Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" — Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

# ASUPRA ALGEBREI LIE A CÎMPURILOR DE VECTORI ALE UNUI LOOP LIE

DE

I. BURDUJAN

În lucrarea [2] se caracterizează local loopurile Lie cu ajutorul unor 1-forme liniar independente şi al operatorilor de structură. Metoda folosită este aceeaşi cu metoda folosită de Kähler şi Laptev pentru studiul grupurilor Lie locale. Pe această cale nu s-au putut obţine pînă acum prea multe rezultate, lipsa asociativităţii făcîndu-se puternic resimţită.

În prezenta lucrare se regăsesc şi se completează rezultatele obţinute în [2], folosindu-se metoda lui Lie. Urmărindu-se tot timpul paralelismul cu teoria grupurilor, se ajunge să se asocieze unui loop Lie oarecare o anumită algebră Lie, subalgebră a algebrei Lie a tuturor cîmpurilor de vectori definite pe varietatea loopului. În general această algebră nu mai este finit dimensională, iar în cazul cînd loopul este grup, este tocmai algebra Lie a cîmpurilor de vectori stîng invariante ale grupului. Se demonstrează mai întîi că această corespondenţă este biunivocă, iar apoi se obţin caracterizări locale pentru homomorfismele şi isomorfismele locale ale loopurilor, pentru subloopuri şi pentru divizorii normali. Cu ajutorul acestora se obţine apoi o caracterizare a loopurilor integrabile.

§1. Reamintim mai întîi că numim loop ansamblul $(Q; \cdot, /, \backslash)$ unde $Q$ este o mulţime oarecare iar „$\cdot$", „$/$" şi „$\backslash$" sînt operaţii binare pe $Q$ care satisfac condiţiile:

a) $(x/y) \cdot y = x$, b) $x \cdot (x \backslash y) = y$.

c) $(x \cdot y)/y = x$, d) $x \backslash (x \cdot y) = y$.

e) există $e \in Q$ astfel încît $e \cdot x = x \cdot e = x$.

**Definiţia 1.** *Varietatea diferenţiabilă r-dimensională $Q$, de clasă $C^\infty$, se numeşte loop Lie dacă:*

f) *$Q$ este loop*

g) *aplicațiile care dau structura de loop*

$$\cdot\,,\,/\,,\,\backslash\,:\,Q\times Q\to Q$$

*sînt diferențiabile de clasă $C^\infty$.*

Cînd va fi nevoie să precizăm dimensiunea vom scrie $Q_r$ în loc de $Q$.

Orice element $a\in Q$ definește două difeomorfisme $L_a$ și $R_a$ ale lui $Q$ — numite respectiv translația stîngă prin $a$ și translația dreaptă prin $a$ — prin:

$$L_a : x\to a\,.\,x \qquad R_a : x\to x\,.\,a,$$

Se știe că orice difeomorfism $f$ al varietății $Q$ induce un automorfism $f'$ al algebrei Lie $L(Q)$ a tuturor cîmpurilor de vectori definite pe varietatea $Q$. Vom nota cu $G'(Q)$ grupul de automorfisme ale lui $L(Q)$ generat de familia $\{L'_a\}_{a\in Q}$.

§2. Fie $Q$ un loop Lie și $\xi\in T_e(Q)$. Definim cîmpul de vectori $X$ în felul următor:

$$X(u) = L'_u\,\xi, \qquad \forall u\in Q. \tag{1}$$

Orice cîmp definit în acest mod îl vom numi *l-cîmp vectorial*. $l$-cîmpurile vectoriale sînt de clasă $C^\infty$.

Luînd un reper $R_0$ în $T_e(Q)$, de vectori $\xi_\alpha$ $(\alpha = 1, 2,\dots, r)$ și folosind formula (1), se pot construi, pe $Q$, $r$ cîmpuri vectoriale $X_\alpha$ $(\alpha = 1, 2,\dots, r)$, de clasă $C^\infty$, liniar independente. Prin urmare varietatea unui loop este paralelizabilă. $Q_r$ fiind paralelizabilă $L(Q)$ este un $F(Q)$-modul finit dimensional, pentru care $l$-cîmpurile $X_\alpha$ $(\alpha = 1,\dots, r)$ formează o bază ($F(Q)$ este inelul funcțiilor reale, de clasă $C^\infty$, definite pe $Q$). De aceea vom spune că $l$-cîmpurile $X_\alpha$ $(\alpha = 1,\dots, r)$ sînt $l$-cîmpuri bază. Rezultă imediat că:

$$[X_\alpha, X_\beta](u) = -C^\gamma_{\alpha\beta}(u)\,X_\gamma(u), \quad \forall u\in Q. \tag{2}$$

$C^\gamma_{\alpha\beta}(u)$ sînt componentele unui cîmp tensorial și le vom numi *funcțiile de structură ale loopului.*

În plus, cîmpurile $L'_a X_\alpha$ vor fi legate de cîmpurile $X_\alpha$ prin relații de forma:

$$(L'_a X_\alpha)(a\,.\,u) = A^\beta_\alpha(a\,.\,u, u)\,X_\beta(a\,.\,u), \quad \forall a, u\in Q, \tag{3}$$

cu condiția:

$$A^\beta_\alpha(u, u) = \delta^\beta_\alpha. \tag{4}$$

$L'_a$ fiind un automorfism al lui $L(Q)$, cîmpurile $L'_a X_\alpha$ vor fi tot liniar independente, deci $A^\beta_\alpha(\overline{u}, u)$ sînt operatori liniari nedegenerați. *$A^\beta_\alpha(\overline{u}, u)$ se vor numi operatori de structură ai loopului.*

Pentru a nu complica scrierea, vom face convenția ca indicii $\alpha, \beta,\dots$ (literele grecești) să ia totdeauna valorile $1, 2, \dots, r$.



§3. Fie acum $(h, U)$ o hartă locală astfel încît $h^\alpha(e) = 0$. Presupunem că în această hartă, expresiile locale ale celor trei funcții ce dau structura de loop: „·", „/" și „\" sînt respectiv

$$w^\alpha = \varphi^\alpha(u^1,\dots,u^r; v^1,\dots,v^r),\ u^\alpha = \varkappa^\alpha(w^1,\dots, w^r; v^1,\dots,v^r),\ v^\alpha = \psi^\alpha(u^1,\dots,u^r; w^1,\dots,w^r).$$

Peste tot unde vom avea funcții $f^\alpha(u^1,\dots, u^r; v^1,\dots, v^r)$ vom scrie $f^\alpha(u, v)$. Vom face și următoarele notații:

$$a^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\varphi^\alpha(u, v)}{\partial u^\beta}, \quad b^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\varphi^\alpha(u, v)}{\partial v^\beta}, \quad {}_\varkappa a^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\varkappa^\alpha(u, v)}{\partial u^\beta},$$

$${}_\varkappa b^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\varkappa^\alpha(u, v)}{\partial v^\beta}, \quad {}_\psi a^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\psi^\alpha(u, v)}{\partial u^\beta}, \quad {}_\psi b^\alpha_\beta(u, v) = \frac{\partial\psi^\alpha(u, v)}{\partial v^\beta}.$$

Folosind definițiile și relațiile dintre funcțiile $\varphi^\alpha$, $\varkappa^\alpha$ și $\psi^\alpha$ se găsește ușor:

$$C^\alpha_{\beta\gamma}(u) = \overline{b}^\alpha_\lambda(u, 0)\left[\frac{\partial b^\lambda_\beta(u, 0)}{\partial u^\mu}\,b^\mu_\gamma(u, 0) - \frac{\partial b^\lambda_\gamma(u, 0)}{\partial u^\mu}\,b^\mu_\beta(u, 0)\right]. \tag{5}$$

$$A^\beta_\alpha(\overline{u}, u) = -\,{}_\varkappa a^\gamma_\mu(\overline{u}, u)\,{}_\varkappa b^\mu_\lambda(\overline{u}, u)\,b^\lambda_\alpha(u, 0)\,\overline{b}^\beta_\gamma(\overline{u}, 0), \tag{6}$$

unde cu ${}_\varkappa a^\beta_\alpha$ și $\overline{b}^\beta_\alpha$ am notat inversele matricilor ${}_\varkappa a^\beta_\alpha$ și respectiv $b^\beta_\alpha$. Vom folosi această notație și în cele ce urmează.

§4. Folosind $l$-cîmpurile $X_\alpha$ introduse mai sus se poate construi o subalgebră $L'(Q)$ a algebrei $L(Q)$ în felul următor: $L'(Q)$ va fi cea mai mică subalgebră Lie a algebrei $L(Q)$ care conține $l$-cîmpurile $X_\alpha$ și este invariantă la acțiunea grupului $G'(Q)$.

Se verifică ușor că repetînd construcția de mai sus, pornind însă de la un alt reper $R_1$ al lui $T_e(Q)$, vom ajunge la aceeași algebră Lie.

Să vedem acum ce proprietăți are algebra $L'(Q)$.

Mai întîi, folosind proprietățile aplicației liniare tangente a unui difeomorfism, se obțin următoarele rezultate:

$$[L'_a(L'_b X_\alpha)](a\,.\,bu) = A^\beta_\alpha(b\,.\,u, u)\,A^\gamma_\beta(a\,.\,bu, b\,.\,u)\,X_\gamma(a\,.\,bu),$$

$$[(L'^{-1}_a)'\,X_\alpha](a\backslash u) = \overline{A}^\beta_\alpha(u, a\backslash u)\,X_\beta(a\backslash u),$$

unde prin $\overline{A}^\beta_\alpha$ am notat inversul operatorului $A^\beta_\alpha$.

Fie acum $X\in L(Q)$, oarecare. Vom avea:

$$X(u) = \xi^\alpha(u)\,X_\alpha(u).$$

Dar atunci:

$$(L'_a X)(a \cdot u) = \xi^\alpha(u) A^\beta_\alpha(a \cdot u, u) X_\beta(a \cdot u).$$

Prin urmare, cunoscînd cîmpurile $X_\alpha$ și operatorii $A^\beta_\alpha$ vom cunoaște acțiunea grupului $G^l(Q)$ asupra algebrei $L(Q)$.

Ținîndu-se cont de definiția algebrei $L^l(Q)$ se găsește ușor:

**Proprietatea 1**: *Algebra Lie $L^l(Q)$ este perfect determinată de cîmpurile $X_\alpha(u)$ și de operatorii $A^\beta_\alpha(\bar{u}, u)$.*

Faptul că $L^l(Q)$ este o algebră Lie invariantă la acțiunea grupului $G^l(Q)$, implică existența unor relații între funcțiile de structură și operatorii de structură. Aceste relații se obțin ținînd cont de (2), (3) și de faptul că translațiile $L_a$ sînt difeomorfisme. Într-adevăr, relația:

$$[L'_a X_\alpha, L'_a X_\beta](a, u) = L'_a([X_\alpha, X_\beta](u))$$

revine la:

$$-A^\lambda_\alpha(a \cdot u, u) A^\mu_\beta(a \cdot u, u) C^\gamma_{\lambda\mu}(a \cdot u) + A^\lambda_\alpha(a \cdot u, u)(X_\lambda(a, u) A^\gamma_\beta(a \cdot u, u)) -$$
$$- A^\lambda_\beta(a \cdot u, u)(X_\lambda(a \cdot u) A^\gamma_\alpha(a \cdot u, u)) = - C^\lambda_{\alpha\beta}(u) A^\gamma_\lambda(a \cdot u, u).$$

Explicitînd acțiunea lui $X_\alpha$, ținînd cont din nou de relația (3) și de faptul că dacă $a$ și $u$ parcurg în mod independent varietatea $Q$ atunci și $au$ și $u$ au aceeași proprietate, găsim:

$$(7) \quad \begin{aligned} &- A^\lambda_\alpha(\bar{u}, u) A^\mu_\beta(\bar{u}, u) C^\gamma_{\lambda\mu}(\bar{u}) + A^\lambda_\alpha(\bar{u}, u)(X_\lambda(\bar{u}) A^\gamma_\beta(\bar{u}, u)) - \\ &- A^\lambda_\beta(\bar{u}, u)(X_\lambda(\bar{u}) A^\gamma_\alpha(\bar{u}, u)) + X_\alpha(u) A^\gamma_\beta(\bar{u}, u) - X_\beta(u) A^\gamma_\alpha(\bar{u}, u) = \\ &- C^\lambda_{\alpha\beta}(u) A^\gamma_\lambda(\bar{u}, u). \end{aligned}$$

**Proprietatea 2.** *Relația (7) este o condiție necesară și suficientă pentru ca sistemul*

$$(8) \qquad (\bar{u}' X_\alpha)(\bar{u}) = A^\beta_\alpha(\bar{u}, u) X_\beta(\bar{u})$$

*să fie complet integrabil.*

În plus, identitățile lui Jacobi scrise pentru cîmpurile $X_\alpha$ ne dau:

$$(9) \qquad X_{[\alpha} C^\lambda_{\beta\gamma]} + C^\lambda_{\mu[\alpha} C^\mu_{\beta\gamma]} = 0.$$

Să vedem cum se comportă funcțiile de structură și operatorii de structură la o schimbare a $l$-cîmpurilor bază. Presupunem deci că schimbăm $l$-cîmpurile bază $X_\alpha$ cu $l$-cîmpurile $X'_\alpha$. Atunci, în $T_e(Q)$, vom avea:

$$X'_\alpha(e) = D^\beta_\alpha X_\beta(e).$$



Aplicînd definiția $l$-cîmpurilor găsim:

$$X'_\alpha(u) = L'_u X'_\alpha(e) = L'_u(D^\beta_\alpha X_\beta(e)) = D^\beta_\alpha X_\beta(u).$$

Am dovedit astfel:

**Proprietatea 3:** *La o schimbare a $l$-cîmpurilor bază, funcțiile de structură și operatorii de structură se schimbă după formulele:*

$$C'^\gamma_{\alpha\beta}(u) = D^\lambda_\alpha D^\mu_\beta C^\nu_{\lambda\mu}(u) \bar{D}^\gamma_\nu$$
$$A'^\beta_\alpha(\bar{u}, u) = D^\lambda_\alpha A^\mu_\lambda(\bar{u}, u) \bar{D}^\beta_\mu.$$

§5. Am asociat în paragraful precedent loopului Lie $Q$ algebra Lie $L^l(Q)$. Ne interesează acum problema inversă: dată algebra $L^l(Q)$ cu proprietățile semnalate în paragraful precedent, putem oare organiza varietatea $Q$ ca loop Lie căruia să-i corespundă prin procedeul de mai sus chiar algebra $L^l(Q)$?

Răspunsul este dat de

**Teorema fundamentală 1**: *O condiție necesară și suficientă pentru ca cîmpurile $X_\alpha(u)$ și operatorii $A^\alpha_\beta(\bar{u}, u)$ să fie respectiv $l$-cîmpuri bază și operatori de structură ai unui loop Lie, local de ordinul $r$, este ca sistemul (S) să fie complet integrabil, adică cîmpurile $X_\alpha(u)$ și operatorii $A^\alpha_\beta(\bar{u}, u)$ să fie legați prin relația (7).*

Demonstrația acestei teoreme se face la fel ca demonstrația teoremei 2.6.1 din [3].

Am dat astfel un răspuns la problema găsirii unei corespondențe de tipul:

loop Lie $\longleftrightarrow$ structură algebrică

și anume avem corespondența:

$$Q \longleftrightarrow L^l(Q).$$

**Corolar**: *Varietatea paralelizabilă $Q$ poate fi organizată local ca loop Lie dacă și numai dacă sistemul diferențial obținut din relația (7) înlocuind $X_\alpha$ cu cîmpurile care dau paralelismul și $C^\gamma_{\alpha\beta}$ cu tensorul de torsiune corespunzător, admite o soluție $A^\beta_\alpha(\bar{u}, u)$ care satisface condiția (4).*

§6. Fie $L^l(Q)$ algebra Lie asociată loopului $Q$ și $H$ o subalgebră a sa. Oricare ar fi cîmpul $X \in H$ vom considera $X(u_0)$, componenta cîmpului $X$ din spațiul $T_{u_0}(Q)$. Făcînd acest lucru pentru toate cîmpurile lui $H$ obținem subspațiul $H(u_0) \subseteq T_{u_0}(Q)$. În general pentru $u_0 \neq u_1$ $\dim H(u_0) \neq \dim H(u_1)$. Dăm acum:

**Definiția 2:** *Subalgebrele $H$ pentru care* $\dim H(u)$ *este constantă le vom numi subalgebre regulate.*

Din definiția 2 rezultă că distribuția $\Delta_H(u)$ asociată algebrei regulate $H$ este involutivă. În plus, dacă subalgebra $H$ este invariantă la acțiunea

grupului $G'(Q)$ atunci ca este o subalgebră regulată și $\Delta_H(Q)$ va fi o distribuție stîng invariantă. Reciproca evident nu-i adevărată deoarece în general unei distribuții involutive nu-i putem asocia o algebră Lie a lui $L'(Q)$.

§7. Fie $h: Q_r \to Q'_n$ un epimorfism regulat de clasă $C^\infty$ al loopului $Q_r$ pe loopul $Q'_n$. $h'(0)$ va fi și el un epimorfism al lui $T_r(Q)$ cu $T_r(Q')$ unde $e$ și $e'$ sînt unitățile celor două loopuri. Alegem un reper $\xi_i$, $\xi_a$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $a = n+1, \ldots, r$) în $T_r(Q)$ astfel încît $\xi_a \in \ker h'(0)$. Convenim să notăm în acest paragraf, cu $a, b, \ldots$ (literele de la începutul alfabetului) indicii ce iau valorile $n+1, \ldots, r$ și cu $i, j, \ldots$ pe cei ce iau valorile $1, 2, \ldots, n$. Să notăm cu $X_a$ și respectiv $X_i$ $l$-cîmpurile asociate vectorilor $\xi_a$ și $\xi_i$. Cum $h$ comută cu translațiile se găsește ușor că:

$$h' X_a = 0, \tag{10}$$

$$h'(X_i(u)) = X'_i(h(u)), \tag{11}$$

unde cu $X'_i$ am notat $l$-cîmpurile definite pe $Q'$ asociate vectorilor $h'(o)\,\xi_i$.

Rezultă atunci că:

$$C^i_{jk}(u) = C'^i_{jk}(h(u)), \tag{12}$$

$$A^i_j(a \,.\, u, u) = A'^i_j(h(a) \,.\, h(u), h(u)), \tag{13}$$

unde $C^i_{jk}$ și $A^i_j$ sînt o parte dintre funcțiile de structură și dintre componentele operatorilor de structură ai loopului $Q$ iar $C'^i_{jk}$ și $A'^i_j$ sînt funcțiile de structură și respectiv operatorii de structură ai loopului $Q'$.

Presupunem acum că surjecția $h: Q_r \to Q'_n$ satisface condițiile (10), (11), (13) și $h(e) = e'$. Atunci, aplicînd $\widetilde{L}'_{h(a)}$ — aplicația liniară tangentă a translației stîngi prin $h(a)$ a loopului $Q'_n$ — relației (11), găsim:

$$(\widetilde{L}'_{h(a)} \circ h')(X_i(u)) = A'^j_i(\widetilde{L}_{h(a)}(h(u)), h(u))\, X'_j(\widetilde{L}_{h(a)}(h(u))) =$$
$$= A^j_i(a \,.\, u, u)\, X'_j((\widetilde{L}_{h(a)} \circ h)(u)),$$

adică $L_{h(a)} \circ h$ este soluția sistemului

$$\overline{u}'(X_i(u)) = A^j_i(a \,.\, u, u)\, X'_j(\overline{u}) \tag{14}$$

ce satisface condiția inițială $(\widetilde{L}_{h(a)} \circ h)(e) = h(a)$.

Aplicînd acum $h'$ relației (3) găsim:

$$(h' \circ L'_a)(X_i(u)) = h'(A^j_i(a \,.\, u, u)\, X_j(a \,.\, u) + A^b_i(a \,.\, u, u)\, X_b(a \,.\, u)) =$$
$$= A^j_i(a \,.\, u, u)\, h'(X_j(a \,.\, u)) = A^j_i(a \,.\, u, u)\, X'_j((h \circ L_a)(u)).$$

Deci și funcția $h \circ L_a$ este soluție a sistemului (14) ce satisface condiția inițială $(h \circ L_a)(e) = h(a)$. Prin urmare

$$h \circ L_a = \widetilde{L}_{h(a)} \circ h;$$

deci am dovedit rezultatele:



**Teorema 2.** *Aplicația surjectivă $h: Q_r \to Q'_r$ este un homomorfism local de loopuri Lie dacă și numai dacă între $l$-cîmpurile bază și operatorii de structură ai celor două loopuri au loc relațiile* (10), (11), (13) *și în plus $h(e) = e'$.*

**Teorema 2'.** *Aplicația diferențiabilă $h: Q_r \to Q'_r$ care duce $e$ în $e'$, este un izomorfism local al celor două loopuri Lie, dacă și numai dacă între $l$-cîmpurile de bază și operatorii de structură ai celor două loopuri au loc relațiile:*

$$h'(X_\alpha(u)) = X'_\alpha(h(u)) \tag{11'}$$

$$A^\beta_\alpha(a \,.\, u, u) = A'^\beta_\alpha(h(a) \,.\, h(u), h(u)). \tag{13'}$$

Vom dovedi acum:

**Teorema 3.** *Surjecția $h: Q_r \to Q'_n$ care duce $e$ în $e'$ este un homomorfism local al loopurilor Lie $Q$ și $Q'$ dacă și numai dacă au loc relațiile:*

$$h'(X_a) = 0, \quad h'(X_i(u)) = X'_i(h(u))$$
$$A^j_i(\overline{u}, u) = A'^j_i(h(\overline{u}), h(u)).$$

Necesitatea se dovedește la fel ca necesitatea din teorema 2. Pentru a dovedi că aceste condiții sînt suficiente observăm că atît $\widetilde{L}_{h(a)} \circ h$ cît și $h \circ L_a$ sînt soluții ale sistemului

$$\overline{u}'(X_i(u)) = A'^j_i(\overline{u}, h(u))\, X_j(\overline{u})$$

și că în plus

$$(\widetilde{L}_{h(a)} \circ h)(e) = (h \circ L_a)(e) = h(a).$$

**Teorema 3'.** *Aplicația diferențiabilă $h: Q_r \to Q'_r$ care duce $e$ în $e'$ este un izomorfism local al loopurilor Lie $Q$ și $Q'$ atunci și numai atunci cînd între $l$-cîmpurile bază și operatorii de structură ale celor două loopuri au loc relațiile:*

$$h'(X_\alpha(u)) = X'_\alpha(h(u)), \quad A^\beta_\alpha(\overline{u}, u) = A'^\beta_\alpha(h(\overline{u}), h(u)).$$

§8. Fie $H_{r-n}$ un subloop Lie al loopului Lie $Q_r$. El va avea $r-n$ $l$-cîmpuri bază $X_a$ care pot fi prelungite la $l$-cîmpuri ale lui $Q$. Cîmpurile obținute în acest mod le vom nota tot cu $X_a$. Alegem apoi alte $l$-cîmpuri $X_i$ astfel încît ansamblul $X_i$, $X_a$ să fie format din $r$ $l$-cîmpuri liniar independente pe $Q$.

Cîmpurile $X_a$ determină pe $H$ o distribuție involutivă, invariantă la translațiile la stînga prin elementele lui $H$. Prin urmare, pe $H$ vom avea:

$$[X_a, X_b](h) = -C^d_{ab}(h)\, X_d(h), \quad (L'_g X_a)(g \,.\, h) = A^b_a(g \,.\, h, h)\, X_b(g \,.\, h), \ \forall g, h \in H.$$

Avem deci:

$$C^i_{ab}(h) = 0, \quad A^i_a(g \,.\, h, h) = 0, \quad \forall g, h \in H. \tag{15}$$

Reciproc, presupunem că pe varietatea $H_{r-n}$ ce trece prin $e$ sînt satisfăcute condițiile (15). Ele ne spun că distribuția definită pe $H$ de restricțiile cîmpurilor $X_a$ este involutivă pe $H$ și invariantă la translațiile stîngi

prin elementele lui $H$. Deci odată cu $H$ și $aH$ va fi soluție a acestei distribuții, oricare ar fi $a \in H$. Cum $a \in H \cap aH$ rezultă că $H = aH$, oricare ar fi $a \in H$, adică $H$ este închisă la operația de loop. Cum $e \in H$, rezultă că $H$ e un grupoid Lie cu unitate, deci este un subloop Lie local al lui $Q$. Am obținut astfel:

**Teorema 4**: *Condiția necesară și suficientă ca subvarietatea $H_{r-n}$ ce trece prin $e$ să fie subloop Lie (local) al loopului $Q$, este ca să aibă loc relația* (15).

Vom dovedi acum:

**Teorema 5**. *Condiția necesară și suficientă ca varietatea $H$ cu $r-n$ dimensiuni $H$ ce trece prin $e$ să fie subloop Lie (local) al loopului $Q$ este ca*

$$C^i_{ab}(h) = 0, \quad A^i_a(g, h) = 0, \quad \forall g, h \in H. \tag{16}$$

Necesitatea se dovedește la fel ca necesitatea teoremei 4. Pentru a dovedi suficiența, vom încerca să aplicăm teorema 1. De aceea, dacă în (7) considerăm că $\bar{u}, u \in H$ și trecem $\alpha$ în $a$, $\beta$ în $b$, $\gamma$ în $d$, găsim că pe $H$ are loc relația:

$$-A^e_a(\bar{u}, u) A^f_b(\bar{u}, u) C^d_{ef}(\bar{u}) + A^e_a(\bar{u}, u)(X_e(\bar{u}) A^d_b(\bar{u}, u)) - A^e_b(\bar{u}, u)$$
$$(X_e(\bar{u}) A^d_a(\bar{u}, u)) + X_a(u) A^d_b(\bar{u}, u) - X_b(u) A^d_a(\bar{u}, u) = -C^c_{ab}(u) A^d_c(\bar{u}, u)$$

unde, conform convenției făcute anterior, toți indicii iau valori de la $n+1$ la $r$. Conform teoremei 1, $H$ poate fi organizat ca loop Lie local avînd $C^d_{ab}(u)$ ($u \in H$) ca funcții de structură, $X_a$ ca $l$-cîmpuri bază și $A^b_a(\bar{u}, u)$ ($\bar{u}, u \in H$) ca operatori de structură. Dar și în condițiile teoremei 4, $H$ poate fi organizată ca subloop al lui $Q$ avînd aceleași $l$-cîmpuri bază $X_a$ și aceiași operatori de structură $A^b_a(\bar{u}, u)$, ($\bar{u}, u \in H$). Conform teoremei 3' restricția la $H$ a aplicației $id_Q$ este un izomorfism local, deci cele două structuri de loop ale lui $H$ coincid.

§9. În cazul cînd $C^i_{ab}(u) = 0$ și $A^i_a(\bar{u}, u) = 0$ oricare ar fi $\bar{u}, u \in Q$, distribuția determinată pe $Q$ de cîmpurile $X_a$ va fi involutivă și stîng invariantă. Atunci înseamnă că dacă $H$ este varietatea integrală ce conține pe $e$, atunci $xH$ va fi tot o varietate integrală a acestei distribuții, oricare ar fi $x \in Q$. Rezultă atunci că orice două varietăți $xH$ și $yH$ sînt sau disjuncte, sau coincid. În plus cum $a \,.\, bH$ și $ab \,.\, H$ sînt varietăți integrale ale distribuției și $ab \in a \,.\, bH \cap ab \,.\, H$ rezultă că cele două varietăți coincid.

Prin urmare, condițiile impuse sînt suficiente pentru ca clasele $xH$ asociate loopului $H$ să ne conducă la o partiție a loopului $Q$ invariantă la grupul de difeomorfisme generat de translațiile stîngi ale lui $Q$. Reciproc, presupunem că pentru subloopul $H$ clasele $xH$ dau o partiție a lui $Q$ invariantă la grupul de difeomorfisme generat de translațiile stîngi ale lui $Q$. Considerăm distribuția determinată de cîmpurile $X_a$, prelungirile la $Q$ ale unor $l$-cîmpuri bază ale lui $H$. Cum $xH = L_x(H)$ rezultă că spațiul tangent în $x$ la $xH$ este imaginea prin $L'_x$ a spațiului tangent în $e$ la $H$ și deci, dacă el aparține distribuției determinate de $l$-cîmpurile $X_a$. Dacă $z \in xH$, rezultă că $zH = xH$ și prin același raționament ca mai sus găsim că spațiul



tangent în $z \in xH$ la varietatea $xH$ aparține distribuției determinate de $l$-cîmpurile $X_a$. Cum $z$ era arbitrar în $xH$, rezultă că $xH$ este o varietate integrală a distribuției determinate de $l$-cîmpurile $X_a$. Dar $x$ este arbitrar în $Q$ și deci prin orice punct al lui $Q$ trece o varietate integrală de dimensiune maximă a distribuției de mai sus. Deci distribuția determinată de $l$-cîmpurile $X_a$ este involutivă. Aceasta implică anularea funcțiilor $C^i_{ab}(u)$ ($\forall u \in Q$). Dar invarianța partiției la translațiile stîngi conduce la faptul că distribuția este și stîng invariantă, adică $A^i_a(\bar{u}, u) = 0$ ($\forall \bar{u}, u \in Q$). Am dovedit astfel:

**Teorema 6**. *Fie $H_{r-n}$ un subloop Lie al loopului Lie $Q_r$. Subvarietățile $xH$ conduc la o partiție a lui $Q$ invariantă la translațiile stîngi (ale lui $Q$) atunci și numai atunci cînd:*

$$C^i_{ab}(u) = 0, \quad A^i_a(\bar{u}, u) = 0, \quad \forall \bar{u}, u \in Q. \tag{17}$$

Totodată am dovedit și

**Teorema 6'**: *Fie $H_{r-n}$ un subloop Lie al loopului Lie $Q_r$. Subvarietățile $xH$ conduc la o partiție a lui $Q$ atunci și numai atunci cînd*

$$C^i_{ab}(u) = 0 \qquad \forall u \in Q. \tag{17'}$$

§10. Ne vom ocupa acum de subloopurile normale ale unui loop Lie $Q$.

**Definiția 3**. *Spunem că subloopul $H$ al loopului $Q$ este divizor normal dacă și numai dacă el este nucleu al unui homomorfism.*

Să găsim mai întîi condițiile necesare ca un subloop Lie $H$ al loopului Lie $Q$ să fie divizor normal. Presupunem deci că $H$ este nucleul homomorfismului $h: Q_r \to Q'_s$ (de clasă $C^\infty$). Vom alege cîmpurile fundamentale $X_\alpha$ ale lui $Q_r$ așa fel încît să avem

$$h' X = 0 \qquad (a = n+1, \ldots, r)$$
$$h'(X_i(u)) = X'_i(h(u)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n = \dim h(Q) \leqslant s).$$

Se știe că $\ker h'$ este un ideal al algebrei Lie $L^l(Q)$ invariant la acțiunea grupului $G^l$. Lui îi va corespunde o distribuție involutivă stîng invariantă, cu $r-n$ dimensiuni, pentru care cîmpurile $X_a$ sînt cîmpuri de bază. Cum ea corespunde unui ideal vom avea:

$$[X_a, X_b](u) = -C^d_{ab}(u) X_d(u)$$
$$[X_i, X_a](u) = -C^b_{ia}(u) X_b(u)$$
$$(L'_v X_a)(v \,.\, u) = A^b_a(v \,.\, u, u) X_b(v \,.\, u), \quad \forall v, u \in Q.$$

Deci pentru un divizor normal vom avea îndeplinite condițiile:

$$C^i_{a\alpha}(u) = 0, \quad A^i_a(\bar{u}, u) = 0, \quad \forall \bar{u}, u \in Q. \tag{18}$$

Să dovedim acum că aceste condiții sînt și suficiente pentru ca $H$ să fie divizor normal al lui $Q$. Presupunem deci că au loc relațiile (18). $h$ fiind homomorfism, vom avea:

$$C^i_{jk}(u) = C'^i_{jk}(h(u))$$
$$A^i_j(au, u) = A'^i_j(h(a) \,.\, h(u), h(u)),$$

unde $C'^i_{jk}$ și $A'^i_j$ sînt componente ale funcțiilor de structură și respectiv ale operatorilor de structură ai loopului $Q'_n$. De aici rezultă că $C^i_{jk}$ și $A^i_j$ sînt constante pe clasele $xH$, oricare ar fi $x \in Q$.

Dacă în relația (9) trecem $\alpha$ în $a$, $\beta$ în $i$, $\gamma$ în $j$ și $\lambda$ în $k$, vom găsi:

$$X_a C^i_{jk} = 0, \tag{19}$$

ceea ce este de fapt o nouă verificare a faptului că $C^i_{jk}$ sînt constante pe clasele $aH$.

Cum $X_a$ dau distribuția tangentă subvarietăților $xH$ și cum $A^i_j$ sînt constante pe aceste subvarietăți, rezultă că:

$$X_a(\bar{u}) A^i_j(\bar{u}, u) = 0, \quad X_a(u) A^i_j(\bar{u}, u) = 0. \tag{20}$$

Dacă acum, în (7) trecem $\alpha$ în $i$, $\beta$ în $j$ și $\gamma$ în $k$ găsim

$$\begin{aligned} &- A^m_i(\bar{u}, u) A^r_j(\bar{u}, u) C^k_{mn}(\bar{u}) + A^m_i(\bar{u}, u)(X_m(\bar{u}) A^k_j(\bar{u}, u)) - \\ &- A^m_j(\bar{u}, u)(X_m(\bar{u}) A^k_i(\bar{u}, u)) + X_i(u) A^k_j(\bar{u}, u) - X_j(u) A^k_i(\bar{u}, u) = \\ &= - C^m_{ij}(u) A^k_m(\bar{u}, u). \end{aligned} \tag{21}$$

Cum distribuția determinată de cîmpurile $X_a$ este involutivă, putem alege pe $Q$, în o vecinătate a lui $e$ un sistem de coordonate $(u^i, u^a)$ astfel încît varietățile integrale $xH$ să aibă ecuațiile:

$$u^i = k^i,$$

unde $k^i$ sînt constante (ele sînt chiar primele $n$ componente ale punctului $x$ în harta aleasă),

În acest sistem de coordonate vom avea:

$$X_a(u) = X^b_a(u) \frac{\partial}{\partial u^a}$$
$$X_i(u) = X^j_i(u) \frac{\partial}{\partial u^j} + X^a_i(u) \frac{\partial}{\partial u^a}.$$

Dar $\partial/\partial u_a$ formează o bază pentru distribuția tangentă varietății $xH$. Deci vom avea

$$\left(X^a_i(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^a}\right) A^k_j(\bar{u}, u) = 0, \quad \left(X^a_i(u) \frac{\partial}{\partial u^a}\right) A^k_j(\bar{u}, u) = 0.$$



Prin urmare relația (21) se poate scrie:

$$\begin{aligned} &- A^m_i(\bar{u}, u) A^n_j(\bar{u}, u) C^k_{mn}(\bar{u}) + A^m_i(\bar{u}, u)\left(X^l_m(\bar{u}) \frac{\partial A^k_j(\bar{u}, u)}{\partial \bar{u}^l}\right) - \\ &- A^m_j(\bar{u}, u)\left(X^l_m(\bar{u}) \frac{\partial A^k_i(\bar{u}, u)}{\partial \bar{u}^l}\right) + X^l_i(u) \frac{\partial A^k_j(\bar{u}, u)}{\partial u^l} - \\ &- X^l_j(u) \frac{\partial A^k_i(\bar{u}, u)}{\partial u^l} = - C^m_{ij}(u) A^k_m(\bar{u}, u). \end{aligned} \tag{22}$$

Punînd aici $\bar{u} = 0$, vom găsi că $X^j_i(u)$ trebuie să satisfacă un sistem algebric, liniar, ai cărui coeficienți sînt constanți pe clasele $xH$. Deci și soluțiile acestui sistem vor fi constante pe clasele $xH$. Prin urmare, putem construi funcțiile:

$$A'^i_j(\dot{\bar{u}}, \dot{u}) = A^i_j(\bar{u}, u), \quad C'^i_{jk}(\dot{u}) = C^i_{jk}(\dot{u}), \quad X'^i_j(\dot{u}) = X^i_j(u).$$

unde cu $\dot{u}$ am notat clasa elementului $u$. Fie $h : Q \to Q/H$ definită prin $h : u \to \dot{u}$. În sistemul de coordonate ales avem: $h : (u^i, u^a) \to u^i$ adică: $h^i(u^i, u^a) = u^i$.

Relația (22) va putea fi scrisă:

$$\begin{aligned} &- A'^m_i(\dot{\bar{u}}, \dot{u}) A'^n_j(\dot{\bar{u}}, \dot{u}) C'^k_{mn}(\dot{\bar{u}}) + A'^m_i(\dot{\bar{u}}, \dot{u})(X'_m(\dot{\bar{u}}) A'^k_j(\dot{\bar{u}}, \dot{u})) - \\ &- A'^m_j(\dot{\bar{u}}, \dot{u})(X'_m(\dot{\bar{u}}) A'^k_i(\dot{\bar{u}}, \dot{u})) + X'_i(\dot{u}) A'^k_j(\dot{\bar{u}}, \dot{u}) - \\ &X'_j(\dot{u}) A'^k_i(\dot{\bar{u}}, \dot{u}) = - C'^m_{ij}(\dot{u}) A'^k_m(\dot{\bar{u}}, \dot{u}), \end{aligned} \tag{23}$$

unde $X'_i(\dot{u})$ sînt cîmpurile lui $Q/H$ de componente $X'^j_i(u)$. Relația (23) ne spune că varietatea $Q/H$ poate fi organizată local ca loop Lie pentru care $X'_i(\dot{u})$ sînt $l$-cîmpuri, iar $A'^i_j(\dot{u}, \dot{u})$ sînt operatorii săi de structură. Se vede ușor că, în harta aleasă, avem satisfăcute condițiile:

$$h'(X_a(u)) = 0, \quad h'(X_i(u)) = X'_i(h(u)), \quad A^i_j(\bar{u}, u) = A'^i_j(h(\bar{u}), h(u)).$$

Aplicînd teorema 3 rezultă că aplicația $h$ este un homomorfism al cărei nucleu este $H$. Deci $H$ este divizor normal al lui $Q$.

Am dovedit astfel:

**Teorema 7.** *Condiția necesară și suficientă pentru ca subloopul Lie $H$ al loopului Lie $Q$ să fie divizor normal este ca să aibă loc relațiile* (18).

§11. Fie $L^l(Q)$ algebra Lie asociată loopului Lie $Q$. Construim algebra Lie $[L^l(Q), L^l(a)]$ generată de mulțimea $\{[X, Y] \mid X, Y \in L^l(Q)\}$. Noua algebră Lie este invariantă la acțiunea grupului $G^l(Q)$ deci este o algebră Lie regulată. Dacă distribuția asociată este tocmai distribuția tangentă varietății $Q$, atunci $[L^l(Q), L^l(Q)]$ coincide cu $L^l(Q)$ și loopul se numește perfect. În caz contrar, noua algebră este un ideal invariant la acțiunea grupului $G^l(Q)$ deci îi va corespunde un divizor normal $Q^{(1)}$ al lui $Q$ pe care-l vom

numi subloop derivat al loopului $Q$. Presupunînd că distribuția asociată are $r - n$ dimensiuni alegem $l$-cîmpurile bază $X_\alpha$ pentru $Q$ în așa fel încît $X_\alpha$ să fie cîmpuri bază pentru $Q^{(1)}$.

Rezultă că în această situație vom avea:

$$C^i_{\alpha\beta}(u) = 0 \qquad A^i_a(\bar{u}, u) = 0, \qquad \forall \bar{u}, u \in Q. \tag{24}$$

Deci conform teoremei 7, $Q^{(1)}$ este divizor normal. În plus loopul cît $Q/Q(1)$ are funcțiile de structură $C^{ij}_{jk}(u) = C^i_{jk}(u) = 0$.

Dacă $Q^{(1)}$ este distinct de $Q$, atunci putem considera loopul său derivat $Q^{(2)}$ care se va numi al doilea loop derivat al lui $Q$, ș.a.m.d. Obținem astfel șirul loopurilor derivate

$$Q_r \supset Q^{(1)}_{r_1} \supset Q^{(2)}_{r_2} \supset \dots \supset Q^{(k)}_{r_k} \supset \dots . \tag{25}$$

Deoarece șirul $r, r_1, r_2, \dots, r_k, \dots$ este descrescător, șirul (25) trebuie să fie finit. Prin urmare, sau de la un loc încolo toți $Q^{(p+s)}$ coincid cu $Q^{(p)} \neq I$ (unde prin $I$ am notat subloopul format numai din $\{e\}$), sau există un indice pentru care $Q^{(p)} = I$. În acest ultim caz spunem că șirul (25) se întrerupe, iar loopul $Q$ se numește integrabil. Mai observăm că dacă $Q^{(p)} = I$, atunci $Q^{(p-1)}$ are funcțiile de structură nule.

Din definiție rezultă imediat următoarele proprietăți ale loopurilor integrabile:

1°. Orice subloop Lie al unui loop integrabil este integrabil.

2°. Dacă loopul derivat al unui loop este integrabil, atunci și loopul dat este integrabil.

3°. Dimensiunea loopului derivat al unui loop este efectiv mai mică decît dimensiunea loopului dat.

4°. Orice loop abelian este integrabil (deoarece $[X_\alpha, X_\beta] = 0$, deci $Q^{(1)} = I$).

Fie acum $Q_r$ un loop integrabil și $X_\alpha$ $l$-cîmpuri bază ale algebrei Lie $L^l(Q)$ astfel încît $X_\alpha$ să fie $l$-cîmpuri bază pentru $L^l(Q^{(1)})$. Considerăm cîmpurile $X_2, \dots, X_r$. Ele definesc o distribuție $\Delta_{r-1}$ involutivă. În plus

$$[X_1, X_{\alpha'}] = -C^\alpha_{1\alpha'} X_\alpha \quad (\alpha' = 2, 3, \dots, r).$$

Deci croșetul oricărui cîmp ce aparține distribuției tangente $\Delta_r$ cu un cîmp ce aparține distribuției $\Delta_{r-1}$ aparține distribuției $\Delta_{r-1}$. Vom spune în acest caz că $\Delta_{r-1}$ este invariantă în $\Delta_r$. Considerînd acum cîmpurile $X_2, \dots, X_r$ obținem o nouă distribuție involutivă $\Delta_{r-2}$ invariantă în $\Delta_{r-1}$ ș.a.m.d. Urmează că o condiție necesară pentru ca un loop să fie integrabil este ca să existe un șir de distribuții involutive,

$$\Delta_r \supset \Delta_{r-1} \supset \Delta_{r-2} \supset \dots \supset \Delta_1, \tag{26}$$

astfel încît fiecare $\Delta_i$ să fie invariantă în $\Delta_{i+1}$.



În plus pentru fiecare $i (1 \leq i \leq r)$ avem:

$$\Delta_i(u) = L'_u(\Delta_i(e)), \tag{27}$$

unde cu $\Delta_i(u)$ am notat planul distribuției inclus în $T_u(Q)$.

Reciproc, presupunem că există șirul (26) pe varietatea $Q$. Condiția (27) ne asigură că putem alege $l$-cîmpurile bază $X_\alpha$, astfel încît cîmpurile $X_1, \dots, X_i$ să aparțină distribuției $\Delta_i$. Cum $\Delta_{r-1}$ este invariantă în $\Delta_r$, rezultă că croșetele $[X_\alpha, X_\beta]$ aparțin distribuției $\Delta_{r-1}$, deci $[L^l(Q), L^l(Q)]$ nu coincide cu $L^l(Q)$.

Se dovedește ușor că dimensiunile loopurilor derivate formează un șir descrescător, deci $Q$ este integrabil. Am dovedit deci:

**Teorema 8.** *Condiția necesară și suficientă ca un loop $Q$ să fie integrabil este ca să existe șirul (26) ce satisface condiția (27).*

Folosind funcțiile de structură și alegînd $l$-cîmpurile bază $X_\alpha$ astfel încît $X_1$ să aparțină lui $\Delta_1$, $X_1, X_2$ lui $\Delta_2$ ș. a. m. d., găsim:

$$C^m_{hk} = 0 \quad (h = 1, 2, \dots, i;\ k = 1, 2, \dots, i+1;\ m = i+1, \dots, r).$$

Aici am exprimat faptul că $\Delta_i$ este invariantă în $\Delta_{i+1}$. Cum aceste relații au loc pentru orice $i (1 \leq i \leq r-1)$, urmează că loopurile integrabile sînt caracterizate local prin posibilitatea alegerii bazei așa încît să avem:

$$C^m_{hk} = 0 \quad m \geqslant \max(h, k), \quad A^h_m = 0. \tag{28}$$

Remarcăm că distribuției $\Delta_i$, din cauza condiției (27), îi putem asocia o algebră Lie regulată $L^l_i(Q)$ și anume algebra Lie generată de cîmpurile $X_i$. Prin urmare unui loop Lie integrabil $Q$ îi putem asocia o filtrare a algebrei Lie $L^l(Q)$ prin subalgebre regulate:

$$L^l(Q) = L^l_r(Q) \supset L^l_{r-1}(Q) \supset L^l_{r-2}(Q) \supset \dots \supset L^l_1(Q) \supset 0, \tag{29}$$

astfel încît fiecare $L^l_i(Q)$ este ideal al lui $L^l_{i+1}(Q)$. (aici indicele inferior este dimensiunea distribuției induse pe $Q$).

Avem deci

**Teorema 8'.** *Loopul $Q_r$ este integrabil atunci și numai atunci cînd există o filtrare (29) a algebrei Lie $L^l(Q)$ care induce distribuții ce satisfac condiția (27).*

§ 12. Fie $H_m$ și $H_{m'}$ doi divizori normali ai lui $Q$ care nu au în comun decît elementul neutru. Lor li se poate asocia un divizor normal $H_{m+m'}$ al lui $Q_r$. Presupunem că $H_m$ are cîmpurile $X_1, \dots, X_m$ drept $l$-cîmpuri bază, iar $H_{m'} - X_{m+1}, \dots, X_{m+m'}$. Cum $H_m \cap H_{m'} = \{e\}$ rezultă că $L^l(H_m) \cap L^l(H_{m'}) = \{0\}$. $H_m$ și $H_{m'}$ fiind divizori normali rezultă că

$$[X_i, X_a] = -C^j_{ia} X_j - C^b_{ia} X_b \in L^l(H_m) \cap L^l(H_{m'}) \ (i, j = 1, 2, \dots, m';$$
$$a, b = m+1, \dots, m+m').$$

Deci vom avea

$$C^j_{ia} = 0 \qquad C^b_{ia} = 0.$$

Considerăm cîmpurile $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+m'}$ și $X$ un cîmp oarecare pe $Q$. Atunci $[X_i, X] \in L^l(H_m)$ și $[X_a, X] \in L^l(H_{m'})$. Distribuția generată de cele $m + m'$ cîmpuri este involutivă și stîng invariantă. Varietatea integrală a acestei distribuții, ce trece prin $e$, va fi chiar un divizor normal al lui $Q$, deoarece ansamblul $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+m'}$ generează un ideal stîng invariant al algebrei $L^l(Q)$. În cazul cînd $m + m' = r$, $Q_r$ este produsul direct al lui $H_m$ și $H_{m'}$ și avem :

$$C^a_{ij} = C^j_{ia} = C^b_{ia} = C^i_{ab} = 0, \qquad A^i_a = A^a_i = 0. \tag{27}$$

Un divizor normal al lui $Q_r$ se numește maximal dacă el nu este inclus în nici un alt divizor normal al lui $Q_r$.

Dacă un loop este neintegrabil, atunci el poate să admită sau nu divizori normali integrabili. Dacă nu admite asemenea divizori vom spune că $Q$ este un loop semisimplu.

Dacă un loop este neintegrabil și nu e semisimplu atunci el admite divizori normali integrabili. Se poate demonstra că dacă $H$ și $K$ sînt doi divizori normali integrabili, atunci cel mai mic divizor normal care le conține va fi tot integrabil. Într-adevăr putem alege $l$ - cîmpurile $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+m'}, X_{m+m'+1}, \ldots, X_{m+m'+m''}$ liniar independente, în felul următor :

a) $X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}, \ldots, X_{m+m'}$ să fie $l$-cîmpuri bază pentru $H$ iar $X_{m+1}, \ldots, X_{m+m'}, X_{m+m'+1}, \ldots, X_{m+m'+m''}$ să fie $l$-cîmpurile bază pentru $K$.

b) distribuțiile $\Delta_i (1 \leqslant i \leqslant n + m')$ determinate de cîmpurile $X_1, \ldots, X_i$ satisfac condițiile teoremei 8;

c) $l$-cîmpurile $X_{m+m'+1}, \ldots, X_{m+m'+m''}$ sînt cîmpurile bază ale algebrei $L^l(K)$, scrise în ordinea în care intervin în șirul de distribuții asociat lui $K$.

În acest caz șirul de distribuții :

$$\Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \ldots \subset \Delta_{m+m'} \subset \Delta_{m+m'+1} \subset \ldots \subset \Delta_{m+m'+m''},$$

unde fiecare distribuție $\Delta_i (1 \leqslant i \leqslant m + m' + m'')$ este determinată de cîmpurile $X_1, \ldots, X_i$, satisface condițiile teoremei 8, deci loopul corespunzător distribuției $\Delta_{m+m'+m''}$ este integrabil. Faptul că el este divizor normal se dovedește la fel cum s-a dovedit la începutul acestui paragraf că $H_{m+m'}$ este divizor normal. Deci dacă divizorii normali $H$ și $K$ sînt integrabili, atunci și cel mai mic divizor normal care le conține este integrabil. Aceasta ne permite să construim un divizor normal $R$, integrabil, de ordin maxim al lui $Q$ care nu va fi conținut în nici un alt divizor normal integrabil. Subloopul $R$ se numește radicalul lui $Q_r$. Loopul factor $Q/R$ este atunci semisimplu. Într-adevăr, dacă $D \subset Q/R$ este nucleul homomorfismului $g : Q/R \to Q'$, atunci $g \circ h : Q \to Q'$ este un homomorfism al cărui nucleu este tocmai contraimaginea prin $h$ a lui $D$. Deci $h^{-1}(D)$ este un divizor normal care-l include pe $R$. Rămîne de arătat că dacă $D$ este integrabil și $h^{-1}(D)$ este integrabil.



Considerăm șirul :

$$D \supset D^{(1)} \supset \ldots \supset D^{(p)} \supset D^{(p+1)} = I$$

al loopurilor derivate ale loopului $D$. Atunci, subloopului $h^{-1}(D)$ îi vom asocia șirul de subloopuri

$$h^{-1}(D) \supset h^{-1}(D^{(1)}) \supset \ldots\ldots \supset h^{-1}(D^{(p)}) \supset R \supset R^{(1)} \supset \ldots \supset R^{(s)} = I.$$

Vom alege $l$-cîmpurile bază ale lui $h^{-1}(D)$ în felul următor :

$X_1, \ldots\ldots, X_{k_s}$ — să fie $l$-cîmpurile bază ale lui $R$,

$X_1, \ldots, X_{k_s}, X_{k_s+1}, \ldots, X_{k_s+k_p}$ — să fie $l$-cîmpurile bază ale lui $h^{-1}(D^{(p)})$,

. . . . . .

$X_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{k_s+k_p+\cdots+k_2}$ — să fie $l$-cîmpurile bază ale lui $h^{-1}(D^{(1)})$,

$X_1, \ldots\ldots\ldots\ldots, X_{k_s+k_p+\cdots+k_2+k_1}$ să fie $l$-cîmpurile bază ale lui $h^{-1}(D)$.

Se constată ușor că :

$$[L^l(h^{-1}(D)), L^l(f^{-1}(D))] \subset L^l(h^{-1}(D^{(1)})), \ldots, [L^l(h^{-1}(D^{(p)})), L^l(h^{-1}(D^{(p)}))] \subset \subset L^l(R),$$

deci $h^{-1}(D)$ este integrabil. Aceasta ar contrazice însă maximalitatea lui $R$. Deci se poate spune că un loop neintegrabil se poate prezenta întotdeauna cu ajutorul unui loop integrabil și al unui loop semisimplu.

## BIBLIOGRAFIE


1. Belousov V. D. — *Osnovy teorii kvazigrupp i lup*. Ed. Nauka, Moskva, 1967.
2. Burdujan I. — *Loopuri Lie locale*. Studii și cercetări matematice, (va apare)
3. Gheorghiev Gh., Miron R., Papuc D. — *Geometrie analitică și diferențială* vol. II, Ed. did. și pedagogică, București, 1971.
4. Malcev A. T. — *Analiticeskie lupy*. Mat. Sb. T. 36, 1955, 569—576.
5. Nomizu K. — *Lie groups and differential geometry*. Math. Soc. of Japan, 1956.


## SUR L'ALGÈBRE DE LIE DES CHAMPS DE VECTEURS D'UN LOOP DE LIE

### Résumé


On caractérise locallement les loops de Lie à l'aide des opérateurs de structure $A^\alpha_\beta(\bar{u}, u)$ et des fonctions de structure $C^\alpha_{\beta\gamma}(u)$. On caractérise aussi les sous-loops d'un loop de Lie, ses sous-loops distingués, les loops intégrables et les loops nonintégrables et nonsémi-simples.