7, \ldots, a_{14}, 1, 1, \ldots]$ satisfont aux conditions données.

Proposition 6. *Pour les décompositions canoniques de la fonction f par rapport à $\underline{R}^0$ et R^0, $\underline{R}^0$, il y a le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\underline{\varphi}^0"] & F \\
E/R^0 \arrow[ur, "\varphi_0"] \arrow[r, "\varphi"] & E/\underline{R}^0 \arrow[r, "\underline{\psi}^0"] & f[E] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

où E/R^0 et $E/\underline{R}^0$ sont des ensembles quotient de E par les relations R^0 et $\underline{R}^0$, φ^0 est l'application canonique de E sur E/R^0, $\underline{\varphi}^0$ est l'application canonique de E/R^0 sur $E/\underline{R}^0$, $\underline{\psi}^0$ est l'application bijective associée à la fonction f de $E/\underline{R}^0$ sur $f[E]$ et i est l'application injective canonique de $f[E]$ dans F.

Cela prouve que les deux décompositions canoniques de la fonction f sont $f = i \circ \underline{\psi}^0 \circ \underline{\varphi}^0$ et $f = i \circ \underline{\psi}^0 \circ \varphi \circ \varphi^0$.

Remarque 6. On peut introduire la relation d'équivalence quotient $\underline{R}^0/R^0$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\varphi^0"] \arrow[dr, "\underline{\varphi}^0"'] & E/R^0 \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\varphi"] & (A/R^0)/(\underline{R}^0/R^0) \arrow[dl, "\varphi''"] \\
 & E/\underline{R}^0 &
\end{tikzcd}$$

où φ' est $\varphi^{-1} \circ \varphi$ et est une application bijective telle que $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$.

Remarque 7. La relation d'équivalence R détermine une relation S de E à F telle qu'à tous les points de E équivalents par R, correspondent deux points de $f[E]$, l'un dans la bande $0 \leqslant t \leqslant 1$ et l'autre dans la région $t \geqslant 1$. Aussi la relation d'équivalence $\underline{R}$ sur E détermine une relation S de E à F ayant la même propriété, c'est-à-dire qu'à tous les points de E équivalents par R correspondent deux points distincts ou confondus de $f[E]$, l'un dans la bande $0 \leqslant t \leqslant 1$ et l'autre dans la région $t \geqslant 1$.

Soient E_1 l'ensemble des points de E qui ont les images par f dans F_1 (l'intersection de F avec la bande $0 \leqslant t \leqslant 1$), E_2 l'ensemble des points de E qui ont les images par f dans F_2 (l'intersection de F avec la région $t \geqslant 1$) et f_1 et f_2 les restrictions de la fonction f à E_1 respectivement à E_2 ($f_1 = f/E_1$ et $f_2 = f/E_2$). Dans ce cas nous obtenons les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\varphi_{E_1}"'] & F_1 \\
E_1/R_{E_1} \arrow[r, "\psi_{E_1}"] & f_1[E_1] \arrow[u, "i_1"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\underline{\varphi}_{E_2}"'] & F_2 \\
E_2/\underline{R}_{E_2} \arrow[r, "\underline{\psi}_{E_2}"] & f_2[E_2] \arrow[u, "i_2"']
\end{tikzcd}$$

qui donnent les décompositions canoniques de f_1 et f_2 par rapport à $\underline{R}_{E_1}$ et $\underline{R}_{E_2}$ où celles-ci sont les relations induites par $\underline{R}$ sur E_1 et E_2.

De la même manière on écrit les diagrammes commutatifs pour les décompositions canoniques de f_1 et f_2 par rapport à R_{E_1} et R_{E_2} et par rapport à R_{E_1}, $\underline{R}_{E_1}$ et R_{E_2}, $\underline{R}_{E_2}$.

Remarque 8. Pour les relations induites par $\underline{R}^0$ et $\underline{R}$ sur un ensemble $A \subset E$ il y a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & A/R^0_A \arrow[dr, "\varphi^0_A"] & & \\
A \arrow[ur, "\varphi^0_A"] \arrow[rr, "\underline{\varphi}^0_A"] \arrow[d, "i"'] & & A/\underline{R}^0_A \arrow[r, "\underline{\chi}^0_A"] & f[A] \arrow[d, "j"] \\
E \arrow[rrr, "\underline{\varphi}^0"] & & & E/\underline{R}^0
\end{tikzcd}$$

Proposition 7. *Si P est l'ensemble des nombres quadratiques de E, alors $R^0_P = \underline{R}^0_P$ et $R_P = \underline{R}_P$.*

Dans ce cas les classes d'équivalence contiennent seulement une infinité dénombrable de points de P.

Démonstration. Les nombres quadratiques se représentent en fractions continues périodiques de la forme $[\overline{a_1, a_2, \ldots, a_n}]$, où le bloc de quotients incomplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ se répète toujours dans le même ordre. En introduisant des paires de quotients incomplets égales à 1, à distances de plus en plus grandes, $L_0(x)$ et $L_1(x)$ ne changent pas, mais les nombres obtenus ne sont plus quadratiques. Si nous introduisons des quotients incomplets, en laissant la fraction continue périodique, alors $L_0(x)$ et $L_1(x)$ changent leurs valeurs. Donc $R^0_p = \underline{R}^0_p$ et $R_p = \underline{R}_p$.

La dernière affirmation est évidente par la proposition 3.

Remarque 9. On peut obtenir des relations d'équivalence plus fines que R^0 et moins fines que $\underline{R}^0$ en faisant des partitions convenables des classes d'équivalence modulo $\underline{R}^0$.

§ 4. Relations d'équivalence $R^0_{p_0, p_1}$ et $\underline{R}_{p_0, p_1}$ sur E. Definition 5. *On dit que x et y sont en relation $R^0_{p_0, p_1}$ si l'intersection des ensembles réticulés $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x)$ et $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y)$ est un ensemble réticulé, c'est-à-dire s'il existe un point z appartenant aux deux ensembles réticulés tel que $\mathcal{L}_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z)$. On dit que x et y sont en relation $\underline{R}^1_{p_0p_1}$ si l'intersection des ensembles réticulés*

$\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x)$ *et* $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}\left(\frac{1}{y}\right)$ *est un ensemble réticulé du même type.*

On dit que x et y sont en relation $R_{p_0p_1}$ si $xR^0_{p_0p_1}y$ ou $xR^1_{p_0p_1}y$.

Proposition 8. a) *La relation $R^0_{p_0p_1}$ est une relation d'équivalence.*

b) *La relation $R^0_{p_0p_1}$ est symétrique ; elle n'est pas transitive et, en général, elle n'est pas réflexive.*

c) $xR^1_{p_0p_1}y$ *et* $yR^1_{p_0p_1}z \Rightarrow xR^0_{p_0p_1}z$; $xR^1_{p_0p_1}y$ *et* $yR^0_{p_0p_1}z \Rightarrow xR^1_{p_0p_1}z$; $xR^0_{p_0p_1}y$ *et* $yR^1_{p_0p_1}z \Rightarrow xR^1_{p_0p_1}z$.

d) *La relation $R^1_{p_0p_1}$ et la relation d'équivalence $R^0_{p_0p_1}$ sont compatibles.*

e) $R_{p_0p_1} = R^0_{p_0p_1} \cup R^1_{p_0p_1}$.

f) *$R_{p_0p_1}$ est une relation d'équivalence.*

g) *Les classes d'équivalence* modulo *$R^0_{p_0p_1}$ ou $R_{p_0p_1}$ pour les nombres de E ont la puissance du continu.*

h) *$R^0_{p_0p_1}$ est plus fine que $R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1}$*, où *m_0 et m_1 sont des nombres entiers strictement positifs.*

Démonstration. a) Il est évident que $R^0_{p_0p_1}$ est réflexive et symétrique. Si $xR^0_{p_0p_1}y$ et $yR^0_{p_0p_1}z$, alors il existe u et v tels que

$\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(u)$ et $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(v)$. Mais comme $u, v \in \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y)$, il suit $uR^0_{p_0p_1}v$ et donc il existe w tel que $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(u) \cap \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(v) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(w)$.

L'intersection des ensembles réticulés ci-dessus nous conduit au fait que :
$\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(w)$ et donc $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z) \supset \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(w)$, ce qui prouve la transitivité de la relation $R^0_{p_0p_1}$.

b) Evidemment si $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z)$, alors $\mathcal{L}^1_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^1_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^1_{p_0p_1}(z)$ et donc de $\mathcal{L}^0_{p_0p_1}(x) \cap \mathcal{L}^1_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(z)$ il s'ensuit $\mathcal{L}^1_{p_0p_1}(x) \cap \cap \mathcal{L}^0_{p_0p_1}(y) = \mathcal{L}^1_{p_0p_1}(z)$, c'est-à-dire que $xR^1_{p_0p_1}y$ entraîne $yR^1_{p_0p_1}x$.

c) On prouve de la même manière la transitivité de la relation $R^0_{p_0p_1}$.

d) De c) on voit que $xR^1_{p_0p_1}y$ et $xR^0_{p_0p_1}x'$ entraîne $x'R^1_{p_0p_1}y$.

e) L'égalité est évidente par la définition 5.

f) De e) il suit que $R_{p_0p_1}$ est une relation d'équivalence.

g) Est évidente grâce à la propriété g) de la proposition 4 et du fait que dans tout ensemble réticulé associé à un point x il existe des points qui sont des images par f des nombres de E ayant une infinité de quotients incomplets aussi suffisament grands.

h) Évidemment $xR^0_{p_0p_1}y$ entraîne $xR^0_{m_0p_0,\,m_1p_1}y$, où m_0 et m_1 sont des nombres entiers strictement positifs.

Remarque 10. On peut introduire la relation d'équivalence quotient $R^0_{p_0p_1}/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1}$ par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\varphi"'] & E/R^0_{p_0p_1} \arrow[d, "\theta'"] \\
E/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1} \arrow[r, "\ker\theta"'] \arrow[ur, "\theta"] & (E/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1})/(R^0_{p_0p_1}/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1})
\end{tikzcd}$$

où ψ, φ sont les applications canoniques de E sur $E/R^0_{p_0p_1}$ et $E/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1}$ et θ est une application surjective. Alors il existe une application bijective θ' de $(E/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1})/(R^0_{p_0p_1}/R^0_{m_0p_0,\,m_1p_1})$ sur $E/R^0_{p_0p_1}$.

Remarque 11. L'intersection des relations $R^0_{p_0,\,p_1} \cap R^0_{p_0,\,p_1}$, est aussi une relation d'équivalence dans laquelle, tous les points les plus approchés de la courbe $T = \max(\sqrt{1+4t}, \sqrt{t^2+4t})$ sont équivalents.

§ 5. **Topologies sur E des relations d'équivalence introduites.** Ici nous allons faire quelques remarques sur les topologies des relations d'équivalence introduites. Pour chaque relation d'équivalence S, l'ensemble vide et toutes les réunions des classes d'équivalence modulo S forment la topologie de la relation S, notée par τ_S.

Remarque 12. On voit immédiatement que la relation de finesse entre les topologies des relations R^0, R, $\underline{R}^0$, $\underline{R}$ est donnée par le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\tau_{R^0} & < & \tau_R \\
\wedge & < & \wedge \\
\tau_{\underline{R}^0} & < & \tau_{\underline{R}}
\end{array}$$

Remarque 13. Soient la fonction f, l'ensemble E muni de la trace de la topologie usuelle sur R et $f[E]$ muni de la trace de la topologie usuelle sur F. Pour tout point x, $x = [a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, de E, dans tout voisinage de x il y a des points équivalents modulo R^0 à un nombre absolument arbitraire $[b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots]$. Donc dans tout voisinage du point x de E il y a des points dans lesquels la fonction f est discontinue dans tout point de E et elle a aussi la propriété que dans tout voisinage de tout point de E il y a des points de E où f prend toutes les valeurs de $f[E]$. Si nous maintenons sur $f[E]$ comme topologie la trace de la topologie usuelle sur F, alors la topologie induite sur E par la topologie initiale sur E pour f a comme éléments des ensembles saturés pour les applications canoniques ou réunions de classes d'équivalence modulo R^0. L'application f est continue par rapport à cette topologie sur E et à la trace de la topologie usuelle sur $f[E]$.

Remarque 14. Considérons les relations d'équivalence $R^0_{p_0p_1}$ pour tous les nombres entiers strictement positifs. Les topologies de ces relations

d'équivalence donnent une infinité de topologies sur l'ensemble E des nombres irrationnels réels. Leur réunion et R^0_{11} et $\bigcap_{p_1 p_0} \tau_{R^0_{p_0 p_1}}$ est ausssi une topologie sur E.

BIBLIOGRAPHIE

1. Perron. O. — *Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale*, Sitzungsberichte d. Heidelberg. Akad. Wiss., 1921, Abh. 4 (1921), p. 55—70.
2. Negoescu N. — *Aproximarea asimetrică a numerelor iraționale prin raționale. Interpretarea geometrică*. An. şt. Univ. Iaşi, t. I (1955), p. 21—30.
3. Sudan G. — *Geometrizarea fracțiilor continue*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1959, p. 39—45.

RELAȚII DE ECHIVALENȚĂ ŞI TOPOLOGII ASOCIATE CELOR MAI BUNE APROXIMĂRI ASIMETRICE

Rezumat

Folosind metoda lui O. Perron [1] s-a pus în evidență o funcție f definită prin formula (5). În primul rînd aici se demonstrează unele proprietăți ale funcției f, definite pe mulțimea E a numerelor iraționale, necesare pentru a introduce unele relații de echivalență pe E.

Pentru relațiile de echivalență cunoscute (R^0 şi R) pentru numere iraționale se dau opt proprietăți în propoziția 3. Observația 4 sugerează introducerea relațiilor de echivalență $\underline{R}^0$ şi $\underline{R}$ pentru care se extind cele opt proprietăți. Se pun aici în evidență deosebirile dintre cele două tipuri de relații de echivalență.

În § 3 se dau diagrame pentru relațiile introduse şi descompunerile canonice ale funcției f. Cu ajutorul laticelor de puncte, $\mathcal{L}^0_{p_0 p_1}(x)$ şi $\mathcal{L}^1_{p_0 p_1}(x)$, studiate în § 1, se introduc relațiile de echivalență $R^0_{p_0 p_1}$, $R_{p_0 p_1}$. Lucrarea se termină cu cîteva observații privitoare la topologiile pe E asociate relațiilor de echivalență R^0, R, $\underline{R}^0$, $\underline{R}$ şi $R^0_{p_0 p_1}$, $R_{p_0 p_1}$.

SUR UNE CONNEXION LINÉAIRE CANONIQUE DÉFINIE DANS UNE VARIÉTÉ DOUÉE D'UNE f-STRUCTURE

PAR

LUIS A. CORDERO

Sur une variété différentiable, douée d'une f-structure, on définit une connexion linéaire qui caractérise son intégrabilité, et on étudie le cas particulier où la variété est hor-chresmannienne, en rapportant cette connexion à la connexion canonique introduite par Vaisman, [5].

1. Soit V une variété différentiable, C^∞, dim $V = 2n + m$, douée d'une f-structure, c'est-à-dire, douée d'un champ f d'endomorphismes des espaces tangents (tenseur du type (1, 1)), tel que $f^3 + f = 0$.

Alors $Q = -f^2$, $P = 1 + f^2$ sont les projecteurs d'une structure presque-produit H sur V, donnée par $H = P - Q$; le fibré tangent a la décomposition $TV = \operatorname{Im} Q \oplus \operatorname{Im} P = D \oplus D^1$, les fibrés de D et D^1 étant de dimensions $2n$ et m. On déduit $Qf = fQ = f$, $fP = Pf = 0$, d'où $\operatorname{Im} f \subseteq \subseteq \operatorname{Im} Q$ et si nous considérons $\psi = f|_D$, alors $\psi^2 = -I$, ce qui montre que ψ donne une structure complexe sur D et $\operatorname{Im} f = D$.

Nous noterons par $N(N_H)$ le tenseur de Nijenhuis de $f(H)$. Le tenseur N donne l'intégrabilité de f, D, D^1 et $f|_D$ dans la forme suivante : X, Y étant des champs de vecteurs arbitraires sur V.

1) D^1 est intégrable si et seulement si $N(PX, PY) = 0$,

2) D est intégrable si et seulement si $PN(fX, fY) = 0$.

Lorsque D est intégrable, $f|_D$ est une structure presque-complexe ; quand D et $f|_D$ sont simultanément intégrables, on dit que f est partiellement intégrable (3). Alors :

3) f est partiellement intégrable si et seulement si $N(fX, fY) = 0$,

4) f est intégrable si et seulement si $N(X, Y) = 0$.

Soit g une métrique riemannienne sur V, adaptée à la structure presque-produit, c'est-à-dire :

$$g(PX, QY) = 0$$

et soit ∇ la connexion de Levi-Civita de g. Nous définissons une nouvelle connexion $\tilde{\nabla}$ sur V par :