But (2.2) and (0.3) yield:

$$R_{m's'j'}^{\cdot\cdot\cdot\cdot\,i} = 0\,; \tag{2.3}$$

therefore, the new connection Γ has no curvature.

Thus, our consideration may be made only for a parallelizable neighbourhood of an arbitrary point $x \in V_n$. Locally, there is always a connection without curvature, since on a local chart we may consider the fields of those vectors which are tangent to the coordinates and thus the domain of the considered local chart becomes parallelizable.

It follows, in a manner similar to that of [4], that for the description of the conservation laws of the general relativity theory, this formalism may be used only on a parallelizable domain.

REFERENCES

1. Colleau J. — *Études des propagateurs tensoriels et spinoriels*, Ann. Inst. Poincaré, Sect. A, vol. III, No 3—4, (1965), p. 195.
2. Gottlieb J. — *La tenseur-intégrale et quelques unes de ses conséquences pour la Physique*, Preprint F. T. 2, (01. 1969), Univ. Timișoara, p. 1—14.
3. Gottlieb J., Latu M., Zet G. — *Tensor integral and exterior derivative in parallelizable spaces*. An. șt. Univ. Iași (s. n), Secț. I a. Matematică, Tom XV, (1969), p. 457.
4. Gottlieb J., Moceiuțchi C. — *Sur les lois covariantes de conservation dans la théorie de la relativité générale*. An. șt. Univ. Iași (s. n), Secț. I a Matematică, Tom XVII, (1971), p. 105.
5. Gottlieb J. — *Tensor integral and exterior derivative of double tensorial forms*. An. șt. Univ. Iași (s. n) Secț. I a. Matematică, Tom XVIII, (1972), p. 167,
6. Lichnerowicz A. — *Propagateurs et commutateurs en Relativité générale*, Inst. des hautes études scientifiques Publications Mathématiques, nr. 10 (1961), p. 293.
7. Moór A. — *Einführung des invarianten Differentials und Integrals in allgemeinen metrischen Räumen*, Acta Math., 86, (1951), p. 71—83.
8. Moór A. — *Über kovariante Ableitung und partielles Tensor integral*, Monatshefte fur Mathematik, 70, (1966), p. 134—148.
9. Witt B. de, Brehme R. — *Radiation damping in a gravitational field*, Ann. Phys. 9, (1960), p. 220—259.

TENSOR-INTEGRALĂ ÎN SPAȚII CU CONEXIUNE AFINĂ

Rezumat

Continuînd lucrarea [5], autorii definesc tensor-integrala în spații cu conexiune afină prin relația (1.2). Generalizarea formulelor de tip Stokes conduce, în general, la tensor-integrala bitensorilor, deoarece K din relația (1.4) este un bitensor. Restricția pentru K de a avea un caracter tensorial (și nu bitensorial) conduce la concluzia că domeniul în care efectuăm operația de integrare tensorială trebuie să fie paralelizabil.

Analele științifice ale Universității „Al. I. Cuza" — Iași
Secția I a. Matematică, tom XX, 1974

QUASI-CONNEXIONS COMPOSÉES D'ORDRE DEUX

PAR

A. M. NAVEIRA et L. M. HERVELLA

Les quasi-connexions sur une variété différentiable ont été définies et étudiées localement par Wong, [6]. Plus tard, Vamanu, [5], définit et étudie globalement ces quasi-connexions. Si la variété est riemannienne, elle détermine une unique quasi-connexion sans torsion et qui fait le tenseur métrique parallèle. Fava, [1], [2] introduit la notion de connexion composée d'ordre deux et en étudie quelques propriétés.

Dans cet article on définit les quasi-connexions composées d'ordre deux comme une généralisation simultanée des quasi-connexions et des connexions composées: on étudie leur compatibilité avec une métrique de Riemann, l'existence et l'unicité de l'unique quasi-connexion composée d'ordre deux, laquelle est compatible avec la métrique et qui est sans torsion. Finalement, on déduit quelques propriétés relatives au déplacement parallèle par rapport à ces quasi-connexions.

Soit V_n une variété différentiable de classe C^∞ avec une métrique de Riemann g, φ un champ tensoriel sur V_n du type (1, 1) et non-dégénéré. Dans la suite, nous ferons usage des notations suivantes.

$F(V_n)$: l'algèbre des fonctions sur V_n.

$L^1(V_n)$: F-module des champs vectoriels.

$L_1(V_n)$: F-module dual de $L^1(V_n)$.

$L_s(V_n)$: F-module des s-formes différentielles extérieures.

$L(V_n) = \bigcup_{s=0}^{n} L_s(V_n)$: L'algèbre des formes différentielles extérieures.

$L_s^r(V_n)$: F-module des champs tensoriels du type (r, s).

$\bar{L}(V_n) = \bigcup_{r,s,=0}^{n} L_s^r(V_n)$: F-module des champs tensoriels.

Tous les objets géométriques seront de classe C^∞.

Soit δ une dérivation de dégré un sur l'algèbre $L(V_n)$ définie par

(i) $$\delta f(X) = \varphi(X) \cdot f, \text{ ou } f \in F(V_n),\ X \in L^1(V_n).$$

(ii) $$2\delta\omega(X, Y) = \varphi X \cdot \omega(Y) - \varphi Y \cdot \omega(X) - \omega(\psi[\varphi X, \varphi Y]),$$
$$\forall X, Y \in L^1(V_n), \qquad \omega \in L_1(V_n).$$

et ψ représente le tenseur réciproque de φ.

Définition 1. { 6 }, { 5 }. *Une quasi-connexion sur V_n est un opérateur ∇ lequel pour chaque champ $X \in L^1(V_n)$ associe une application R-linéaire $\nabla_X : L^1(V_n) \to L^1(V_n)$ telle que :*

(i) $$\nabla_{fX+gY} = f\nabla_X + g\nabla_Y,$$

(ii) $$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + \delta f(X) \cdot Y.$$

Remarque 1. On prouve aisément que la quasi-connexion satisfait les propriétés suivantes ;

(iii) $$\nabla_X f = \delta f(X),$$

(iv) $$\nabla_X (T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S),$$
$$\forall L,\ S \varepsilon \bar{L}(V_n).$$

Définition 2. *Supposons donnés sur V_n, outre l'opérateur ∇_X d'une quasi-connexion, un autre opérateur R-linéaire ${}_2\nabla_{XY}$ qui, pour chaque élément $(X, Y) \in L^1(V_n) \times L^1(V_n)$ associe à chaque champ tensoriel. T un autre champ tensoriel du même type qui vérifie :*

(i) $${}_2\nabla_{(X+Y)(Z+W)} = {}_2\nabla_{XZ} + {}_2\nabla_{XW} + {}_2\nabla_{YZ} + {}_2\nabla_{YW},$$
$$\forall X, Y, Z, W \in L^1(V_n),$$

(ii) $${}_2\nabla_{(fX)Y} = f_2\nabla_{XY},\ {}_2\nabla_{X(fY)} = f_2\nabla_{XY} + \delta fX \cdot \nabla_Y,\ \forall f \in F,$$

(iii) $${}_2\nabla_{XY} f = \varphi X \cdot \varphi Y \cdot f,$$

(iv) $${}_2\nabla_{XY} (T \otimes S) = ({}_2\nabla_{XY} T) \otimes S + \nabla_X T \otimes \nabla_Y S + \nabla_Y T \otimes \nabla_X S +$$
$$+ T \otimes {}_2\nabla_{XY} S, \quad \forall S,\ T \varepsilon \bar{L}(V_n).$$

(v) Si C est l'opérateur contraction alors :
$${}_2\nabla_{XY}(CT) = C_2\nabla_{XY} T.$$

La paire $(\nabla_X, {}_2\nabla_{XY})$ détermine un objet géométrique $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$, que l'on définit comme la quasi-connexion composée d'ordre deux ; on dit que ∇_X est sa première composante et ${}_2\nabla_{XY}$ la seconde.

Remarque 2. Il est facile de prouver que pour les quasi-connexions composées d'ordre deux, on a :

(i') $${}_2\nabla_{XY} (f S) = \varphi X \cdot \varphi Y(f) \cdot S + \varphi X(f)\nabla_Y S + \varphi Y(f)\nabla_X S + f_2\nabla_{XY} S.$$

(ii') $$\varphi X(\varphi Y \omega(Z)) = {}_2\nabla_{XY} \omega(Z) + \nabla_X \omega(\nabla_Y Z) + \nabla_Y \omega(\nabla_X Z) + \omega(\nabla_{XY} Z).$$
$$\forall f \in F,\ X, Y, Z \varepsilon L^1(V_n),\ \omega \in L_1(V_n),\ S \in \bar{L}(V_n).$$

Proposition 1. *Si X, Y ou S s'annulent sur U, (sous-variété ouverte de V_n), alors $\nabla_X S$ et ${}_2\nabla_{XY} S$ s'annulent aussi.*

Corollaire 1. *Toute quasi-connexion $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ sur V_n induit une quasi-connexion, (du même type), avec opérateurs ∇^U_X, ${}_2\nabla^U_{XY}$ sur toute sous-variété ouverte U de M.*

Dans un ouvert coordonné U, par rapport à un repère naturel e_j, la quasi-connexion composée d'ordre deux est donnée par ses coefficients $(\Gamma^h_{jk}, \Gamma^h_{ijk})$, où

$$\nabla_{e_j e_k} = \Gamma^h_{jk} e_h ;\ {}_2\nabla_{e_i e_j} e_k = \Gamma^h_{ijk} e_h$$

et dans l'intersection de deux ouverts coordonnés, on a

$$\Gamma^{k'}_{i'j'} = \mu^{k'}_k(\mu^i_{i'} \mu^j_{j'} \Gamma^k_{ij} + \varphi^{h'}_{i'} \mu^k_{h'j'}),$$

$$\Gamma^{p'}_{h'k'j'} = \mu^{p'}_p [\varphi^{i'}_{h'} \varphi^{m'}_{k'} \mu^{pm'}_{i'k'j'} + \varphi^{i'}_{h'} \Gamma^p_{kj}(\mu^k_{k'} \mu^j_{j'i'} + \mu^k_{k'i'} \mu^j_{j'}) +$$
$$+ \varphi^{m'}_{k'} \mu^h_{h'} \mu^j_{j'm'} \Gamma^p_{hj} + \mu^h_{h'} \mu^k_{k'} \Gamma^j_{j'} \Gamma^p_{hkj}],$$

où $$\mu^{hr}_{j'\ldots i'} = \frac{\partial^r x^h}{\partial x^{j'} \ldots \partial x^{i'}}.$$

Définition 3. *La torsion de la quasi-connexion composée d'ordre deux est donnée par*

$$\text{Tor } \overset{(c)}{{}_2\nabla} = (\text{Tor } \nabla, \text{Tor } {}_2\nabla),$$

où

$$\text{Tor } \nabla(X, Y) = \nabla_X Y = \nabla_Y X - \psi([\varphi X, \varphi Y]).$$

$$\text{Tor } {}_2\nabla(X, Y)Z = {}_2\nabla_{XY} Z - {}_2\nabla_{YX} Z - \nabla_\psi ([\varphi X, \varphi Y])Z.$$

Lemme 1. *Si V_n est une variété de Riemann munie d'une quasi-connexion composée d'ordre deux, alors :*

a) $\nabla g = 0$ a') $\varphi X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

$\Leftrightarrow$

b) ${}_2\nabla g = 0$ b') $\varphi X \cdot \varphi Y \cdot g(Z, W) = g({}_2\nabla_{XY} Z, W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) +$
$+ g(Z, {}_2\nabla_{XY} W) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X W).$

On déduit la preuve du fait que

a) $\Leftrightarrow$ a'), a) + b) $\Rightarrow$ b') et b') + a) $\Rightarrow$ b).

Définition 4. *On dit que la quasi-connexion composée* $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ *est compatible avec la métrique si, et seulement si*

$$\nabla g = 0, \qquad {}_2\nabla g = 0.$$

Définition 5. *La quasi-connexion composée* $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ *est sans torsion si, et seulement si*

$$\mathrm{Tor}\,\nabla = 0, \qquad \mathrm{Tor}\,{}_2\nabla = 0.$$

Théorème 1. *Si V_n est une variété de Riemann avec tenseur métrique g, alors il existe une unique quasi-connexion composée d'ordre deux,* $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ *laquelle est compatible avec la métrique, et sans torsion.*

Démonstration : $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ est univoquement déterminée par ses coefficients $(\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{jkl})$. On sait que les Γ^i_{jk} existent et sont uniques, que g est parallèle, $(\nabla g = 0)$, et que ∇ est sans torsion ; dans un système de coordonnées locaux, son expression est : [5].

$$\Gamma^m_{jk} = 1/2\, g^{im} (g_{ij,\,h}\, \varphi^h_k - g_{jk,\,h}\, \varphi^h_i + g_{ki,\,h}\, \varphi^h_j) -$$
$$- \psi^h_{i,n}\, \varphi^n_{[i}\, \varphi^l_{j]}\, g_{hl}\, g^{im} + \psi^m_{i,h}\, \varphi^h_{[j}\, \varphi^l_{k]} - \psi^h_{i,n}\, \varphi^n_{[i}\, \varphi^l_{k]}\, g_{hj}\, g^{im}.$$

De plus, on sait que

$$\varphi X \cdot \varphi Y \cdot g(Z, Z) = 2g({}_2\nabla_{XY}\, Z, Z) + 2g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z),$$

dont l'expression dans un système de coordonnées est

$$1/2(\varphi^l_i X_l)(\varphi^m_j X_m) = g(\Gamma^l_{ijk} X_l, X_k) + g(\Gamma^l_{ik} X_l, \Gamma^m_{jk} X_m) =$$
$$= \Gamma^l_{ijk}\, g_{lk} + \Gamma^l_{ik}\, \Gamma^m_{jk}\, g_{lm},$$

c'est-à-dire

$$\Gamma^r_{ijk} = 1/2\; g^{kr}\, \varphi^l_i\, (\varphi^m_j\, g_{kk,\,ml} - \varphi^m_{j,l}\, g_{kk,\,m}) - g^{kr}\, g_{lm}\, \Gamma^l_{ik}\, \Gamma^m_{jk},$$

laquelle donne l'existence et l'unicité des coefficients Γ^i_{jkl}.

Du fait que g est un tenseur symétrique, on déduit ${}_2\nabla g = 0$. Finalement, il reste à prouver

$$\text{(I)} \qquad \mathrm{Tor}\,{}_2\nabla = 0.$$

Puisque

$$\varphi X \cdot \varphi Y \cdot g(Z, W) = g({}_2\nabla_{XY}\, Z, W) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y W) +$$
$$+ g(\nabla_Y Z, \nabla_X W) + g({}_2\nabla_{XY}\, W, Z);$$

en changeant X par Y et en utilisant le fait que

$$(\varphi X \cdot \varphi Y - \varphi Y \cdot \varphi X) g = \nabla_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}\, g$$

on déduit (I).

Définition 6. *Etant données deux quasi-connexions d'ordre deux* $\overset{(c)}{{}_2\bar\nabla} = (\bar\nabla, {}_2\bar\nabla)$ *et* $\overset{(c)}{{}_2\nabla} = (\nabla, {}_2\nabla)$, *on définit leur différence par*

$$\overset{(c)}{\bar\nabla} - \overset{(c)}{\nabla} = (\bar\nabla - \nabla,\ {}_2\bar\nabla - {}_2\nabla).$$

Proposition 2. *La différence de deux quasi-connexions composées d'ordre deux est un tenseur si et seulement si elles ont la même première composante.*

On déduit la preuve du fait que $B_1 = \bar\nabla - \nabla$ est un tenseur, et des propriétés des connexions ${}_2\bar\nabla$ et ${}_2\nabla$.

Dans la suite, nous supposons $B_1 = 0$ et nous représentons

$$B(X, Y, Z) = {}_2\bar\nabla_{XY}\, Z - {}_2\nabla_{XY}\, Z,$$

expression qu'il est possible de décomposer

$$B(X, Y, Z) = S(X, Y, Z) + A(X, Y, Z),$$

étant S et A respectivement tenseurs symétrique et antisymétrique dans les deux premiers arguments.

Puisque

$$\bar\nabla_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}\, Z - \nabla_{\psi([\varphi X, \varphi Y])}\, Z = 0,$$

on déduit

$$2A(X, Y, Z) = \mathrm{Tor}\,{}_2\bar\nabla\,(X, Y)\, Z - \mathrm{Tor}\,{}_2\nabla(X, Y) Z.$$

Définition. *Soit γ une courbe dans V_n avec vecteur tangent X. Un champ vectoriel Y est parallèle au long de γ par rapport à ${}_2\nabla_{XX}$ si, et seulement si*

$$\nabla_{XX}\, Y = 0.$$

Théorème. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) *Les secondes composantes des quasi-connexions composées d'ordre deux définissent le même déplacement parallèle*

b) $B(X, X, Z) = 0$,

c) $S(X, Y, Z) = 0$,

d) $B(X, Y, Z) = A(X, Y, Z)$.

Preuve : Evidemment a) $\Leftrightarrow$ b) et c) $\Leftrightarrow$ d). Etant $S(X, Y, Z)$ symétrique par rapport à X et Y, on montre b) $\Leftrightarrow$ c).

Corollaire 2. *Les quasi-connexions composées d'ordre deux* $\overset{(c)}{{}_2\bar\nabla}$ *et* $\overset{(c)}{{}_2\nabla}$ *coïncident si, et seulement si l'on a : a) du Théorème 2 et* $\mathrm{Tor}\,\overset{(c)}{{}_2\bar\nabla} = \mathrm{Tor}\,\overset{(c)}{{}_2\nabla}$.

Corollaire 3. *Etant donnée sur V_n une quasi-connexion composée d'ordre deux ${}_2\overset{(c)}{\nabla}$, il existe une autre unique quasi-connexion ${}_2\overset{(c)}{\nabla}$, laquelle satisfait* a) *du Théorème 2 et est sans torsion.*

Preuve : On définit

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y - 1/2\, \bar{T}(X, Y),$$

$${}_2\nabla_{XY} Z = {}_2\bar{\nabla}_{XY} Z - 1/2\, \bar{T}(X, Y, Z),$$

et $(\nabla, {}_2\nabla)$ satisfait les propriétés requises.

Département de Géométrie
et Topologie
Université de Santiago de Compostela
Espagne

BIBLIOGRAPHIE

1. Fava F. — *Connessioni composte e movimenti di ordine superiore.* Att. Ac. Sc. Torino, 98, (1963–64).
2. Fava F. — *Connessioni composte su varietà differenziabili.* Period. Mat., 46, (1968), 126–149.
3. Hicks N. J. — *Notes on differential Geometry.* Van Nostrand 1965.
4. Kobayashi S. - Nomizu K. — *Foundations of differential geometry.* Vol. I, II, Interse. Publ. (1963), (1969).
5. Vamanu E. — *Cuasi-conexiuni pe varietati diferentiable.* An. şt. Univ. Iaşi. Matematica, t. XVI, (1970), 383–388.
6. Wong Y. C. — *Linear connections and quasi connections on a differentiable manifold.* Tôhoku Math. Journ., 14, (1962), 48–63.

CVASI-CONEXIUNI COMPUSE DE ORDIN 2

Rezumat

Plecînd de la noţiunea de cvasi-conexiune şi conexiune compusă autorii definesc noţiunea de cvasi-conexiune compusă de ordin 2. Se studiază compatibilitatea unei astfel de cvasi-conexiuni cu o metrică riemanniană şi se arată că există o singură cvasi-conexiune compusă de ordin 2 compatibilă cu o metrică şi fără torsiune. În încheierea articolului se demonstrează cîteva proprietăţi referitoare la deplasările paralele în raport cu cvasi-conexiunile compuse de ordin 2.

Analele ştiinţifice ale Universităţii „Al. I. Cuza" – Iaşi
Secţia I a. Matematică, tom XX, 1974

ON FIBERING WITH A_2 - STRUCTURE AND η - SEMI-SYMMETRIC CONNECTIONS

BY

PETRE STAVRE

Let V_n be a $n = 2m + 1$ - dimensional differentiable manifold with an almost contact metric structure $A_2 = (\mathcal{J}, \eta, E, g)$. We denote by $\mathcal{X}(V_n)$ the Lie algebra of all vector fields on V_n. The structure A_2 is defined by a (1,1)-tensor field $\mathcal{J}$, a 1 - form η, a (0, 2)—tensor field g(g is a Riemannian metric on V_n) and a vector field E satisfying the following conditions [1], [2] :

$$\eta(E) = 1, \tag{1}$$

$$\mathcal{J}E = 0, \tag{2}$$

$$\eta(\mathcal{J}X) = 0 \quad \text{for all} \quad X \in \mathcal{X}(V_n), \tag{3}$$

$$\mathcal{J}^2 = -I + \eta \otimes E, \tag{4}$$

$$g(\mathcal{J}X, \mathcal{J}Y) = g(X, Y) - \eta(X)\,\eta(Y) \quad \text{for all } X, Y \in \mathcal{X}(V_n). \tag{5}$$

We define a 2—form F on V_n as follows :

$$F(X, Y) = g(X, \mathcal{J}Y) \quad \text{for all } X, Y \in \mathcal{X}(V_n). \tag{6}$$

An almost contact metric structure A_2 is said to be invariant if $\mathcal{J}$, η and g are invariant under the action of G, the 1-parameter group generated by E. Moreover, if E is a (strictly) regular vector field, then A_2 is said to be an invariant strictly regular almost contact structure on V_n [2].

Let $V_r (r = 2m)$ be the orbit space defined by E ; If A_2 is an invariant strictly regular almost contact structure on V_r, then ;